Felsőbb Matematika (2010-11 ősz) 3. gyakorlat

1. Bizonyítsuk be, hogy egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor ortogonális (vagyis $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$), ha $\mathbf{A}$ oszlopai (és sorai) ortonormált rendszert alkotnak.

2. Bizonyítsuk be, hogy ($n \times n$-es) ortogonális mátrixok szorzata és inverze is ortogonális.

3. Önadjungáltak-e, unitérek-e a következő komplex mátrixok:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ önadjungált és $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitér mátrixok, akkor $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}$ önadjungált.

5. Adjunk meg ortonormált bázist az $(1,2,-1,0),(2,1,0,1),(1,-1,1,-1) \in \mathbb{R}^4$ vektorok által generált altérben.

6. Legyenek $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ alterek. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\dim\langle V \cup W\rangle = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

7. Adjuk meg az $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ altérre való merőleges vetítés mátrixát. Irjuk fel az $(1,2,0)$ vektort egy S-beli és egy rá merőleges vektor összegeként.

8. Mutassuk meg, hogy egy $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix pontosan akkor egy k dimenziós altérre való merőleges vetítés mátrixa, ha $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ és $r(\mathbf{P}) = k$.

Hf 1. Mutassuk meg, hogy $\mathbf{A}$ és $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ nulltere megegyezik.

Hf 2. Legyenek $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ alterek. Pontosan mikor altér $V \cup W$?