

Hatodik-hetedik gyakorlat

1. Határozzuk meg, ha lehetséges, az a és b paramétereket úgy, hogy a következő függvények folytonosak legyenek:

- a) $f(x) = \{x \sin(x), \text{ ha } x \neq 0 \text{ és } a, \text{ ha } x = 0;$
 b) $f(x) = \left\{ \frac{1+x}{1+x^3}, \text{ ha } x \neq -1 \text{ és } a, \text{ ha } x = -1;$
 c) $f(x) = \{ax^2 + 1, \text{ ha } x > 0 \text{ és } -x, \text{ ha } x \leq 0;$
 d) $f(x) = \{(x-1)^3, \text{ ha } x \leq 0, ax + b, \text{ ha } 0 < x < 1 \text{ és } \sqrt{x}, \text{ ha } 1 \leq x.$

2. Számoljuk ki a bal és jobb oldali határértékeket a megadott pontokban.

- a) $f(x) = \{-2x + 3, \text{ ha } x \leq 1 \text{ és } 3x - 5, \text{ ha } 1 < x;$ az $x_0 = 1, 2$ pontokban;
 b) $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|};$ az $x_0 = 1, 2$ pontokban.

3. Mely pontban folytonosak a következő függvények:

- a) $f(x) = \frac{1}{2-x} - 3x;$ b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4x+3};$ c) $f(x) = \frac{\cos(x)}{x};$ d) $f(x) = \sqrt{2x+3}.$

4. Igazoljuk, hogy a függvénynek a megadott helyen van folytonos kiterjesztése:

- a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}, x = 1;$ b) $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{2x-6}, x = 3;$ c) 1.) b), $x = -1.$

5. Határozzuk meg a következő határértékeket:

- a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+1}{5x+4};$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+1}{3x+9};$ c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-x+1}{6x^2+3x+2};$ d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1};$
 e) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2};$ f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10}-1}{x-1};$ g) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4};$ h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2-x+1}{6x^2+3x+2}$

6. Számítsuk ki a következő függvények határértékeit:

- a) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6};$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3+3x}};$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x};$
 d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1};$ e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} + \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x});$ f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}).$

7. Határozzuk meg a következő határértékeket:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x};$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)};$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(4x)}{\sin(x)};$
 d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)};$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sin(6x)-\sin(7x)};$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}.$

8. Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^{7x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{3x}}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x+2}{x-1})^{1+2x}$
 d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x}{2x+1})^x$ e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7})^x$ f) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+3 \tan(x))^{ctg(x)}$

9. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját:

- a) $x^2 + 4x + 5 + \frac{1}{x};$ b) $\frac{1}{x^2} + \frac{4x+3}{x^7} + \sin(x);$ c) $e^x + \ln(x) + 10^x + \log_2(x).$

10. Határozzuk meg a következő függvények deriváltait:

- a) $\frac{2x+5}{3x-4};$ b) $(1-x)(1+x^2)^{-1};$ c) $\frac{1+x-\sqrt{x}}{x};$
 d) $\frac{1}{x^2+x+1};$ e) $x^3 e^x;$ f) $(x^3 + e^{-x}) \sin(x).$

11. Bizonyítsuk be, hogy ha f, g és h függvények deriválhatóak, akkor fgh is deriválható (ahol $fgh(x) = f(g(h(x)))$) és a következő alakot veszi fel: $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'.$

12. Számítsuk ki a dy/dx függvényt:

- a) $y = -10x + 3 \cos(x)$ b) $y = \frac{1}{\sin(x)} - 4\sqrt{x} + 7$ c) $y = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{\tan(x)}$
 d) $y = \tan(x) - x$ e) $y = \frac{\sin(x)+1}{\sin(x)-1}$ f) $y = \frac{1}{\sin(x) \cos(x)}$