Nyolcadik gyakrolat

1. **Ismétlés** Elemi függvények deriváltjai, és deriválási szabályok $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$, $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$, $\frac{f}{g} = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
   - $(x^n)' = nx^{n-1}$
   - $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$
   - $(e^x)' = e^x$ és $(a^x)' = (e^{\ln(a)x})' = e^{\ln(a)x}(\ln(a)x)' = a^x \ln(a)$
   - $(\log_a(x))' = (\frac{\ln(x)}{\ln(a)})' = \frac{\ln(x)'}{\ln(a)} = \frac{1}{x\ln(a)}$
   - $\tan(x)' = (\frac{\sin(x)}{\cos(x)})' = \frac{\cos(x)\cos(x) - (-\sin(x))\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$

   Inverz függvényderiválási szabálya: $(f^{-1}(f(x)))' = \frac{1}{f'(x)}$. Például:
   $\arccos(\cos(x))' = \frac{1}{-\sin(x)}$, tehát $\arccos(y)' = \frac{1}{-\sqrt{1-y^2}}$
   $\arctan(\tan(x))' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \cos^2(x)$, $\arctan(y)' = \frac{1}{1+y^2}$ $(\tan^2(x) + 1 = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)})$

2. **Ismétlés** Határéréték számolási módszerek felelevenítése. A határértékeket helyettesítéssel oldjuk meg, kívétel, ha "$\frac{\infty}{\infty}$", "$\frac{0}{0}$", "$\infty - \infty$","1^∞" alakú. Ekkor a következő módszereket tanultuk:

   - "Legnagyobb kitevőjű hatvánnyal leosztunk." Példák
     $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3+4x^2+3x+2}{4x^3+3x^2+2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{5\frac{x^3}{x^3}+4\frac{x^2}{x^3}+3\frac{x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{4\frac{x^3}{x^3}+3\frac{x^2}{x^3}+2\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \frac{5}{4}$
     $\lim_{x\to\infty} \frac{6x^4+5x^3+4x^2+3x+2}{4x^3+3x^2+2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4\frac{x^4}{x^3}+5\frac{x^3}{x^3}+4\frac{x^2}{x^3}+3\frac{x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{4\frac{x^3}{x^3}+3\frac{x^2}{x^3}+2\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \infty$
     $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3+4x^2+3x+2}{5x^4+4x^3+3x^2+2x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{5\frac{x^3}{x^3}+4\frac{x^2}{x^3}+3\frac{x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{5\frac{x^4}{x^3}+4\frac{x^3}{x^3}+3\frac{x^2}{x^3}+2\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = 0$
     De ne feledkezzünk meg, hogy ez a "∞/∞" típusúra vonatkozik.
     $\lim_{x\to 0} \frac{5x^3+4x^2+3x+2}{4x^3+3x^2+2x+1} = 2$
     $\lim_{x\to 0} \frac{6x^4+5x^3+4x^2+3x+2}{4x^3+3x^2+2x+1} = 2$
     $\lim_{x\to 0} \frac{5x^3+4x^2+3x+2}{5x^4+4x^3+3x^2+2x+1} = 2$

   - "0/0" típusú véges értéknél vett határérékeknél polinomok esetében tudunk egyszerűsíteni. Előfordulhat, hogy egy középiskolában tanult azonossággal tudjuk visszavezetni a hányadost olyan alakra, ahol már tudunk egyszerűsíteni. Például $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$, ami nagyon hasonlít a komplex számmal való osztásnál használt módszerre.
     $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x-2} = 1$
     $\lim_{x\to 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6} = \lim_{x\to 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6} \frac{\sqrt{x-2}+2}{\sqrt{x-2}+2} = \lim_{x\to 6} \frac{x-2-4}{(x-6)(\sqrt{x-2}+2)} = \lim_{x\to 6} \frac{1}{\sqrt{x-2}+2} = \frac{1}{4}$
     $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x} = \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x} \frac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{\sqrt{6x^2+3}-3x} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(\sqrt{6x^2+3}+3x)}{6x^2+3-9x^2} =$
     $= \lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{6x^2+3}+3x}{-3x+3} = \frac{\sqrt{6(-1)^2+3}-3}{3+3} = 0$
     $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x} \frac{\sqrt[3]{1+x}^2+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{1-x}^2}{\sqrt[3]{1+x}^2+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{1-x}^2} =$
     $= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt[3]{1+x}^2+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{1-x}^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x(\sqrt[3]{1+x}^2+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{1-x}^2)} =$
     $\lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt[3]{1+x}^2+\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}+\sqrt[3]{1-x}^2} = \frac{2}{3}$
     A másik gyakran alkalmazott módszer, hogy a határérték $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$-re vagy $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1$-re vezethető vissza. (6-7. feladatsor 7 feladat)

   - $\infty - \infty$ típusút a 0/0-nál tárgyalt azonosságokkal lehet egyszerűsíteni.
     $\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) = \lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}) \frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} =$
     $\lim_{x\to -\infty} \frac{(x^2+1)+(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\infty$
     $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}) = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x}) \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} =$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}+\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = \lim_{x\to-\infty} (\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x}) \frac{\sqrt[3]{1+x}^2 - \sqrt[3]{(1+x)(1-x)} + \sqrt[3]{1-x}^2}{\sqrt[3]{1+x}^2 - \sqrt[3]{(1+x)(1-x)} + \sqrt[3]{1-x}^2} =$
$= \lim_{x\to-\infty} \frac{(1+x)+(1-x)}{\sqrt[3]{1+x}^2 - \sqrt[3]{(1+x)(1-x)} + \sqrt[3]{1-x}^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{1+x}^2 - \sqrt[3]{(1+x)(1-x)} + \sqrt[3]{1-x}^2} = 0$

- "1^∞"-en típusúnál vissza kell vezetni $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x$ és $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ alakúra.
  $\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7})^x = \lim_{x\to\infty}[(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7})^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}]^{\frac{8x-3}{x^2-3x+7}x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{8x^2-3x}{x^2-3x+7}} = e^8$

3. Használjuk a L'Hospital tételt a határérték kiszámítására.
   $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) \in \{0,\infty\}$ és $\lim_{x\to x_0} f(x), \lim_{x\to x_0} g(x) \in \{0,\infty\}$ létezik.

   a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$ c) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$ d) $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}$
   e) $\lim_{x\to\infty} \frac{xe^{x/2}}{e^x+x}$ f) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2)}{\sqrt{x}}$ g) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x\ln(x)}{e^x+x}$ h) $\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{1+\ln(\sin(x))}$
   i) $\lim_{x\to 0+} x\ln(x)$ j) $\lim_{x\to -\infty} x^2e^x$ k) $\lim_{x\to -\infty} e^x\ln(-x)$ l) $\lim_{x\to 0} \arcsin(x)ctg(x)$

   Megoldás
   3) a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \lim_{x\to 0} {}_1 2\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{2}$
   3) b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1$
   3) c) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$
   3) d) $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x} = \lim_{x\to -1} \frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{1+2x}^2}}{\frac{1}{2\sqrt{2+x}}+1} = \frac{2}{3}\cdot 3 = \frac{4}{9}$
   3) e) $\lim_{x\to\infty} \frac{xe^{x/2}}{e^x+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{x/2}+\frac{xe^{x/2}}{2}}{e^x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\frac{e^{x/2}}{2}+\frac{xe^{x/2}}{4}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} e^{-x/2} + \frac{xe^{-x/2}}{4} = \lim_{x\to\infty} \frac{xe^{-x/2}}{4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{4e^{x/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2e^{x/2}} = \infty$
   3) f) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} 4\sqrt{x} = \infty$
   3) g) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x\ln(x)}{e^x+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x\ln(x)+\frac{e^x}{x}}{e^x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x\ln(x)+2\frac{e^x}{x}-\frac{e^x}{x^2}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \ln(x)+2\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2} = \infty$
   3) h) $\lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{1+\ln(\sin(x))} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x)}{x}\frac{1}{\cos(x)} = 1\cdot\frac{1}{1} = -1$
   3) i) $\lim_{x\to 0+} x\ln(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} -x = 0$
   3) j) $\lim_{x\to -\infty} x^2e^x = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0$
   3) k) $\lim_{x\to -\infty} e^x\ln(-x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{\ln(-x)}{e^{-x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-\frac{1}{-x}}{e^{-x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x\cdot e^{-x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{e^x}{1} = 0$
   3) l) $\lim_{x\to 0} \arcsin(x)ctg(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x)}{\tan(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\cos^2(x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} = 1$

4. Készítsük el az $f(x) = x^2\ln(x^2)$ függvény teljes vizsgálatát. Első lépésként megnézzük a függvény értelmezési tartományát. $D(f(x)) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Ezután a függvény határértékét az értelmezési tartomány szélén:
   $\lim_{x\to-\infty} x^2\ln(x^2) = \lim_{x\to\infty} x^2\ln(x^2) = \infty$, $\lim_{x\to 0-} x^2\ln(x^2) = \lim_{x\to 0+} x^2\ln(x^2) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x^2)}{x^{-2}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{2x}{x^2}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0+} -\frac{x\cdot x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0+} -x^2 = 0$
   Ránézésre látjuk, hogy páros függvény. (x^2 páros függvény, és ennek egy függvény.)
   $f'(x) = 2x\ln(x^2) + \frac{x^2}{x^2}2x = 2x\ln(x^2) + 2x$. Ebből meghatározzuk a szélsőértékeinek a helyét $0 = 2x\ln(x^2) + 2x = 2x(\ln(x^2) + \ln(e)) = 2x\ln(e\cdot x^2)$. Tehát az $x = 0$ és $e\cdot x^2 = 1$, azaz $x = \pm e^{-1/2}$ helyen tűnik el a detivált, mivel az $x = 0$-nál nincs értelmezve sem a függvény, sem a derivált függvény. ($f(-e^{-\frac{1}{2}}) = f(e^{-\frac{1}{2}}) = e^{-1}\ln(e^{-1}) = -e^{-1}$).

	$x < -e^{-\frac{1}{2}}$	$x = -e^{-\frac{1}{2}}$	$-e^{-\frac{1}{2}} < x < 0$	$0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$	$x = e^{-\frac{1}{2}}$	$e^{-\frac{1}{2}} < x$
f'(x)	-	0	+	-	0	+
f'(x)	mon. csökk.	lok. min.	mon. nő	mon. csökk.	lok. min.	mon. nő

Ebből tudjuk, hogy az értékkészlete az $f(x)$ függvénynek $R(f) = [-e^{-1}, \infty[$, és az $x = \pm e^{-1/2}$ helyeken abszolút minimum hely van. ($f(e(-1/2) = f(-e(-1/2) = -e^{-1}$)
$f''(x) = (2x(\ln(x^2)+1))' = 2(\ln(x^2)+1) + 2x(\frac{2x}{x^2}) = 2\ln(x^2) + 6 = 2\ln(x^2 \cdot e^3)$ Ebből pedig meghatározhatjuk az inflexiós pontokat $\ln(x^2 \cdot e^3) = 0$ egyenletből: $x^2 \cdot e^3 = 1$, amit tovább alakítva: $x = \pm e^{-3/2}$.

	$x < -e^{-\frac{3}{2}}$	$x = -e^{-\frac{3}{2}}$	$-e^{-\frac{3}{2}} < x < 0$	$0 < x < e^{-\frac{3}{2}}$	$x = e^{-\frac{3}{2}}$	$e^{-\frac{3}{2}} < x$
f"(x)	+	0	-	-	0	+
f(x)	konvex	infl. p.	konkáv	konkáv	infl. p.	konvex

Mivel $\lim_{x\to-\infty} x^2\ln(x^2) = \lim_{x\to\infty} x^2\ln(x^2) = \infty$, ezért meghatározhatunk hozzá aszimptotát. Az aszimptota meghatározásához számoljuk ki a következő határértékeket:
$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\ln(x^2)}{x} = \lim_{x\to-\infty} x\ln(x^2) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^{-1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to-\infty} -2x = \infty$, $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2\ln(x^2)}{x} = \lim_{x\to\infty} x\ln(x^2) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^{-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to\infty} -2x = -\infty$.
Ezért nincsenek "valódi" aszimptotája a függvénynek.

5. Számítsuk ki az összes aszimptotáját a következő függvényeknek:
   a) $f(x) = \frac{x^2-2x}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ c) $f(x) = 3\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$ d) $f(x) = \sqrt{x^2+3x-1}$

Megoldás

5) a) Értelmezési tartomány szélei: $\{-\infty, 1-, 1+, \infty\}$.
$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x^2-2x}{x-1}}{x} = \lim_{x\to infty} \frac{x-2}{x-1} = 1$
$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2-2x}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x-1} = 1$
$\lim_{x\to1-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to1-} \frac{\frac{x^2-2x}{x-1}}{x} = \lim_{x\to1-} \frac{x-2}{x-1} = \infty$
$\lim_{x\to1+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to1+} \frac{\frac{x^2-2x}{x-1}}{x} = \lim_{x\to1+} \frac{x-2}{x-1} = -\infty$
Ekkor az $x = 1$ aszimptota lesz. ((1,0) ponton átmenő végtelen meredekségű egyenes.)
Ferde aszimptoták simulnak a $\infty, -\infty$-hez. A már kiszámított meredekséget jelöljük $m_{-\infty}$, m_∞-tel. Ami MOST megegyezik és értékük 1!
$\lim_{x\to-\infty} f(x) - m_{-\infty}x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x}{x-1} - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{x-1} = -1$
$\lim_{x\to-\infty} f(x) - m_\infty x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x}{x-1} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-2x-x^2+x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{x-1} = -1$
Tehát az $x = 1$-en kívül van egy (két) aszimptotánk, amit $y = 1 \cdot x - 1$ egyenes határoz meg.