11. 10 és 11. 24. gyakrolat

1. Határozzuk meg az alábbi végtelen sorok összegét.
   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}-e^n}{e^{3n}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n+5^n}{6^{n+1}}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

2. Alkalmazzuk a gyök és hányadoskritériumokat annak eldöntésére, hogy alábbi sorok konvergálnak-e.
   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^{2n}}{3^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2010^n}{n^{2010}}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\frac{3}{n})^{n^2}$
   d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n+6^n}{3^n+7^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

3. Mely sorok lesznek könvergensek?
   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$
   e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+4}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3-4}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$
   i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}$ j) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ k) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{n+2}$ l) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

4. Döntsük el, hogy konvergensek-e?
   a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(0,1)^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3}{5+n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+4}$

5. Adjuk meg az alábbi sorok konvergenciasugarát és konvergenciaintervallumát.
   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{3/2}}$

Megoldás

5) a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+2}x^n$ egy hatványsor, ahol $a_n = \frac{n}{n+2}$ és $x_0 = 0$.
Konvergencia sugár megharározása: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n+2}} = 1$ a konvergencia sugár reciproka. Tehát a sugár 1. Így a konvergencia intervallum tartalmazza az $(-1, 1)$ nyílt intervallumot, és még el kell döntenünk, hogy $x = -1$ és $x = 1$ helyen konvergens-e a sorozat.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+2}(-1)^n \text{ és } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+2}$$

Az egyik sorozat sem konvergens, hiszen $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, a konvergenciának pedig szükséges feltétele, hogy nullához tartson.
A konvergencia intervallum a $(-1, 1)$ lesz.
5) b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^n$ egy hatványsor, ahol $a_n = \frac{1}{(2n)!}$ és $x_0 = 0$.
Konvergencia sugár megharározása: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty}(2n+2)(2n+1) = \infty$ a konvergencia sugár. Tehát a konvergenciaintervallum az egyész számegyenes, $\mathbb{R}$.
5) c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}x^n$ egy hatványsor, ahol $a_n = \frac{1}{n^2+1}$ és $x_0 = 0$.
Konvergencia sugár megharározása: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1} = 1$ a konvergencia sugár. Így a konvergencia intervallum tartalmazza az $(-1, 1)$ nyílt intervallumot, és még el kell döntenünk, hogy $x = -1$ és $x = 1$ helyen konvergens-e a sorozat.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}(-1)^n \text{ és } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

$x = -1$ esetén a sor Leibnitz típusú, és az a_n nullához tart, ezért tudjuk, hogy konvergens, a másikat pedig tudtuk majorálni. Ezért a konvergencia intervallum a $[-1, 1]$ lesz.
5) d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}x^n$ egy hatványsor, ahol $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}$ és $x_0 = 0$.
Konvergencia sugár megharározása: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(n+1)^2+3}}{\sqrt{n^2+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{(1+\frac{1}{n})^2+\frac{3}{n}}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}} = 1$ a konvergencia sugár. Így a konvergencia intervallum tartalmazza az $(-1, 1)$ nyílt intervallumot, és még el kell döntenünk, hogy $x = -1$ és $x = 1$ helyen konvergens-e a sorozat.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}}(-1)^n \text{ és } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{2n^2}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

$x = -1$ esetén a sor Leibnitz típusú, és az a_n nullához tart, ezért tudjuk, hogy konvergens, a másikat pedig tudtuk minorálni. A konvergencia intervallum a $[-1, 1)$ lesz.
5) e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{2n+1}}{n^{3/2}}(x-\frac{5}{4})^{2n+1}$ egy hatványsor, ahol $a_n = \frac{4^{2n+1}}{n^{3/2}}$ és $x_0 = \frac{5}{4}$.
Konvergencia sugár megharározása: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{3/2}}{4^{2n+1}}} = \frac{1}{16}$ a konvergencia sugár.

Így a konvergencia intervallum tartalmazza az $(\frac{5}{4}-\frac{1}{16},\frac{5}{4}+\frac{1}{16})=(\frac{19}{16},\frac{21}{16})$ nyílt intervallumot, és még el kell döntenünk, hogy $x=\frac{19}{16}$ és $x=\frac{21}{16}$ helyen konvergens-e a sorozat.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n+1}}{n^{3/2}}(\frac{-1}{16})^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 16^n}{n^{3/2}}(\frac{-1}{16})^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^n}{n^{3/2}} \text{ és } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n+1}}{n^{3/2}}(\frac{1}{16})^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 16^n}{n^{3/2}}(\frac{1}{16})^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^{3/2}}$$

$x=-1$ esetén a sor Leibnitz típusú, és az a_n nullához tart, ezért tudjuk, hogy konvergens. A másikra alkalmazzuk az integrál kritériumot:
$f(x)=\frac{4}{x^{3/2}}$ monoton csökkenő folytonos függvény és $\int_1^{\infty}\frac{4}{x^{3/2}}=[\frac{-8}{x^{1/2}}]_1^{\infty}=0-(-8)=8<\infty$. Ezért a vizsgált sor (azaz $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^{3/2}}$) konvergens. Ezért a konvergencia intervallum a $[\frac{19}{16},\frac{21}{16}]$ lesz.