Hatodik-hetedik gyakorlat

1. Határozzuk meg, ha lehetséges, az a és b paramétereket úgy, hogy a következő függvények folytonosak legyenek:
   a) $f(x) = \{x\sin(x)$, ha $x \neq 0$ és a, ha $x = 0$;
   b) $f(x) = \{\frac{1+x}{1+x^3}$, ha $x \neq -1$ és a, ha $x = -1$;
   c) $f(x) = \{ax^2 + 1$, ha $x > 0$ és $-x$, ha $x \leqslant 0$;
   d) $f(x) = \{(x-1)^3$, ha $x \leqslant 0$, $ax + b$, ha $0 < x < 1$ és $\sqrt{x}$, ha $1 \leqslant x$.

   Megoldás

   1) a) Az $x\sin(x)$ két folytonos függvény szorzata, ezért folytonos, ezért csak azt kell ellenőriznünk, hogy $x = 0$ pontban folytonos-e. **Egy függvény folytonos az x_0 pontban, ha a bal és jobb oldali határérték megegyezik a függvény helyettesítési értékével.** Ezért meg kell néznünk: $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = f(0)$ (mindkettő egyenlőségnek teljesülnie kell).
   $f(0) = a$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} x\sin(x) = 0$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} x\sin(x) = 0$. Ezért az $a = 0$ választás esetén a függvény folytonos.
   1) b) $\frac{1+x}{1+x^3}$ függvény az $x = -1$ ponton kívül folytonos lesz.
   Nézzük $lim_{x\to -1-}\frac{1+x}{1+x^3} = lim_{x\to -1-}\frac{1}{1-x+x^2} = \frac{1}{3}$, $lim_{x\to -1+}\frac{1+x}{1+x^3} = lim_{x\to -1+}\frac{1}{1-x+x^2} = \frac{1}{3}$, $f(-1) = a$. Tehát $a = \frac{1}{3}$ esetén folytonos lesz a függvény.
   1) c) Az $ax^2 + 1$ és $-x$ folytonos függvények, most nézzük a bal és jobb oldali határértékeket: $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} ax^2 + 1 = 1$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} -x = 0$. Ezért az f függvény semmiképpen sem lesz folytonos.
   1) d) $\sqrt{x}$, $(x-1)^3$ és $ax + b$ függvények folytonosak, ezért a folytonosságot csak az $x = 0$ és $x = 1$ pontban kell ellenőrizni. $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-}(x-1)^3 = -1$, $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} ax + b = b$ és $f(0) = (0-1)^3 = -1$ Tehát $b = -1$ esetén az $x = 0$ pontban a függvény folytonos lesz.
   $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} ax + b = -a + b = -a - 1$, $\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \sqrt{x} = 1$ és $f(1) = \sqrt{1} = 1$, ezért folytonos lesz az $x = 1$ pontban is, ha $-a - 1 = 1$ teljesül. Ezért $a = -2$ és $b = -1$ esetén a függvény folytonos lsz.

2. Számoljuk ki a bal és jobb oldali határértékeket a megadott pontokban.
   a) $f(x) = \{-2x + 3$, ha $x \leqslant 1$ és $3x - 5$, ha $1 < x$; az $x_0 = 1, 2$ pontokban;
   b) $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}$; az $x_0 = 1, 2$ pontokban.

   Megoldás

   2) a) $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} -2x + 3 = 1$, $\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} 3x - 5 = -2$
   $\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} 3x - 5 = 1$, $\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} 3x - 5 = 1$.
   2) b) $\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1-} \frac{(x-1)(x+1)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1-} -(x+1) = -2$,
   $\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1+} \frac{(x-1)(x+1)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1+}(x+1) = 2$
   $\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to 2-} \frac{x^2-1}{|x-1|} = 3$, $\lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2+} \frac{x^2-1}{|x-1|} = 3$.

3. Mely pontban folytonosak a következő függvények:
   a) $f(x) = \frac{1}{2-x} - 3x$; b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4x+3}$; c) $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$; d) $f(x) = \sqrt{2x+3}$.

   Megoldás

   3) a) Folytonos függvények összege folytonos lesz, az egész értelmezési tartományán folytonos lesz, azaz $\mathbb{R} \setminus \{2\}$
   3) b) Két folytonos függvény hányadosa folytonos lesz az értelmezési tartományon, azaz $\mathbb{R}\setminus\{1, 3\}$.
   3) c) Ugyanúgy, mint előbb $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   3) d) Ugyanúgy, mint előbb $]-1.5, \infty[$.

4. Igazoljuk, hogy a függvénynek a megadott helyen van folytonos kiterjesztése:
   a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $x = 1$; b) $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{2x-6}$, $x = 3$; c) 2.) b), $x = -1$.

   Megoldás

   Létezik folytonos kiterjesztése a függvénynek az $x = 1$ pontban, ha bal és jobb oldali határérték megegyezik.
   4) a) $\lim_{x\to 1+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1+} x + 1 = 2$, $\lim_{x\to 1-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1-} x + 1 = 2$. Tehát az $f(x)$

függvényt ki kell terjesztenünk az $x = 1$ pontra (nincs az értelmezési tartományban). Ezért ha $f(1) = 2$, akkor a függvény folytonos lesz.
4) b) $\lim_{x\to 3-} \frac{x^2-2x-3}{2x-6} = \lim_{x\to 3-} \frac{x+1}{2} = 2$, $\lim_{x\to 3+} \frac{x^2-2x-3}{2x-6} = \lim_{x\to 3-+} \frac{x+1}{2} = 2$, ezért ha $f(3) = 2$ esetén a függvény folytonos lesz.
4) c) Már kiszámoltuk, hogy a bal és jobb oldali határértéke megegyezik, és az értéke 3. Ezért $f(1) = 3$ értékkel a függvény folytonosan kiterjeszthető.

5. Határozzuk meg a következő határétékeket:
   a) $\lim_{x\to 2} \frac{3x+1}{5x+4}$; b) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x+1}{3x+9}$; c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-x+1}{6x^2+3x+2}$; d) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$;
   e) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$; f) $\lim_{x\to 1} \frac{x^{10}-1}{x-1}$; g) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$; h) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-x+1}{6x^2+3x+2}$

Megoldás
5) a)$\lim_{x\to 2} \frac{3x+1}{5x+4} = \frac{3*2+1}{5*2+4} = \frac{7}{9}$
5) b) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x+1}{3x+9} = \lim_{x\to\infty} \frac{5+\frac{1}{x}}{3+\frac{9}{x}} = \frac{5}{3}$
5) c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-x+1}{6x^2+3x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{6+\frac{3}{x}+2} = \frac{1}{2}$
5) d) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+5)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+5}{x+1} = \frac{7}{3}$
5) e) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2 = 4$
5) f) $\lim_{x\to 1} \frac{x^{10}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \sum_{i=0}^{9} x^i = 10$
5) g) $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} * \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$
5) h) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-x+1}{6x^2+3x+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{6+3\frac{1}{x}+2\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$

6. Számítsuk ki a következő függvények határértéket:
   a) $\lim_{x\to 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$; b) $\lim_{x\to-1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$; c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$;
   d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$; e) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$; f) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

Megoldás
6) a) $\lim_{x\to 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6} = \lim_{x\to 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6} \frac{\sqrt{x-2}+2}{\sqrt{x-2}+2} = \lim_{x\to 6} \frac{x-2-4}{(x-6)(\sqrt{x-2}+2)} = \lim_{x\to 6} \frac{1}{\sqrt{x-2}+2} = \frac{1}{4}$
6) b) $\lim_{x\to-1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x} = \lim_{x\to-1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x} \frac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{\sqrt{6x^2+3}-3x} = \lim_{x\to-1} \frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3}+3x)}{6x^2+3-9x^2} =$
$= \lim_{x\to-1} \frac{\sqrt{6x^2+3}+3x}{-3x+3} = \frac{\sqrt{6(-1)^2+3}-3}{3+3} = 0$
6) c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x} \frac{\sqrt[3]{1+x}^2+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{1-x}^2}{\sqrt[3]{1+x}^2+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{1-x}^2} =$
$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt[3]{1+x}^2+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{1-x}^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(\sqrt[3]{1+x}^2+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{1-x}^2)} =$
$\lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt[3]{1+x}^2+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{1-x}^2} = \frac{2}{3}$
6) d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1} \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} =$
$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1+x^2)}{(1+x)-1} \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x-x^2}{x} \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to 0}(1-x) \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = 1$
6) e) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}) \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} =$
$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$
6) f) $\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}) = \lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}) \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} =$
$\lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2+1)+(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\infty$

7. Határozzuk meg a következő határértékeket:
   a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x}$; b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}$; c) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(4x)}{\sin(x)}$;
   d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}$; e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sin(6x)-\sin(7x)}$; f) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}$.

Megoldás

7) a) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}3 = 3$

7) b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}\frac{\beta x}{\sin(\beta x)}\frac{\beta x}{\alpha x} = \frac{\beta}{\alpha}$

7) c) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(4x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(4x)}{4x}\frac{x}{\sin(x)}\frac{1}{4*\cos(4x)} = \frac{1}{4}$

7) d) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{\sin^2(x)(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)(1+\cos(x))} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos(x)} = 1$

7) e) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(6x)-\sin(7x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(6x)}{\sin(x)} - \frac{\sin(7x)}{\sin(x)} = 6-7 = 1$

7) f) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(2x)}{x^2}\frac{1+\cos(2x)}{1+\cos(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(2x)}{x^2(1+\cos(2x))} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(2x)}{x^2}\frac{1}{1+\cos(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(2x)}{4x^2}\frac{2}{1+\cos(2x)} = 2$

8. Számítsuk ki az alábbi határértékeket:

a) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{7x}$ b) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{3x}}$ c) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+2}{x-1})^{1+2x}$

d) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{2x+1})^{x}$ e) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7})^{x}$ f) $\lim_{x\to 0}(1+3\tan(x))^{ctg(x)}$

Megoldás

8) a) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{7x} = \lim_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x})^{x}]^{7} = e^{7}$

8) b) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{3x}} = \lim_{x\to 0}[(1+x)^{\frac{1}{x}}]^{3} = e^{3}$

8) c) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+2}{x-1})^{1+2x} = \lim_{x\to\infty}[(1+\frac{3}{x-1})^{\frac{x-1}{3}}]^{\frac{3}{x-1}(1+2x)} = \lim_{x\to\infty}e^{\frac{3+6x}{x-1}} = e^{6}$

8) d) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{2x+1})^{x} = \lim_{x\to\infty}(\frac{1}{2}-\frac{0.5}{2x+1})^{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^x}(1-\frac{1}{2x+1})^{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^x}[(1-\frac{1}{2x+1})^{-(1+2x)}]^{\frac{-x}{1+2x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^x}e^{-\frac{1}{2}} = 0$

8) e) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7})^{x} = \lim_{x\to\infty}[(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7})^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}]^{\frac{8x-3}{x^2-3x+7}x} = \lim_{x\to\infty}e^{\frac{8x^2-3x}{x^2-3x+7}} = e^{8}$

8) f) $\lim_{x\to 0}(1+3\tan(x))^{ctg(x)} = \lim_{x\to 0}[(1+3\tan(x))^{\frac{\cos(x)}{3\sin(x)}}]^{3} = e^{3}$

9. Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltját:

a) $x^2+4x+5+\frac{1}{x}$;   b) $\frac{1}{x^2}+\frac{4x+3}{x^7}+\sin(x)$;   c) $e^x+\ln(x)+10^x+\log_2(x)$.

10. Határozzuk meg a következő függvények deriváltait:

a) $\frac{2x+5}{3x-4}$;   b) $(1-x)(1+x^2)^{-1}$;   c) $\frac{1+x-\sqrt{x}}{x}$;

d) $\frac{1}{x^2+x+1}$;   e) x^3e^x;   f) $(x^3+e^{-x})\sin(x)$.

11. Bizonyítsuk be, hogy ha f, g és h függvények deriválhatóak, akkor fgh is deriválható (ahol $fgh(x) = f(g(h(x)))$) és a következő alakot veszi fel: $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.

12. Számítsuk ki a dy/dx függvényt:

a) $y = -10x+3\cos(x)$ b) $y = \frac{1}{\sin(x)} - 4\sqrt{x}+7$ c) $y = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{tan(x)}$

d) $y = \tan(x) - x$ e) $y = \frac{\sin(x)+1}{\sin(x)-1}$ f) $y = \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}$