

1. Ábrázoljuk az $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y - 5 = 0$ egyenletű másodrendű görbét! Határozzuk meg centrumát, és tengelyeinek egyenletét!
2. Mutassuk meg, hogy ha \mathbf{A} szimmetrikus, akkor az alábbi állítások ekvivalensek:
 1. \mathbf{A} pozitív definit;
 2. van olyan szimmetrikus, pozitív definit \mathbf{B} mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{X}^2$;
 3. van olyan invertálható \mathbf{Y} mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$.

3. Az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor korrigált szórásnégyzetén az s^* számot értjük, ahol

$$s^* = \frac{1}{n-1} ((x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2), \text{ és } \bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n).$$

Írjuk fel e kvadratikus alak mátrixát, és döntsük el, hogy pozitív definit-e.

4. Számítsuk ki az alábbi mátrixok szinguláris érték szerinti felbontásának teljes és redukált alakját, és írjuk fel a hozzá tartozó diadikus felbontást!

$$(a) \begin{bmatrix} -\frac{4}{13} & 6 \\ \frac{11}{13} & -4 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (d) \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Határozzuk meg a fenti mátrixok általánosított (pszeudo)inverzét!
6. Határozzuk meg az 1.(d)-beli mátrix polárfelbontását!
7. Tudjuk, hogy az $\mathbf{A} = \mathbf{U} \text{diag}(4, -2, -2, 0) \mathbf{U}^T$ az \mathbf{A} mátrix sajátfelbontása, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel \mathbf{A} szinguláris felbontását!

8. Igazoljuk a pszeudoinvertzre vonatkozó alábbi összefüggéseket!
 1. $\mathbf{A} \mathbf{A}^+ \mathbf{A} = \mathbf{A}$,
 2. $\mathbf{A}^+ \mathbf{A} \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$,
 3. $(\mathbf{A} \mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A} \mathbf{A}^+$,
 4. $(\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+ \mathbf{A}$.

HF. Írjuk fel az $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix szinguláris és redukált szinguláris felbontását.

HF. Mutassuk meg, hogy az $m \times n$ -es \mathbf{A} mátrixra $\mathbf{A} \mathbf{A}^+$ az \mathbb{R}^m merőleges vetítése az \mathbf{A} oszlopterére. (Útmutatás: használjuk a redukált felbontást!)