Kilencedik-tizedik gyakrolat

1. Számítsuk ki a következő egyszerű integrálokat:

   a) $\int x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}+5\sin(6x)-2^x dx$ b) $\int \cos(x)-3\sqrt[3]{x}+\frac{x^2+1}{2x}dx$ c) $\int \frac{4e^{3x}-e^{-x}}{e^{2x}}dx$ d) $\int \mathrm{tg}^2(x)dx$

   Megoldás

   1) a) $\int x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}+5\sin(6x)-2^x dx=\int x^2dx+\int x^{-1/2}dx+\int 5\sin(6x)-2^xdx=\frac{x^3}{3}+2\cdot x^{1/2}-\frac{5}{6}\cos(6x)-\frac{2^x}{\ln(2)}+C$, mert $\ln(2)2^x=(2^x)'$, így $\ln(2)\int 2^xdx/=\int(2^x)'dx=2^x+C$.

   1) b) $\int \cos(x)-3\sqrt[3]{x}+\frac{x^2+1}{2x}dx=\int\cos(x)dx-3\int x^{1/3}dx+\int\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}dx=-\sin(x)-3\cdot\frac{3}{4}x^{4/3}+\frac{x^2}{4}+\frac{\ln(2x)}{2}+C$

   1) c) $\int\frac{4e^{3x}-e^{-x}}{e^{2x}}dx=\int\frac{4e^{3x}}{e^{2x}}-\frac{e^{-x}}{e^{2x}}dx=\int 4e^x-e^{-3x}dx=4e^x-\frac{1}{-3}e^{-3x}+C$

   1) d) $\int\mathrm{tg}^2(x)dx=\int\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}dx=\int\frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)}dx=\int\frac{1}{\cos^2(x)}-\frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)}dx=\mathrm{tg}(x)-x+C$

2. Határozzuk meg a következő függvények integrálját az $y=ax+b$ helyettesítéssel vagy $\int f(ax+b)dx=\frac{F(ax+b)}{a}+C$ szabállyal.

   a) $\int(2x+9)^7dx$ b) $\int\frac{1}{\sqrt[5]{3-6x}}dx$ c) $\int\cos(7x+\pi)dx$ d) $\int\frac{dx}{\sin^2(\pi-3x)}$

   Megoldás

   2) a) $\int(2x+9)^7dx=\frac{(2x+9)^8}{8\cdot 2}+C$, hiszen $f(x)=x^7$, primitív függvénye az $F(x)=\frac{x^8}{8}$, és $a=2$; VAGY $\int(2x+9)^7dx=\int(y)^7\frac{dy}{2}=\frac{1}{2}\int y^7dy=\frac{1}{2}\cdot\frac{y^8}{8}+C=\frac{(2x+9)^8}{8\cdot2}+C$, mert $y=2x+9$, így $\frac{dy}{dx}=2$, ebből $dx=\frac{dy}{2}$.

   2) b) $\int\frac{1}{\sqrt[5]{3-6x}}dx=\frac{(3-6x)^{4/5}}{\frac{4}{5}\cdot-6}+C=-5\frac{(3-6x)^{4/5}}{24}+C$, hiszen $f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{x}}=x^{-1/5}$, primitív függvénye az $F(x)=\frac{5}{4}x^{4/5}$ és $a=-6$; VAGY

   $\int\frac{1}{\sqrt[5]{3-6x}}dx=\int(3-6x)^{-1/5}dx=\int y^{-1/5}\frac{dy}{-6}=\frac{1}{-6}\int y^{-1/5}dy=\frac{1}{-6}\cdot\frac{y^{4/5}}{4/5}+C=-5\frac{(3-6x)^{4/5}}{24}+C$.

   2) c) $\int\cos(7x+\pi)dx=\frac{\sin(7x+\pi)}{7}+C$, hiszen $f(x)=\cos(x)$, primitív függvénye az $F(x)=\sin(x)$ és $a=7$; VAGY

   $\int\cos(7x+\pi)dx=\int\cos(y)\frac{dy}{7}=\frac{1}{7}\int\cos(y)dy=\frac{1}{7}\sin(y)+C=\frac{\sin(7x+\pi)}{7}+C$.

   2) d) $\int\frac{dx}{\sin^2(\pi-3x)}=-\int\frac{-1}{\sin^2(\pi-3x)}dx=-\frac{\mathrm{ctg}(\pi-3x)}{-3}+C$, hiszen $f(x)=\frac{-1}{\sin^(x)}$, primitív függvénye az $F(x)=\mathrm{ctg}(x)$ és $a=-3$; VAGY

   $\int\frac{dx}{\sin^2(\pi-3x)}=-\int\frac{-1}{\sin^2(\pi-3x)}dx=-\int\frac{-1}{\sin^2(y)}\frac{dy}{-3}=\frac{1}{3}\int\frac{-1}{\sin^2(x)}dy=\frac{1}{3}\mathrm{ctg}(y)+C=\frac{1}{3}\mathrm{ctg}(\pi-3x)+C$.

3. Alkalmazzuk az $\int\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln|f(x)|+c$ integrálási szabályt.

   a) $\int\frac{2x+3}{x^2+3x+5}$ b) $\int\mathrm{ctg}(x)dx$ c) $\int\mathrm{tg}(3x)dx$ d) $\int\frac{e^{2x}}{3+e^{2x}}+\frac{x^3}{x^4+7}dx$ e) $\int\frac{dx}{x\ln(x)}$

   Megoldás 3) a) $\int\frac{2x+3}{x^2+3x+5}=\ln|x^2+3x+5|+C$, ahol $f(x)=x^2+3x+5$, és $f'(x)=2x+3$; VAGY $\int\frac{2x+3}{x^2+3x+5}=\int\frac{2x+3}{y}\frac{dy}{2x+3}=\int dyy=\ln|y|+C=\ln|2x+3|+C$, ahol $y=x^2+3x+5$, $\frac{dy}{dx}=2x+3$.

   3) b) $\int\mathrm{ctg}(x)dx=\int\frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx=\ln|\sin(x)|+C$

   3) c) $\int\mathrm{tg}(3x)dx=\int\frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx=-\int\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}dx=-\ln|\cos(x)|+C$

   3) d) $\int\frac{e^{2x}}{3+e^{2x}}+\frac{x^3}{x^4+7}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2e^{2x}}{3+e^{2x}}dx+\frac{1}{4}\int\frac{4x^3}{x^4+7}dx=\frac{1}{2}\ln|3+e^{2x}|+\frac{1}{4}\ln|x^4+7|+C$

   3) e) $\int\frac{dx}{x\ln(x)}=\int\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}dx=\ln|\ln(x)|+C$

4. Alkalmazzuk az $\int f'(x)f^\alpha(x)dx=\frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+C$ szabályt. ($\alpha\neq-1$)

   a) $\int\sin^4(x)\cos(x)dx$ b) $\int x\sqrt{x^2+1}dx$ c) $\int\frac{\ln(x)}{x}dx$ d) $\int\frac{\sqrt{\mathrm{tg}(x)}}{\cos^2(x)}$ e) $\int\frac{e^{-x}}{(3+e^{-x})^6}$

   Megoldás

   4) a) $\int\sin^4(x)\cos(x)dx=\frac{\sin^5(x)}{5}+C$

   4) b) $\int x\sqrt{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{1/2}dx=\frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3/2}+C$

   4) c) $\int\frac{\ln(x)}{x}dx=\int(\ln(x))^1\frac{1}{x}dx=\frac{\ln^2(x)}{2}+C$

   4) d) $\int\frac{\sqrt{\mathrm{tg}(x)}}{\cos^2(x)}=\int(\mathrm{tg}(x))^{1/2}\frac{1}{\cos^2(x)}=\frac{\mathrm{tg}^{3/2}(x)}{3/2}+C$

   4) e) $\int\frac{e^{-x}}{(3+e^{-x})^6}=-\int -e^{-x}(3+e^{-x})^{-6}=-\frac{(3+e^{-x})^{-5}}{-5}+C=\frac{(3+e^{-x})^{-5}}{5}+C$

5. Parciális integrálással határozzuk meg a következőket:

a) $\int x\sin(2x)dx$ b) $\int \frac{x}{e^{2x}}dx$ c) $\int (x^2+3)e^{4x}dx$ d) $\int e^{3x}\cos(2x)dx$

e) $\int \sin(3x)\sin(7x)dx$ f) $\int \ln(5x)dx$ g) $\int x^2\ln(x)dx$ h) $\int \cos^3(x)\sin^2(x)dx$

Megoldás

Első típus

5) a) $\int x\sin(2x)dx = -\frac{x}{2}\cos(2x) - \int -\frac{\cos(2x)}{2}dx = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\int \cos(2x)dx = -\frac{x}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}\frac{\sin(2x)}{2} + C$

$u = x, \Rightarrow u' = 1, v' = \sin(2x) \Rightarrow v = \frac{-\cos(2x)}{2}$

5) b) $\int \frac{x}{e^{2x}}dx = -x\frac{e^{2x}}{2} - \int -\frac{e^{2x}}{2}dx = -\frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{-2} + C$

$u = x \Rightarrow u' = 1, v' = e^{-2x} \Rightarrow v = -\frac{e^{-2x}}{2}$

5) c) $\int (x^2+3)e^{4x}dx = (x^2+3)\frac{e^{4x}}{4} - \int 2x\frac{e^{4x}}{4}dx = e^{4x}\frac{x^2+3}{4} - \frac{2}{4}\int x\cdot e^{4x}dx$

$u = x^2+3 \Rightarrow u' = 2x, v' = e^{4x} \Rightarrow v = \frac{e^{4x}}{4}$

$\int x\cdot e^{4x}dx = x\frac{e^{4x}}{4} - \int \frac{e^{4x}}{4}dx = e^{4x}\frac{x}{4} - \frac{1}{4}\int e^{4x}dx = e^{4x}\frac{x}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{4x}}{4} + C$

$u = x \Rightarrow u' = 1, v' = e^{4x} \Rightarrow v = \frac{e^{4x}}{4}$

$\int (x^2+3)e^{4x}dx = e^{4x}\frac{x^2+3}{4} - \frac{1}{2}[e^{4x}\frac{x}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{4x}}{4} + C] = e^{4x}\frac{x^2+3}{4} - e^{4x}\frac{x}{8} + \frac{e^{4x}}{16} + C = e^{4x}[\frac{x^2+3}{4} - \frac{x}{8} + \frac{1}{16}] + C$

Másik típus:

5) d) $\int e^{3x}\cos(2x)dx = \frac{\sin(2x)}{2} - \int 3e^{3x}\frac{\sin(2x)}{2}dx = \frac{\sin(2x)}{2} - \frac{3}{2}\int e^{3x}\sin(2x)dx$

$u = e^{3x}, \Rightarrow u' = 3e^{3x}, v' = \cos(2x) \Rightarrow v = \frac{\sin(2x)}{2}$

$\int e^{3x}\sin(2x)dx = -e^{3x}\frac{\cos(2x)}{2} - \int 3e^{3x}\frac{\cos(2x)}{-2}dx = -e^{3x}\frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{2}\int e^{3x}\cos(2x)dx =$

$u = e^{3x}, \Rightarrow u' = 3e^{3x}, v' = \sin(2x) \Rightarrow v = \frac{\cos(2x)}{-2}$

$$\int e^{3x}\cos(2x)dx = \frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{3}{2}[-e^{3x}\frac{\cos(2x)}{2} + \frac{3}{2}\int e^{3x}\cos(2x)dx]$$

$$\int e^{3x}\cos(2x)dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{3}{4}e^{3x}\cos(2x) - \frac{9}{4}\int e^{3x}\cos(2x)dx]$$

$$\frac{13}{4}\int e^{3x}\cos(2x)dx = \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{3}{4}e^{3x}\cos(2x)$$

$$\int e^{3x}\cos(2x)dx = \frac{2}{13}\sin(2x) + \frac{3}{13}e^{3x}\cos(2x)$$

5) e) $\int \sin(3x)\sin(7x)dx = \sin(3x)\frac{\cos(7x)}{-7} - \int 3\cos(3x)\frac{\cos(7x)}{-7}dx = -\frac{1}{7}\sin(3x)\cos(7x) + \frac{3}{7}\int \cos(3x)\cos(7x)dx$

$u = \sin(3x), \Rightarrow u' = 3\cos(3x), v' = \sin(7x) \Rightarrow v = \frac{\cos(7x)}{-7}$

$\int \cos(3x)\cos(7x)dx = \cos(3x)\frac{\sin(7x)}{7} - \int -3\sin(3x)\frac{\sin(7x)}{7}dx = \frac{1}{7}\cos(3x)\sin(7x) + \frac{3}{7}\int \sin(3x)\sin(7x)dx$

$u = \cos(3x), \Rightarrow u' = -3\sin(3x), v' = \cos(7x) \Rightarrow v = \frac{\sin(7x)}{7}$

$$\int \sin(3x)\sin(7x)dx = -\frac{1}{7}\sin(3x)\cos(7x) + \frac{3}{7}[\frac{1}{7}\cos(3x)\sin(7x) + \frac{3}{7}\int \sin(3x)\sin(7x)dx]$$

$$\int \sin(3x)\sin(7x)dx = -\frac{1}{7}\sin(3x)\cos(7x) + \frac{3}{49}\cos(3x)\sin(7x) + \frac{9}{49}\int \sin(3x)\sin(7x)dx]$$

$$\frac{40}{49}\int \sin(3x)\sin(7x)dx = -\frac{1}{7}\sin(3x)\cos(7x) + \frac{3}{49}\cos(3x)\sin(7x)$$

$$\int \sin(3x)\sin(7x)dx = -\frac{7}{40}\sin(3x)\cos(7x) + \frac{3}{40}\cos(3x)\sin(7x)$$

Harmadik típus

5) f) $\int \ln(5x)dx = \int \ln(5x)\cdot 1dx = \ln(5x)x - \int \frac{1}{5x}xdx = \ln(5x)x - \frac{1}{5}x + C$

$u = \ln(5x) \Rightarrow u' = \frac{1}{5x}\cdot 5 = \frac{1}{x}$ és $v' = 1 \Rightarrow v = x$

5) g) $\int x^2\ln(x)dx = \int \ln(x)x^2dx = \ln(x)\frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{x}\frac{x^3}{3}dx = \ln(x)\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\int x^2dx = \ln(x)\frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3} + C$

$u = \ln(x) \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$ és $v' = x^2 \Rightarrow v = \frac{x^3}{3}$

5) h) Elrettentő feladat: **Első lépésként "linearizáljuk"** $\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \Rightarrow \cos^3(x) = \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x)$ és $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = (1-\sin^2(x)) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x) \Rightarrow \sin^2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

$\int \cos^3(x)\sin^2(x)dx = \int (\frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\cos(x))(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x))dx = \int \frac{1}{8}\cos(3x) + \frac{3}{8}\cos(x) - \frac{1}{8}\cos(3x)\cos(2x) +$

$\frac{3}{8}\cos(x)\cos(2x)dx = \frac{1}{8}\frac{\sin(3x)}{3} + \frac{3}{8}\sin(x) - \frac{1}{8}\int\cos(3x)\cos(2x)dx + \frac{3}{8}\int\cos(x)\cos(2x)dx$

$\int\cos(ax)\cos(2x)dx = \cos(ax)\frac{\sin(2x)}{2} - \int -a\sin(ax)\frac{\sin(2x)}{2}dx = \frac{1}{2}\cos(ax)\sin(2x) + \frac{a}{2}\int\sin(ax)\sin(2x)dx$

$u = \cos(ax), \Rightarrow u' = -a\sin(ax), v' = \cos(2x) \Rightarrow v = \frac{\sin(2x)}{2}$

$\int\sin(ax)\sin(2x)dx = \sin(ax)\frac{\cos(2x)}{-2} - \int a\cos(ax)\frac{\cos(2x)}{-2}dx = -\frac{1}{2}\sin(ax)\cos(2x) + \frac{a}{2}\int\cos(ax)\cos(2x)dx$

$u = \sin(ax), \Rightarrow u' = a\cos(ax), v' = \sin(2x) \Rightarrow v = \frac{\cos(2x)}{-2}$

$$\int\cos(ax)\cos(2x)dx = \frac{1}{2}\cos(ax)\sin(2x) + \frac{a}{2}[-\frac{1}{2}\sin(ax)\cos(2x) + \frac{a}{2}\int\cos(ax)\cos(2x)dx]$$

$$\int\cos(ax)\cos(2x)dx = \frac{1}{2}\cos(ax)\sin(2x) - \frac{a}{4}\sin(ax)\cos(2x) + \frac{a^2}{4}\int\cos(ax)\cos(2x)dx]$$

$$\frac{4-a^2}{4}\int\cos(ax)\cos(2x)dx = \frac{1}{2}\cos(ax)\sin(2x) - \frac{a}{4}\sin(ax)\cos(2x)$$

$$\int\cos(ax)\cos(2x)dx = \frac{2}{4-a^2}\cos(ax)\sin(2x) - \frac{a}{4-a^2}\sin(ax)\cos(2x)$$

$$a = 3 \Rightarrow \int\cos(3x)\cos(2x)dx = \frac{2}{-5}\cos(-5x)\sin(2x) - \frac{3}{-5}\sin(-5x)\cos(2x)$$

$$a = 1 \int\cos(x)\cos(2x)dx = \frac{2}{3}\cos(x)\sin(2x) - \frac{1}{3}\sin(x)\cos(2x)$$

$\int\cos^3(x)\sin^2(x)dx = \frac{1}{8}\frac{\sin(3x)}{3} + \frac{3}{8}\sin(x) - \frac{1}{8}[\frac{2}{-5}\cos(-5x)\sin(2x) - \frac{3}{-5}\sin(-5x)\cos(2x)] + \frac{3}{8}[\frac{2}{3}\cos(x)\sin(2x) - \frac{1}{3}\sin(x)\cos(2x)] + C$

6. Parciális törtekre bontással határozzuk meg a következő integrálokat
   a) $\int\frac{1}{x^2-4}dx$ b) $\int\frac{dx}{x^2+x-6}$ c) $\int\frac{2x+3}{2x^2+x+3}$ d) $\int\frac{dx}{x^4-81}$

7. Oldjuk meg helyettesítéssel a következő integrálokat:
   a) $\int\sqrt{1-x^2}dx$ b) $\int\sqrt{a^2-x^2}dx$ c) $\int\sqrt{a^2+x^2}dx$ d) $\int\sqrt{5+3x^2}dx$

8. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat:
   a) $\int_0^1 xdx$ b) $\int_2^3\ln^2(x)dx$ c) $\int_3^4\frac{e^{7x+1}}{e^{2x}}dx$ d) $\int_6^7\frac{dx}{x\ln(x)}$