Ötödik gyakorlat

1. Határozzuk meg az $f(x) = \{3^{-x}-1,\ ha\ -1 \leqslant x < 0;\ tg(\frac{x}{2}),\ ha\ 0 \leqslant x < \pi;\ \frac{x}{x^2-2},\ ha\ \pi \leqslant x \leqslant 6\}$ hellyettesítési értéket az $f(-1),\ f(\frac{\pi}{2}),\ f(4),\ f(6)$ helyen.

2. Határozzuk meg az alábbi valós függvények értelmezési tartományát és értékkészletét:
   a) $\frac{x^2}{1+x}$, b) $\sqrt{5-2x}$, c) $\sqrt[3]{\frac{2x}{x^2-2x+2}}$, d) $\frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$,
   e) $\lg(\cos(x))$, f) $\lg(\frac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6})$, g) $\frac{3}{4-x^2} + \ln(x^3 - x)$, h) $\ln(\sin(\ln(x)))$.

   Megoldás
   2) a) Értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$; értékkészletét határozzuk meg: $y = \frac{x^2}{1+x}$ oldjuk meg x-re: $x_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{y^2-4y}-y}{2}$. A diszkriminánsra vonatkozó feltétel: $y^2 - 4y \geqslant 0$, ezért $]-\infty, 0] \cup [4, \infty[$.
   2) b) Értelmezési tartománya: $]-\infty, 2.5]$; értékkészletét határozzuk meg: $y = \sqrt{5-2x}$, azaz $y \in \mathbb{R}^+$.
   2) c) Értelmezési tartománya: $\mathbb{R}$, értékkészletét határozzuk meg: $y = \sqrt{\frac{2x}{x^2-2x+2}}$, x-re kifejezett másodfokú egyenlet diszkriminánsából megkapjuk, hogy $y \in [\sqrt[3]{-\sqrt{2}-1}, \sqrt[3]{\sqrt{2}-1}]$.
   2) d) Értelmezési tartománya: $\varnothing$, értékkészlete: $\varnothing$.
   2) e) Értelmezési tartománya: $\cup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$, a cos értékkészlete 0 és 1 között van, akkor a logaritmus értékkészlete $]-\infty, 0]$ ez az intervallum.
   2) f) Értelmezési tartománya azon x-ek, melyre $\frac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6} > 0$. A nevező mindig nagyobb, mint 0, a számláló pedig felírható $(x-2)(x-3)$ alakban. Tehát az értelmezési tartománya $]-\infty, 2[\cup]3, \infty[$. Az értékkészlet meghatározása, későbbi tananyag.
   2) g) Értelmezési tartományának meghatározásához meg kell határoznunk a két tag (összeg) értelmezési tartományát. Mivel $x^3 - x = x(x-1)(x+1)$ felírható ilyen alakban ezért ez pozitív lesz, ha $x \in]-1, 0[\cup]1, \infty[$, összevetve az első összeg értelmezési tartományával: így $]-1, 0[\cup]1, 2[\cup]2, \infty[$ lesz az értelmezési tartomány. Az értékkészletét később...
   2) h) Értelmezési tartománynál az kell, hogy $\sin(\ln(x)) > 0$, ez akkor lesz, ha $\ln(x) \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[$, ezért $x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}]e^{2k\pi}, e^{(2k+1)\pi}[$. Ez pedig mindig nagyobb, mint 0, tehát meghatároztuk az értelmezési tartományt. A sin értékkészlete $]0, 1]$, ezért az értékkészlete: $\ln\sin\ln$-nek $]-\infty, 0]$.

3. Határozzuk meg az $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ racionális egész függvény (polinom) együtthatóit, ha $f(-1) = 0,\ f(0) = 2\ f(1) = -3\ f(2) = 5$.

   Megoldás
   $0 = f(-1) = -a+b-c+d$, $2 = f(0) = d$, $-3 = f(1) = a+b+c+d$ és $5 = f(2) = 8a+4b+2c+d$ egyenletrendszert kell megoldanunk, ami a következő lesz:
   $$a = \frac{10}{3},\ b = -\frac{7}{2},\ c = -\frac{29}{6} \text{ és } d = 2.$$

4. Számítsuk ki az alábbi függvények határértékét:
   a) $\lim_{x\to1} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$ b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$ c) $\lim_{x\to0} \frac{x^7+5x^6+x^3}{x^7+2x^3}$
   d) $\lim_{x\to1}(\frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1})$ e) $\lim_{x\to2}(\frac{2}{2x-x^2} + \frac{1}{x^2-3x+2})$ f) $\lim_{x\to6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$

   Megoldás
   4) a) $\lim_{x\to1} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1} = \lim_{x\to1} x+5 = 6$,
   4) b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{4}{x}-\frac{5}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} = 1$,
   4) c) $\lim_{x\to0} \frac{x^7+5x^6+x^3}{x^7+2x^3} = \lim_{x\to0} \frac{1+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^4}}{1+\frac{2}{x^4}} = \frac{1}{2}$,
   4) d) $\lim_{x\to1}(\frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1}) = \lim_{x\to1} \frac{3-1-x-x^2}{1-x^3} = \lim_{x\to1} \frac{2-x-x^2}{1-x^2} = \lim_{x\to1} \frac{(1-x)(2+x)}{(1-x)(1+x+x^2)} =$
   $= \lim_{x\to1} \frac{2+x}{1+x+x^2} = \frac{3}{3} = 1$,
   4) e) $\lim_{x\to2}(\frac{2}{2x-x^2} + \frac{1}{x^2-3x+2}) = \lim_{x\to2}(\frac{2}{x(-x+2)} + \frac{1}{(x-2)(x-1)}) = \lim_{x\to2}(\frac{-2(x-1)+x}{x(x-2)(x-1)}) =$
   $= \lim_{x\to2} \frac{2-x}{x(x-2)(x-1)} = \lim_{x\to2} \frac{-1}{x(x-1)} = -\frac{1}{2}$
   4) f) A következő gyakon.