Felsőbb Matematika (2010-11 ősz) 4. gyakorlat

1. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{A}$ oszlopterére, és $\mathbf{A}$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ optimális megoldása $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

2. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ oszlopai lineárisan függetlenek és $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ a QR-felbontás, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszerhez tartozó normálegyenlet-rendszer $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$, és az eredeti egyenletrendszer optimális megoldása $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$.

3. Hogyan illesztenénk mért (t_i, y_i) adatpárokra egy $y = Ae^{\alpha t} + B\cos\beta t + C\sin\beta t$ alakú görbét, ha α és β ismert paraméterek, és A, B és C értékére kell optimális (legkisebb négyzetek elvének megfelelő) becslést adni. Írjuk fel az egyenletrendszert és a hozzá tartozó normálegyenletet-rendszert.

4. Hozzuk ortogonális (unitér) hasonlósági transzformációval felső háromszögalakra az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \\ 3 & 17 & -6 \\ -12 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixot!

5. Mutassuk meg, hogy minden normális felső háromszögmátrix diagonális.

6. Diagonalizáljuk ortogonálisan az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixot és írjuk fel a spektrálfelbontását, azaz állítsuk elő $\mathbf{A} = \sum_\lambda \lambda\mathbf{P}_\lambda$ alakban, ahol $\mathbf{P}_\lambda$ a λ sajátértékhez tartozó sajátaltérre való merőleges vetítés mátrixa.

7. A Schur-féle háromszögalakra hozási tétellel bizonyítsuk Cayley-Hamilton tételét, mely szerint ha $p(x)$ az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja, akkor $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

8. Mutassuk meg, hogy önadjungált mátrix minden sajátértéke valós; hasonlóan unitér mátrix minden sajátértéke 1 abszolútértékű.

9. Milyen geometriai transzformáció felel meg annak a lineáris leképezésnek, melynek sajátértékei

(a) $1, 1, 1$; (b) $1, 1, -1$; (c) $1, -1, -1$; (d) $-1, -1, -1$; (e) 1; (f) -1?

10. Számítsuk ki a k-adik Fibonacci-számot ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$)!

HF. Diagonalizáljuk ortonormált bázisban az alábbi szimmetrikus mátrixokat:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

HF. Mi a geometriai jelentése a következő (ortogonális) mátrixok által meghatározott transzformációknak:

$$\text{(a)}\ \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)}\ \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}?$$