1. FELADAT. Írjuk fel az adott P ponton átmenő és az adott iránnyal párhuzamos egyenes paraméteres és paramétermentes egyenletrendszerét!

1.1. Kérdés. $P(1,2,3)$, $\mathbf{v}=(2,-1,4)$.

1.1.1. Megoldás. $\mathbf{p}=\mathbf{p}_0+t\mathbf{v}$, így a $\mathbf{p}=(x,y,z)$ koordinátákra a paraméteres egyenletrendszer: $x=1+2t$, $y=2-t$, $z=3+4t$. A t paramétert kifejezve a paramétermentes egyenletrendszer: $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{4}$, ami természetesen pl. $2x-2=8-4y=z-3$ alakba is írható.

1.2. Kérdés. $P(-2,0,3)$, $\mathbf{v}=(0,2,1)$.

1.2.1. Megoldás. $\mathbf{p}=\mathbf{p}_0+t\mathbf{v}$, így a $\mathbf{p}=(x,y,z)$ koordinátákra a paraméteres egyenletrendszer: $x=-2$, $y=2t$, $z=3+t$. A t paramétert kifejezve a paramétermentes egyenletrendszer: $x=-2$, $\frac{y}{2}=\frac{z-3}{1}$

1.3. Kérdés. A P pont az origó, az irány az y-tengely.

1.3.1. Megoldás. $\mathbf{v}$=$\mathbf{j}$, $\mathbf{p}=\mathbf{p}_0+t\mathbf{v}$, így a $\mathbf{p}=(x,y,z)$ koordinátákra a paraméteres egyenletrendszer: $x=0$, $y=t$, $z=0$. A paramétermentes egyenletrendszer: $x=0$, $z=0$.

2. FELADAT. Adott két pont, A és B. Írjuk fel a két ponton átmenő egyenes paraméteres és paramétermentes egyenletrendszerét!

2.1. Kérdés. A két pont: $A(2,-1,3)$, $B(1,4,0)$.

2.1.1. Megoldás. A két pont helyvektorát $\mathbf{a}$-val, ill. $\mathbf{b}$-vel jelölve, az egyenes párhuzamos az $\mathbf{v}=\mathbf{a}-\mathbf{b}=(1,-5,3)$ vektorral. Az A pontot választva $\mathbf{p}_0$-nak $\mathbf{p}=\mathbf{a}+t\mathbf{v}$, így a $\mathbf{p}=(x,y,z)$ koordinátákra a paraméteres egyenletrendszer: $x=2+t$, $y=-1-5t$, $z=3+3t$. A t paramétert kifejezve a paramétermentes egyenletrendszer: $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-3}{3}$, ami természetesen pl. $15x-30=-3y-3=5z-15$ alakba is írható. Irányvektornak válaszhatjuk $\mathbf{w}$=($\mathbf{b}$-$\mathbf{a}$)-t is, az adott pont pedig lehet akár A, akár B. Ez utóbbi esetben a paraméteres alak: $x=1-t$, $y=4+5t$, $z=-3t$. Honnan tudjuk, hogy ez a ránézésre különböző egyenletrendszer ugyanannak az egyenesnek az egyenletrendszere, mint az előbbi? Az nyilvánvaló, hogy mindkettő egy egyenest ad meg. Elég belátni, hogy mindkettőn rajta van az A és a B pont is. Az elsőbe $t=0$-t helyettesítve az A pontot kapjuk. A B pont első koordinátája 1. Ha $x=1$ akkor $x=2+t$ miatt, $t=-1$. A $t=-1$ paraméterértékhez $y=-1-5(-1)=4$, $z=3+3(-1)=0$ koordináták tartoznak, vagyis épp a B pont koordinátái, B tehát rajta van az első egyenesen. Hasonlóképp ellenőrizhető, hogy A rajta van a második egyenesen. Ha két egyenes átmegy ugyanazon a két ponton, akkor azok megegyeznek, vagyis a két egyenletrendszerrel ugyanazokat a pontokat kapjuk, csak más-más paraméterérték esetén.

2.2. Kérdés. A két pont: $A(0,2,5)$, $B(-2,2,1)$.

2.2.1. Megoldás. A két pont helyvektorát **a**-val, ill. **b**-vel jelölve, az egyenes párhuzamos az $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (-2, 0, -4)$ vektorral. Az A pontot választva $\mathbf{p}_0$-nak $\mathbf{p} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, így a $\mathbf{p} = (x, y, z)$ koordinátákra a paraméteres egyenletrendszer: $x = -2t$, $y = 2$, $z = 5 - 4t$. A t paramétert kifejezve a paramétermentes egyenletrendszer: $\frac{x}{-2} = \frac{z-5}{-4}$, $y = 2$, ami természetesen pl. $2x = z - 5$, $y = 2$ alakba is írható. Irányvektornak válaszhatjuk **w**=(**a**-**b**)-t is, az adott pont pedig lehet akár A, akár B. Ez utóbbi esetben a paraméteres alak: $x = -2 + 2t$, $y = 2$, $z = 1 + 4t$. Honnan tudjuk, hogy ez a ránézésre különböző egyenletrendszer ugyanannak az egyenesnek az egyenletrendszere, mint az előbbi? Az nyilvánvaló, hogy mindkettő egy egyenest ad meg. Elég belátni, hogy mindkettőn rajta van az A és a B pont is. Az elsőbe $t = 0$-t helyettesítve az A pontot kapjuk. A B pont első koordinátája -2. Ha $x = -2$ akkor $x = -2t$ miatt, $t = 1$. A $t = 1$ paraméterértékhez $y = 2$, $z = 5 - 4 \cdot 1 = 1$ koordináták tartoznak, vagyis épp a B pont koordinátái, B tehát rajta van az első egyenesen. Hasonlóképp ellenőrizhető, hogy A rajta van a második egyenesen. Ha két egyenes átmegy ugyanazon a két ponton, akkor azok megegyeznek, vagyis a két egyenletrendszerrel ugyanazokat a pontokat kapjuk, csak más-más paraméterérték esetén.

2.3. Kérdés. A két pont: $A(4, 2, 1)$, $B(6, 2, 1)$.

2.3.1. Megoldás. A két pont helyvektorát **a**-val, ill. **b**-vel jelölve, az egyenes párhuzamos az $\mathbf{v} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (2, 0, 0)$ vektorral. Az A pontot választva $\mathbf{p}_0$-nak $\mathbf{p} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$, így a $\mathbf{p} = (x, y, z)$ koordinátákra a paraméteres egyenletrendszer: $x = 4 + 2t$, $y = 2$, $z = 1$. Mivel t bármilyen valós lehet, x értéke bármilyen valós lehet az y-tól és z-től függetlenül, ezek viszont adottak. A paramétermentes egyenletrendszer: $y = 2$, $z = 1$. Irányvektornak természetesen válaszhatjuk **w**=(**a**-**b**)-t is, az adott pont pedig lehet akár A, akár B. Ez utóbbi esetben a paraméteres alak: $x = 6 - 2t$, $y = 2$, $z = 1$. Ez ugyan most kevéssé különbözik az előbbitől, de azért ellenőrizzük, hogy tényleg ugyanaz-e? Az nyilvánvaló, hogy mindkettő egy egyenest ad meg. Elég belátni, hogy mindkettőn rajta van az A és a B pont is. Az elsőbe $t = 0$-t helyettesítve az A pontot kapjuk. A B pont első koordinátája 6. Ha $x = 6$ akkor $x = 4 + 2t$ miatt, $t = 1$, és $y = 2$, $z = 1$, vagyis épp a B pont koordinátái, B tehát rajta van az első egyenesen. Hasonlóképp ellenőrizhető, hogy A rajta van a második egyenesen. Ha két egyenes átmegy ugyanazon a két ponton, akkor azok megegyeznek, vagyis a két egyenletrendszerrel ugyanazokat a pontokat kapjuk, csak más-más paraméterérték esetén.

3. FELADAT. Az alábbi paraméteres egyenletrendszerrel adott egyeneseket adjuk meg paramétermentesen, a paramétermentesen adottakat pedig paraméteresen!

3.1. Kérdés. $x = 1 - t$, $y = 2 + 3t$, $z = -3t$.

3.1.1. Megoldás. A t paramétert mindegyikből kifejezve:
$t = \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-3}$, azaz az egyenletrendszer: $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-3}$. Szebben írva: $3x - 3 = 2 - y = z$.

3.2. Kérdés. $x = 4$, $y = 2 - 4t$, $z = -3t$.

3.2.1. Megoldás. A második két egyenletből t-t kifejezve kapjuk: $\frac{y-2}{-4} = \frac{z}{-3}$, azaz a paramétermentes egyenletrendszer: $x = 4$, $\frac{y-2}{4} = \frac{z}{3}$, amit írhatunk úgy is, hogy $x = 4$, $3y - 6 = 4z$.

3.3. Kérdés. 3 $x = 2 + 7t$, $y = 3$, $z = -1$.

3.3.1. Megoldás. A paramétermentes egyenletrendszer: $y = 3$, $z = -1$. (Mivel y, és z konstans, az irányvektor második és harmadik koordinátája 0.)

3.4. Kérdés. $2 - 4x = \frac{y+5}{3} = \frac{z}{2}$

3.4.1. Megoldás. Tudjuk, ha ez az egyenletrendszer $\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2} = \frac{z-z_0}{v_3}$ alakú, akkor biztos, hogy az egyenesen rajta van az (x_0, y_0, z_0) pont, hiszen ekkor minden tört 0, a $\mathbf{v}$ irányvektor koordinátái pedig (v_1, v_2, v_3). A megadott egyenletrendszer a kívánt alakot ölti, ha az x-et tartalmazó kifejezés számlálóját és nevezőjét is (ami 1) elosztjuk (-4)-gyel.
Ekkor $\frac{x-\frac{2}{4}}{-\frac{1}{4}} = \frac{y+5}{3} = \frac{z}{2}$. Az egyenesnek egy pontja tehát $(\frac{1}{2}, -5, 0)$, (egyik) irányvektora $(-\frac{1}{4}, 3, 2)$, amivel paraméteres egyenletrendszere: $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t$, $y = -5 + 3t$, $z = 2t$. Tudjuk, egy irányvektor bármilyen nem-nullaszorosa is irányvektor, így választhatjuk az $(1, -12, -8)$ vektort is. Ekkor $x = \frac{1}{2} + t$, $y = -5 - 12t$, $z = -8t$

3.4.2. Megoldás. Ha pl. x helyébe 0-t írunk, a $2 = \frac{y+5}{3} = \frac{z}{2}$-ből $y = 1$, $z = 4$ adódik, azaz, az $A(0, 1, 4)$ pont az egyenesen van. Ha x helyébe 1-et írunk, $-2 = \frac{y+5}{3} = \frac{z}{2}$-ből az $y = -11$, $z = -4$ értékeket kapjuk, tehát a $B(1, -11, -4)$ pont is az egyenesen van. A két ponton átmenő egyenes egyik paraméteres egyenletrendszere a $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = (-1, 12, 8)$ irányvektorral és az A ponttal: $x = -t$, $y = 1 + 12t$, $z = 4 + 8t$. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ez ugyanannak az egyenesnek egyenletrendszere, mint az előbbi: csak nézzük meg, A és B kielégítik azt az egyenletrendszert is.

3.5. Kérdés. $3x + 6 = y$, $z = 5$.

3.5.1. Megoldás. Az $\frac{x-x_0}{v_1} = \frac{y-y_0}{v_2}$ alakra hozva: $\frac{x+2}{1} = \frac{y}{3}$, így az irányvektor $\mathbf{v} = (1, 3, 0)$ és a paraméteres egyenletrendszer: $x = -2 + t$, $y = 3t$, $z = 5$.

3.6. Kérdés. $x = 2$, $y = -3$

3.6.1. Megoldás. Mivel az egyenes pontjainak x és y koordinátája konstans, csak a z koordináta változhat, így az egyenes párhuzamos a z-tengellyel. Ennek egyik irányvektora $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Mivel z bármi lehet, $z = t$tetszőleges. ekkor a paraméteres egyenletrendszer: $x = 2$, $y = -3$, $z = t$.

3.6.2. Megoldás. Mivel z értéke nem függ x-től és y-tól, lehet akár 0, akár 1. Az első esetben az $A(2, -3, 0)$, a második esetben a $B(2, -3, 1)$ az egyenes pontja. A két ponton átmenő egyenes egyik paraméteres egyenletrendszere a

$\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = (0, 0, -1)$ irányvektorral és a B ponttal: $x = 2$, $y = -3$, $z = 1 - t$. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy ez ugyanannak az egyenesnek egyenletrendszere, mint az előbbi: csak nézzük meg, A és B kielégítik azt az egyenletrendszert is.

4. FELADAT. A alábbi paraméteresen, ill. paramétermentesen megadott egyenletrendszerek közül melyek definiálják ugyanazt az egyenest?

4.1. Kérdés.

$$\text{a)}\ \begin{aligned} x &= 1-2t \\ y &= 2+t \\ z &= 3t \end{aligned} \qquad \text{b)}\ \begin{aligned} x &= 1+2t \\ y &= 3+t \\ z &= 1+3t \end{aligned} \qquad \text{c)}\ \begin{aligned} x &= 3+4t \\ y &= 1-2t \\ z &= -3-6t \end{aligned}$$

4.1.1. Megoldás. Az a) és b) egyenesek irányvektorai nem párhuzamosak, így az egyenesek nem lehetnek egyezők. Az a) és c) egyenesek irányvektorai párhuzamosak, és pl. az $(1, 2, 0)$ pont mindkettőn rajta van, a)-n a t=0 paraméternél, c)-n a $t = -1/2$ paraméterértéknél. Tehát a) és c) ugyannak az egyenesnek két paraméteres egyenletrendszere.

4.2. Kérdés.

a) $3x - 3 = 2 - y = z$ b) $-3x = y - 5 = -z - 3$ c) $3x = 5 - y = z + 1$

4.2.1. Megoldás. Az a) egyenes egy pontja $P(1, 2, 0)$, ez rajta van b)-n, de nincs c)-n; a b) egyenesből $R(0, 5, -3)$ rajta van a)-n, így a két közös ponttal rendelkező a) és b) egyenesek megegyeznek. Egy közös pont megtalálása után összehasonlíthattuk volna az irányvektoraikat is, de ebben az esetben ez így egyszerűbb volt.

5. FELADAT. Adott egy A pont, és egy $\mathbf{n}$ vektorral egy irány. Írjuk fel az adott ponton átmenő, adott irányra merőleges sík egyenletét!

5.1. Kérdés. $A(-5, 7, 1)$, $\mathbf{n}$=$(-2, -3, 4)$.

5.1.1. Megoldás. A sík vektoregyenlete $(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)\mathbf{n} = 0$, azaz $\mathbf{pn} = \mathbf{p}_0\mathbf{n}$, ahol $\mathbf{n}$ a normálvektor, $\mathbf{p}_0$ és $\mathbf{p}$ a sík pontjainak helyvektorai. Így $\mathbf{p} = (x, y, z)$ koordinátákkal $-2x-3y+4z = (-2)\cdot(-5)+(-3)\cdot 7+4\cdot 1$, azaz $2x+3y-4z = 7$.

5.2. Kérdés. $A(-5, 7, 1)$, $\mathbf{n}$=$(-2, 0, 4)$.

5.2.1. Megoldás. A sík vektoregyenlete $(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)\mathbf{n} = 0$, azaz $\mathbf{pn} = \mathbf{p}_0\mathbf{n}$, ahol $\mathbf{n}$ a normálvektor, $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}$ a sík pontjainak helyvektorai. Így $\mathbf{p} = (x, y, z)$ koordinátákkal $-2x + 0y + 4z = (-2) \cdot (-5) + 0 \cdot 7 + 4 \cdot 1$, azaz $2x - 4z = -14$, ill. $x - 2z = -7$.

5.3. Kérdés. $A(-5, 7, 1)$, $\mathbf{n}$=$(0, 3, 0)$.

5.3.1. Megoldás. A sík vektoregyenlete $(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)\mathbf{n} = 0$, azaz $\mathbf{pn} = \mathbf{p}_0\mathbf{n}$, ahol $\mathbf{n}$ a normálvektor, $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}$ a sík pontjainak helyvektorai. Így $\mathbf{p} = (x, y, z)$ koordinátákkal $0x + 3y + 0z = (0) \cdot (-5) + 3 \cdot 7 + 0 \cdot 1$, azaz $3y = 21$, ill. $y = 7$.

6. FELADAT. Adott egy sík egyenlete $ax + by + cz = d$ alakban. Adjuk meg egy pontját, és egy normálvektorát!

6.1. Kérdés. A sík egyenlete $2x - y + 6z = -17$.

6.1.1. Megoldás. Egy pont pl. (0,17,0), egy normálvektor pl. $(2, -1, 6)$, és bármely más normálvektor ennek nem nulla számszorosa.

6.2. Kérdés. A sík egyenlete $-x + 5y = 20$.

6.2.1. Megoldás. Egy pont pl. (5,5,19), egy normálvektor pl. $(-1, 5, 0)$, és bármely más normálvektor ennek nem nulla számszorosa. (Mivel a normálvektor párhuzamos az (x, y)-síkkal, a sík merőleges az (x, y)-síkra, és a metszésvonal egyenlete az (x, y)-síkban $-x + 5y = 20$.)

6.3. Kérdés. A sík egyenlete $x = -3$.

6.3.1. Megoldás. Egy pont pl. $(-3, 7, -2)$, egy normálvektor pl. (1,0,0), és bármely más normálvektor ennek nem nulla számszorosa. (Mivel a normálvektor párhuzamos az x-tengellyel, a sík merőleges az x-tengelyre, tehát párhuzamos az (y, z)-síkkal, az x-tengelyt -3-nál metszi.)

7. FELADAT. Adott három pont, A, B, C. Írjuk fel a három ponton átmenő sík egyenletét.

7.1. Kérdés. A három pont $A(1, 2, 3)$, $B(-1, 0, 1)$, $C(0, 1, 5)$.

7.1.1. Megoldás. A sík párhuzamos az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektorral, ezért normálvektora mindkettőre merőleges:

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (-6)\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = (-6, 6, 0)$$

A sík normálvektora $(-6, 6, 0)$, vagy ennek bármilyen nem nullaszorosa. A sík vektoregyenlete $(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)\mathbf{n} = 0$, azaz $\mathbf{pn} = \mathbf{p}_0\mathbf{n}$, ahol $\mathbf{n}$ a normálvektor, $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}$ a sík pontjainak helyvektorai. Így $\mathbf{p} = (x, y, z)$ koordinátákkal a sík egyenlete $-6x + 6y = 6$, vagy ennek bármilyen nem nullaszorosa pl. $-x + y = 1$. Látjuk, bármelyik pontot is választjuk A, B, C közül $\mathbf{p}_0$ végpontjának, mindig ugyanazt az egyenletet kapjuk.

7.1.2. Megoldás. Tudjuk, hogy a sík egyenlete $ax + by + cz = d$ alakú, és az adott három pont kielégíti a sík egyenletét. Az a, b, c, d együtthatókkal:

$$\begin{array}{rrrrl} a & +2b & +3c & -d & = 0 \\ -a & & +c & -d & = 0 \\ & b & +5c & -d & = 0 \end{array}$$

Ez három egyenlet négy ismeretlenre. A megoldás: $c = 0$, $a = -d$, $b = d$. A d értékét 0 kivételével bárminek választhatjuk, hiszen látjuk, hogy az csak az adódó egyenlet más és más számszorosát eredményezi. Pl. $d = 1$ esetén $-x + y = 1$ a keresett egyenlet.

7.2. Kérdés. A három pont $A(1,2,3)$, $B(-1,1,0)$, $C(3,3,6)$.

7.2.1. Megoldás. A sík párhuzamos az $\overrightarrow{AB}$ és az $\overrightarrow{AC}$ vektorral, ezért normálvektora mindkettőre merőleges:

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = (0,0,0)$$

A vektoriális szorzat a nullvektor, ami azt jelenti, hogy a három pont egy egyenesen van, így végtelen sok olyan sík van, amelyik átmegy a három ponton. Ha mégis szeretnénk felírni, milyen egyenlete van azoknak a síkoknak, amelyek a pontokat tartalmazzák, akkor pl. minden olyan normálvektor jó, ami merőleges pl. az $\overrightarrow{AC} = (2,1,3)$ vektorra, azaz pl. $(a, -2a-3c, c)$ alakú, ahol a és c nem mindketten nullák. Az egyenlet $ax + (-2a-3c)y + cz = -3a - 3c$.

7.2.2. Megoldás. Tudjuk, hogy a sík egyenlete $ax + by + cz = d$ alakú, és az adott három pont kielégíti a sík egyenletét. Az a, b, c, d együtthatókkal:

$$\begin{array}{ccccc} a & +2b & +3c & -d & =0 \\ -a & +b & & -d & =0 \\ 3a & +3b & +6c & -d & =0 \end{array}$$

Három egyenlet négy ismeretlenre, de már az első lépéseknél kiderül, hogy az egyik elhagyható, mert következik a másik kettőből. (Ebben a példában bármelyik kifejezhető a másik kettővel.) Ez azt jelenti, hogy a három pont egy egyenesen van, hiszen a harmadik nem ad több információt, mint ami a másik kettőből következik. Ha mégis szeretnénk felírni, milyen egyenlete van azoknak a síkoknak, amelyek a pontokat tartalmazzák, akkor a megoldás lehet pl. $b = a + d$, $c = -d/3 - a$, ahol a és d nem mindketten nullák. Az egyenlet: $ax + (a+d)y + (-d/3 - a)z = d$.

8. FELADAT. Adott két pont, A és B, és egy irány. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amelyik átmegy az adott pontokon, és párhuzamos az adott iránnyal.

8.1. Kérdés. Legyen a két pont $A(2,1,-3)$, $B(-1,0,1)$, az irányt pedig a $\mathbf{v} = (3,-2,0)$ vektor jelöli ki.

8.1.1. Megoldás. A sík $\mathbf{n}$ normálvektora merőleges az $\overrightarrow{AB}$ vektorra, és a $\mathbf{v}$ vektorra.

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 8\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 9\mathbf{k} = (8,12,9)$$

A sík vektoregyenlete $(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)\mathbf{n} = 0$, azaz $\mathbf{pn} = \mathbf{p}_0\mathbf{n}$, ahol $\mathbf{n}$ a normálvektor, $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}$ a sík pontjainak helyvektorai. Így $\mathbf{p} = (x,y,z)$ koordinátákkal a sík egyenlete $8x + 12y + 9z = 1$, ill. ennek bármely nem nulla számszorosa.

8.1.2. Megoldás. A sík egyenlete $ax+by+cz=d$ alakú. A megadott pontok kielégítik a sík egyenletét. A sík $\mathbf{n}=(a,b,c)$ normálvektora merőleges a $\mathbf{v}=(0,3,-2)$ vektorra, azaz skalárszorzatuk 0. Az a, b, c, d együtthatókkal:

$$\begin{array}{lllll} 2a & +b & -3c & -d & =0 \\ -a & & +c & -d & =0 \\ 3a & -2b & & & =0 \end{array}$$

Három egyenlet négy ismeretlenre, egyik megoldása: $a=8d$, $b=12d$, $c=9d$. Az egyenlet tehát pl. $d=1$ választással $8x+12y+9z=1$. Bármilyen $d\neq 0$ választás jó, hiszen ugyanannak az egyenletnek számszorosát kapjuk.

8.2. Kérdés. Keressük meg annak a síknak az egyenletét, amelyik átmegy az $A(1,2,3)$ és a $B(-1,0,1)$ pontokon, és párhuzamos az $x=1$, $y=2-t$, $z=4+t$ egyenessel.

8.2.1. Megoldás. A sík $\mathbf{n}$ normálvektora merőleges az $\overrightarrow{AB}$ vektorra, és az egyenes $\mathbf{v}=(0,-1,1)$ irányvektorára.

$$\mathbf{n}=\overrightarrow{AB}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(-4)\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}=(-4,2,2)$$

A sík vektoregyenlete $(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)\mathbf{n}=0$, azaz $\mathbf{pn}=\mathbf{p}_0\mathbf{n}$, ahol $\mathbf{n}$ a normálvektor, $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}$ a sík pontjainak helyvektorai. Így $\mathbf{p}=(x,y,z)$ koordinátákkal a sík egyenlete $-4x+2y+2z=6$, ill. ennek bármely nem nulla számszorosa.

8.2.2. Megoldás. A sík egyenlete $ax+by+cz=d$ alakú. A megadott pontok kielégítik a sík egyenletét. A sík $\mathbf{n}=(a,b,c)$ normálvektora merőleges az egyenes $\mathbf{v}=(0,-1,1)$ irányvektorára, azaz skalárszorzatuk 0. Az a, b, c, d együtthatókkal:

$$\begin{array}{lllll} a & +2b & +3c & -d & =0 \\ -a & & +c & -d & =0 \\ & -b & +c & & =0 \end{array}$$

Három egyenlet négy ismeretlenre, megoldása: $a=(-2/3)d$, $b=(1/3)d$, $c=(1/3)d$. Az egyenlet tehát pl. $d=3$ választással $-2x+y+z=3$. Bármilyen $d\neq 0$ választás jó, hiszen ugyanannak az egyenletnek számszorosát kapjuk.

9. FELADAT. Adott egy A pont, és két egyenes. Adjuk meg annak a síknak az egyenletét, amelyik átmegy az A ponton, és párhuzamos a két egyenessel!

9.1. Kérdés. Az adott pont $A(-1,4,2)$. Az egyik egyenes: $x=-t$, $y=5$, $z=4+2t$. A másik egyenes: $x-3=(2-y)/2$, $z=3$.

9.1.1. Megoldás. A sík normálvektora merőleges mindkét egyenes irányvektorára, $\mathbf{n}=\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2$, ahol most $\mathbf{v}_1=(-1,0,2)$, $\mathbf{v}_2=(1,-2,0)$.

$$\mathbf{n}=\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=4\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}=(4,2,2)$$

A sík vektoregyenlete $(\mathbf{p}-\mathbf{p}_0)\mathbf{n}=0$, azaz $\mathbf{pn}=\mathbf{p}_0\mathbf{n}$, ahol $\mathbf{n}$ a normálvektor, $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}$ a sík pontjainak helyvektorai. Így $\mathbf{p}=(x,y,z)$ koordinátákkal a sík egyenlete $4x+2y+2z=8$, ill. ennek bármely nem nulla számszorosa.

10. FELADAT. Adott egy pont és egy egyenes. Adjuk meg az adott ponton átmenő és az adott egyenest tartalmazó sík egyenletét!

10.1. Kérdés. A pont $P(3,-1,2)$, az egyenes: $x=1+t$, $y=2-2t$, $z=3$.

10.1.1. Megoldás. A pont nincs az egyenesen. Az egyenes irányvektora $\mathbf{v}=(1,-2,0)$, egyik pontja pedig $Q(1,2,3)$. A sík normálvektora merőleges $\mathbf{v}$-re és a $\overrightarrow{PQ}$ vektorra, ezért
$\mathbf{n}=\mathbf{v}\times\overrightarrow{PQ}=(1,-2,0)\times(-2,3,1)=(-2,-1,-1)$. A sík egyenlete $-2x-y-z=-7$, ami persze $2x+y+z=7$ alakba is írható.

10.2. Kérdés. A pont $P(2,0,3)$, az egyenes: $x=1+t$, $y=2-2t$, $z=3$.

10.2.1. Megoldás. A pont az egyenesen van, így végtelen sok megoldás van, ugyanis minden olyan sík megoldás, amelyik tartalmazza az egyenest. Az ilyen síkok normálvektora merőleges az egyenes irányvektorára, azaz
$\mathbf{nv}=(n_1,n_2,n_3)(1,-2,0)=n_1-2n_2=0$. Tehát $\mathbf{n}=(2a,a,b)$ tetszőleges a, b, $a^2+b^2\neq 0$ esetén megfelelő normálvektor, a síkok egyenlete pedig $2ax+ay+bz=4a+3b$.

11. FELADAT. Adott egy sík és egy egyenes. Állapítsuk meg, metszik-e egymást, és ha igen, mi a metszéspontjuk!

11.1. Kérdés. A sík $2x-3y+z=1$, az egyenes $x=4+t$, $y=-2t$, $z=-t$.

11.1.1. Megoldás. Ha van metszéspontjuk, akkor van olyan t, hogy a hozzá tartozó x,y,z értékek kielégítik a sík egyenletét: $2(4+t)-3(-2t)+(-t)=1$, amiből $t=-1$, azaz az $x=3$, $y=2$, $z=1$ koordinátájú pont az egyenesen is és a síkon is rajta van.

11.2. Kérdés. A sík $4x+y-3z=2$, az egyenes $x=2+t$, $y=7-t$, $z=t$.

11.2.1. Megoldás. Ha van metszéspontjuk, akkor van olyan t, hogy a hozzá tartozó x,y,z értékek kielégítik a sík egyenletét: $4(2+t)+(7-t)-3(t)=2$, amiből $13=0$ következne, ami nyilvánvalóan lehetetlen. Az egyenesnek és a síknak nincs közös pontja, ami abból is látható, hogy a sík $\mathbf{n}=(4,1,-3)$ normálvektora merőleges az egyenes $\mathbf{v}=(1,-1,1)$ irányvektorára: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}=0$, azaz a sík és az egyenes párhuzamosak, és az egyenes nem fekszik a síkban, hiszen pl. az egyenes (2,7,0) pontja nem elégíti ki a sík egyenletét.

11.3. Kérdés. A sík $3x-2y+5z=0$, az egyenes $x=1+4t$, $y=-1+t$, $z=-1-2t$.

11.3.1. Megoldás. Ha van metszéspontjuk, akkor van olyan t, hogy a hozzá tartozó x,y,z értékek kielégítik a sík egyenletét: $3(1+4t)-2(-1+t)+5(-1-$

$2t) = 0$, amiből $0 = 0$ következik, azaz az egyenes pontjai minden t érték mellett kielégítik a sík egyenletét, az egyenes tehát a síkban fekszik. Az, hogy az egyenes párhuzamos a síkkal, abból is látszik, hogy a sík $\mathbf{n} = (3, -2, 5)$ normálvektora merőleges az egyenes $\mathbf{v} = (4, 1, -2)$ irányvektorára: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, és ez az egyenes egyben benne van a síkban, hiszen pl. az $(1, -1, -1)$ pontja kielégíti a sík egyenletét.

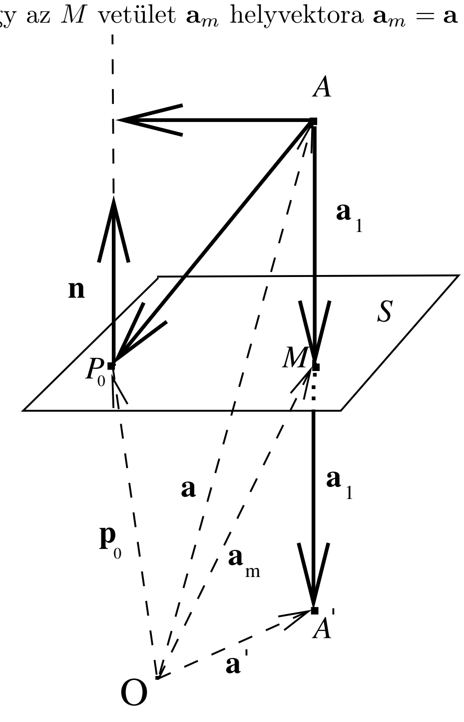
12. FELADAT. Adott az S: $\mathbf{n}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) = 0$ sík, és az $\mathbf{a}$ helyvektorú A pont. Válaszoljuk meg a következő kérdéseket!

12.1. Kérdés. Adjuk meg az A pont merőleges vetületét a síkon!

12.1.1. Megoldás. Jelölje $\mathbf{n}$ a sík egy normálvektorát. Ha a $\mathbf{w} = (\mathbf{p}_0 - \mathbf{a})$ vektort felbontjuk $\mathbf{n}$-nel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre, akkor a párhuzamos $\mathbf{a}_1$ összetevő az A-ból a vetületébe mutató vektor.

$$\mathbf{a}_1 = \frac{(\mathbf{p}_0 - \mathbf{a})\mathbf{n}}{\mathbf{n}^2}\mathbf{n}$$

Így az M vetület $\mathbf{a}_m$ helyvektora $\mathbf{a}_m = \mathbf{a} + \frac{(\mathbf{p}_0 - \mathbf{a})\mathbf{n}}{\mathbf{n}^2}\mathbf{n}$.



12.2. Kérdés. Tükrözzük A-t S-re.

12.2.1. Megoldás. Az M vetületből az A' tükörképbe mutató vektor ugyanaz, mint az A-ból az M-be mutató, így az A' tükörkép helyvektora $\mathbf{a}' = \mathbf{a} + 2\frac{(\mathbf{p}_0 - \mathbf{a})\mathbf{n}}{\mathbf{n}^2}\mathbf{n}$

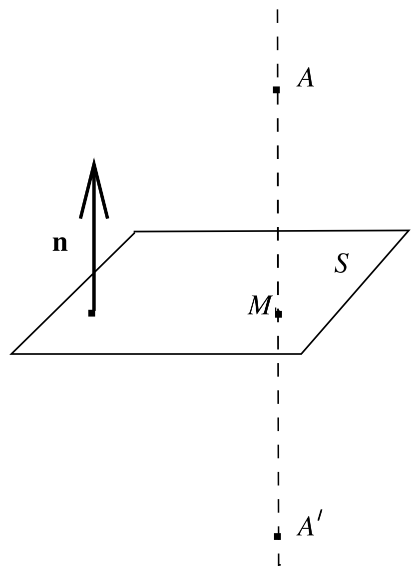
12.3. Kérdés. Adjuk meg a pont távolságát a síktól!

12.3.1. Megoldás. A pont és a sík távolsága az $\mathbf{a}_1$ vektor hossza:
$|\mathbf{a}_1| = \frac{|(\mathbf{p}_0-\mathbf{a})\mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|}$.

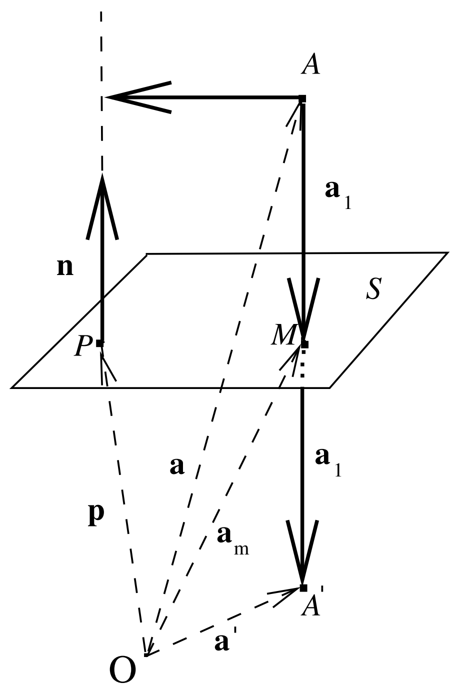
13. FELADAT. Adott egy A pont és egy sík. A pont $A(-4, 9, -5)$, a sík $3x - 4y + z = -1$. Válaszoljuk meg a következő kérdéseket!

13.1. Kérdés. Adjuk meg a pont merőleges vetületét a síkon!

13.1.1. Megoldás. Az A pont vetülete az A ponton átmenő, a síkra merőleges egyenesnek és a síknak metszéspontja. Ennek az egyenesnek irányvektora megegyezik a sík normálvektorával: $\mathbf{v} = \mathbf{n} = (3, -4, 1)$. Az egyenes paraméteres egyenletrendszere: $x = -4 + 3t$, $y = 9 - 4t$, $z = -5 + t$. Az egyenes és a sík közös pontja a $3(-4 + 3t) - 4(9 - 4t) + (-5 + t) = -1$ egyenletből az egyenes $t = 2$ paraméterű $M(2, 1, -3)$ pontja. Ez az A pont merőleges vetülete.

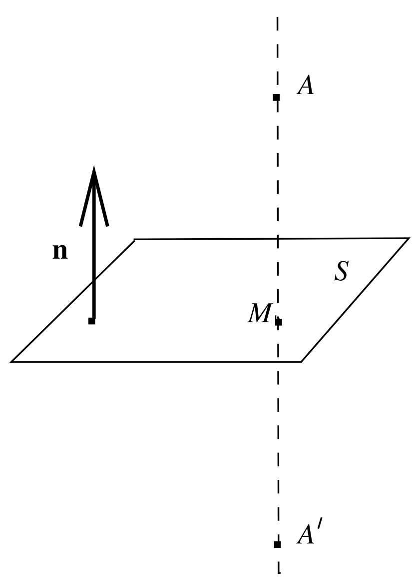


13.1.2. Megoldás. Legyen P a sík egy pontja. Ha felbontjuk az $\overrightarrow{AP}$ vektort a sík normálvektorával párhuzamos és rá merőleges összetevőkre, akkor a párhuzamos összetevő az A pontból épp a vetületébe mutat. A normálvektor $\mathbf{n} = (3, -4, 1)$, a sík egy pontja pl. $P(0, 0, -1)$. Az $\overrightarrow{AP}$ vektor $\mathbf{n}$-nel párhuzamos összetevője $\overrightarrow{AP}_{(\mathbf{n})} = \frac{\overrightarrow{AP}\dot{\mathbf{n}}}{\mathbf{n}^2}\mathbf{n} = \frac{(4)3+(-9)(-4)+(4)1}{3^2+(-4)^2+1^2}(3, -4, 1) = (6, -8, 2)$. Így az M metszéspont $\mathbf{m}$ helyvektora: $\mathbf{m} = \mathbf{a} + \overrightarrow{AP}_{(\mathbf{n})} = (2, 1, -3)$.



13.2. Kérdés. Tükrözzük az A pontot a síkra! Adjuk meg az A' tükörkép koordinátáit!

13.2.1. Megoldás. Az M pont felezi az AA' szakaszt, így $x_m = \frac{x_a + x_{a'}}{2}$, tehát $2 = \frac{-4 + x_{a'}}{2}$, amiből $x_{a'} = 8$ A többi koordinátát is hasonlóképp kiszámítva az A' pont koordinátái: $(8, -7, -1)$.



13.2.2. Megoldás. Az $\overrightarrow{AA'}$ vektor épp a kétszerese az $\overrightarrow{AM}$ vektornak. Így A' helyvektora $\mathbf{a}' = \mathbf{a} + 2\overrightarrow{AM} = (-4, 9, -5) + 2(6, -8, 2) = (8, -7, -1)$.

13.3. Kérdés. Adjuk meg az A pont síktól való távolságát!

13.3.1. Megoldás. Az A pont és a sík távolsága az A pont és vetületének távolsága: $d = \sqrt{(-4-2)^2 + (9-1)^2 + (-5+3)^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$.

13.3.2. Megoldás. Legyen P a sík egy pontja. Ha felbontjuk az $\overrightarrow{AP}$ vektort a sík normálvektorával párhuzamos és rá merőleges összetevőkre, akkor a párhuzamos összetevő az A pontból épp a vetületébe mutat, és ennek a vektornak abszolút értéke pont és a sík távolsága. (Ez tulajdoképpen a pont és sík távolságának képlete.) Az 1. alkérdés második megoldása alapján ez $d = |(6, -8, 2)| = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$.

14. FELADAT. Adott egy egyenes. Adjuk meg az egyenesnek olyan paraméterezését, ahol a "‘lépték"’ egységnyi, azaz, ha a paraméterértéket 1-gyel növeljük, az újabb pont az előzőtől egységnyi távolságban van.

14.1. Kérdés. $x = 1 + 2t$, $y = -2t$, $z = 5 + t$.

14.1.1. Megoldás. A $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{v}t$ alakból kiindulva, ha $|\mathbf{v}| = 1$, akkor t értékét 1-gyel változtatva, az egyenesen egységnyi hosszal lépünk odébb. Az egyenletrendszerből leolvasható $\mathbf{v} = (2, -2, 1)$, erre $|\mathbf{v}| = 3$. Így $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}/|\mathbf{v}| = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$. Ha a $t = 0$ paraméterértékhez tartozó pontnak továbbra is a $P(1, 0, 5)$ pontot tekintjük, akkor $x = 1 + \frac{3}{3}t$, $y = -\frac{2}{3}t$, $z = 5 + \frac{1}{3}t$.

15. FELADAT. Ha lehetséges, adjuk meg az egyenesnek olyan paraméterezését, ahol a paraméterérték az x koordináta, majd olyat, ahol a z koordináta!

15.1. Kérdés. $x = 2 - t$, $y = 3t$, $z = -1 + 2t$.

15.1.1. Megoldás. Mivel az első egyenletből $t = 2 - x$, ezt a másik kettőbe behelyettesítve y is és z is x-nek függvénye: $y = 3(2 - x) = 6 - 3x$, $z = -1 + 2(2 - x) = 3 - 2x$. A paraméteres egyenletrendszer. $x = \tau$, $y = 6 - 3\tau$, $z = 3 - 2\tau$.
Hasonlóan járva el, amikor z-től függően akarjuk x-et és y-t megadni: $t = \frac{z+1}{2}$, és ezzel $x = 2 - \frac{z+1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}z$, $y = 3\frac{z+1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}z$, azaz mindhárom koordinátafüggvényt kiírva: $x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\tau$, $y = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\tau$, $z = \tau$.

15.2. Kérdés. $x = 2t$, $y = 3 - t$, $z = 2$.

15.2.1. Megoldás. Az első egyenlőségből $t = \frac{x}{2}$, és ezzel $y = 3 - \frac{x}{2}$ a kapcsolat y és x között. z nem függ semmilyen paramétertől. A megoldás tehát: $x = \tau$, $y = 3 - \frac{\tau}{2}$, $z = 2$.
Mivel z csak egyetlen értéket vehet fel, nem lehet paraméter. Ez az egyenes párhuzamos az (x, y)-síkkal.

15.3. Kérdés. $x = 1$, $y = 5$, $z = 7 - \frac{5}{17}t$.

15.3.1. Megoldás. Mivel x csak egyetlen értéket vehet fel, nem lehet paraméter. z bármilyen értéket felvehet, de sem x, sem y nem függ tőle. Ez az egyenes párhuzamos a z-tengellyel. A kívánt egyenletrendszer: $x = 1$, $y = 5$, $z = \tau$.

16. FELADAT. Adott két sík. Állapítsuk meg, párhuzamosak-e, és ha nem, adjuk meg a metszésegyenesük egyenletrendszerét!

16.1. Kérdés. A két sík egyenlete $x - 2y + z = 2$, $3x + 2y - 3z = 0$.

16.1.1. Megoldás. A két sík nem párhuzamos, hiszen normálvektoraik nem párhuzamosak. A közös egyenes mindkét síkkal párhuzamos, így irányvektora mindkét normálvektorra merőleges:

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (4, 6, 8).$$

Kell még az egyenesnek egy pontja. Ez a két síknak közös pontja, mindkét egyenletet kielégíti. Ilyen pont végtelen sok van, egyik koordinátát nyilván szabadon megválaszthatjuk. De melyiket? Az egyenes irányvektorának egyik koordinátája sem nulla, így mindegyik koordináta felvesz minden értéket. Legyen pl. $y = 0$, ezt beírva a két egyenletbe, és x-re, z-re megoldva $x = 1$, $z = 1$ adódik. Az egyenes paraméteres egyenletrendszere: $x = 1 + 4t$, $y = 6t$, $z = 1 + 8t$. (A $(4, 6, 8)$ irányvektor helyett természetesen bármilyen nem nullaszorosa, pl. a $(2, 3, 4)$ is jó.)

16.1.2. Megoldás. A két sík nem párhuzamos, hiszen normálvektoraik nem párhuzamosak. Mivel egy egyenes paramétermentes egyenletrendszere tulajdonképpen két (speciális helyzetű) sík egyenletével adja meg az egyenest, mint azok közös pontjait, itt is megpróbálhatjuk közvetlenül az átírást. A két egyenlet számszorosait összeadva hol az egyik, hol a másik változót küszöböljük ki. Ha marad közös változó bennük, akkor mindkét egyenletből kifejezve a közös változót, megkapjuk a kívánt alakú egyenlőségeket. Pl. a két egyenletet összeadva y eltűnik, az első egyenlet 3-szorosát a másodikhoz adva z eltűnik. Mivel x mindkettőben megmarad, mindkettőből kifejezhetjük.

$$x = \frac{2y + 3}{3} = \frac{z + 1}{2}$$

16.2. Kérdés. A két sík egyenlete $2x + 3y - z = 6$, $4x + y - 2z = 2$.

16.2.1. Megoldás. A két sík nem párhuzamos, hiszen normálvektoraik nem párhuzamosak. A közös egyenes mindkét síkkal párhuzamos, így irányvektora mindkét normálvektorra merőleges:

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-5, 0, -10).$$

Kell még az egyenesnek egy pontja. Ez a két síknak közös pontja, mindkét egyenletet kielégíti. Ilyen pont végtelen sok van, egyik koordinátát nyilván szabadon megválaszthatjuk. De melyiket? Az egyenes irányvektorának y koordinátája nulla, így az egyenes pontjainak második koordinátája konstans,tehát nem vesz fel akármilyen értéket. A másik kettő viszont igen. Legyen pl. $x = 0$, ezt beírva a két egyenletbe, és y-ra, z-re megoldva $y = 2$, $z = 0$ adódik. Az egyenes paraméteres egyenletrendszere: $x = -5t$, $y = 2$, $z = -10t$. (A $(-5, 0, -10)$ irányvektor helyett természetesen bármilyen nem nullaszorosa, pl. az $(1, 0, 2)$ is jó.)

16.2.2. Megoldás. A két sík nem párhuzamos, hiszen normálvektoraik nem párhuzamosak. Mivel egy egyenes paramétermentes egyenletrendszere tulajdonképpen két (speciális helyzetű) sík egyenletével adja meg az egyenest, mint azok közös pontjait, itt is megpróbálhatjuk közvetlenül az átírást. A két egyenlet számszorosait összeadva hol az egyik, hol a másik változót küszöböljük ki. Ha marad közös változó bennük, akkor mindkét egyenletből kifejezve a közös változót, megkapjuk a kívánt alakú egyenlőségeket. Pl. a második egyenlet -3 szorosát adva az elsőhöz y eltűnik, az első egyenlet -2-szörösét a másodikhoz adva viszont x és z is eltűnik. Így máris a paramétermentes alakot kaptuk: $2x = z$, $y = 2$.

16.3. Kérdés. A két sík egyenlete $y + 2z = 5$, $2y - 3z = -4$.

16.3.1. Megoldás. A két sík nem párhuzamos, hiszen normálvektoraik nem párhuzamosak. A közös egyenes mindkét síkkal párhuzamos, így irányvektora mindkét normálvektorra merőleges:

$$\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-7, 0, 0).$$

Kell még az egyenesnek egy pontja. Ez a két síknak közös pontja, mindkét egyenletet kielégíti. Ilyen pont végtelen sok van, egyik koordinátát nyilván szabadon megválaszthatjuk. De melyiket? Az egyenes irányvektorának y és z koordinátája is nulla, így az egyenes pontjainak második és harmadik koordinátája konstans, tehát nem vesz fel akármilyen értéket. Az első viszont igen. Legyen pl. $x = 0$, ezt "'beírva"' a két egyenletbe, és y-ra, z-re megoldva $y = 1$, $z = 2$ adódik. Az egyenes paraméteres egyenletrendszere: $x = -7t$, $y = 1$, $z = 2$. (A (-7,0,0) irányvektor helyett természetesen bármilyen nem nullaszorosa, pl. az (1,0,0) is jó.)

16.3.2. Megoldás. A két sík nem párhuzamos, hiszen normálvektoraik nem párhuzamosak. Mivel egy egyenes paramétermentes egyenletrendszere tulajdonképpen két (speciális helyzetű) sík egyenletével adja meg az egyenest, mint azok közös pontjait, itt is megpróbálhatjuk közvetlenül az átírást. A két egyenlet számszorosait összeadva hol az egyik, hol a másik változót küszöböljük ki. Ha marad közös változó bennük, akkor mindkét egyenletből kifejezve a közös változót, megkapjuk a kívánt alakú egyenlőségeket. Most egy-egy változó kiküszöbölésével az $y = 1$, $z = 2$ egyenlőségekhez jutunk, és ez már egy paramétermentes egyenletrendszer.

17. FELADAT. Adott egy P pont és egy e egyenes, az egyenes: $\mathbf{x} = \mathbf{q} + \mathbf{v}t$. Válaszoljuk meg a következő kérdéseket!

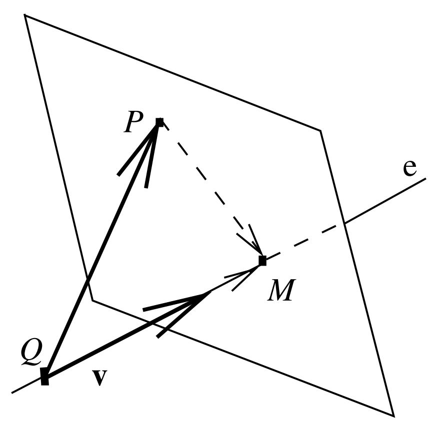
17.1. Kérdés. Adjuk meg a P pont e egyenesre való merőleges vetületének helyvektorát!

17.1.1. Megoldás. Jelölje $\mathbf{p}$ a P pontnak, $\mathbf{m}$ a P pont vetületének helyvektorát, $\mathbf{q}$ pedig az egyenes Q pontjának, $\mathbf{v}$ az irányvektornak a helyvektorát. Ha a $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ vektort felbontjuk $\mathbf{v}$-re merőleges és $\mathbf{v}$-vel párhuzamos összetevőkre, akkor a $\mathbf{v}$-vel párhuzamos összetevő éppen $\mathbf{m} - \mathbf{q}$. Így

$$\mathbf{m} - \mathbf{q} = \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{q})\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v},$$

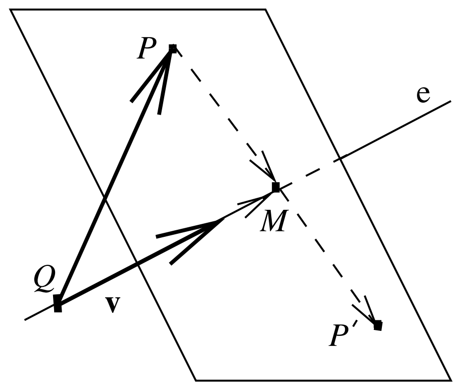
az M vetület helyvektora tehát

$$\mathbf{m} = \mathbf{q} + \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{q})\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}$$



17.2. Kérdés. Adjuk meg a P pont e egyenesre vonatkozó tükörképének helyvektorát!

17.2.1. Megoldás. Jelölje $\mathbf{p}'$ a P' tükörkép helyvektorát. A $\mathbf{p}' - \mathbf{p}$ vektor az $\mathbf{m}-\mathbf{p}$ vektor kétszerese, ahol $\mathbf{m}$ az egyenesen levő merőleges vetület helyvektora.



Így

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + 2(\mathbf{m} - \mathbf{p}) = 2\mathbf{q} + 2\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{q})\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} - \mathbf{p},$$

ahol $\mathbf{q}$ az egyenes egy pontjának helyvektora, $\mathbf{v}$ pedig az irányvektor, ahogyan az előbb is jelöltük.

17.3. Kérdés. Adjuk meg a pont és az egyenes távolságát!

17.3.1. Megoldás. Ez a távolság a pontnak és vetületének távolsága, azaz $|\mathbf{p} - \mathbf{m}|$.

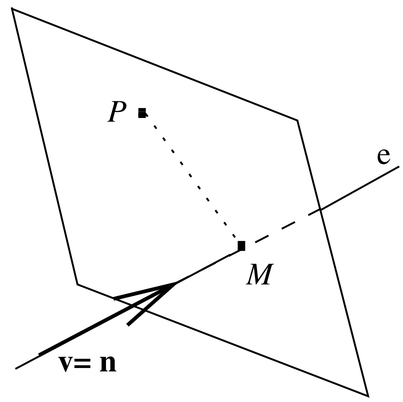
17.3.2. Megoldás. A $|(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \times \mathbf{v}|$ érték a $(\mathbf{p} - \mathbf{q})$ és a $\mathbf{v}$ vektorok által meghatározott parallelogramma területe. Ha elosztjuk az egyik oldal hosszával, megkapjuk az ezen oldalhoz tartozó magasságot. A pont és az egyenes távolsága:

$$\frac{|(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \times \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$

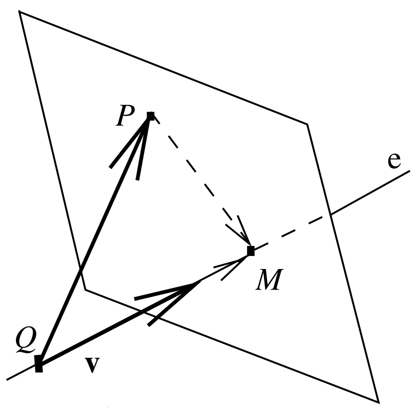
18. FELADAT. Adott egy pont és egy egyenes. A pont $P(6, 2, -3)$, az egyenes: $x = 1 - t$, $y = 1 + t$, $z = -2 - t$.

18.1. Kérdés. Vetítsük a pontot merőlegesen az egyenesre!

18.1.1. Megoldás. A P pont vetülete a P-n átmenő és az egyenesre merőleges sík metszéspontja. Az egyenes $\mathbf{v}$ irányvektora megfelel a sík $\mathbf{n}$ normálvektorának, így a sík egyenlete: $x - y + z = 1$. A sík és az egyenes metszéspontja: $(1 - t) - (1 + t) + (-2 - t) = 1$, amiből $t = -1$, azaz az egyenes $t = -1$ paraméterértékhez tartozó $M(2, 0, -1)$ pontja.



18.1.2. Megoldás. Tekintsük pl. az egyenes $Q(1, 1, -2)$ pontját, és jelölje P merőleges vetületét az egyenesen M.



Ha a $\overrightarrow{QP} = (5, 1, -1)$ vektort felbontjuk az irányvektorral párhuzamos és arra merőleges összetevőre, akkor a párhuzamos összetevő éppen a $\overrightarrow{QM}$ vektor.

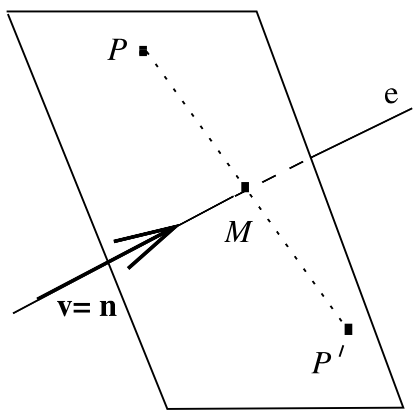
$$\overrightarrow{QM} = \frac{\overrightarrow{QP}\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} = \frac{(5, 1, -1)(-1, 1, -1)}{3}(-1, 1, -1) = (1, -1, 1).$$

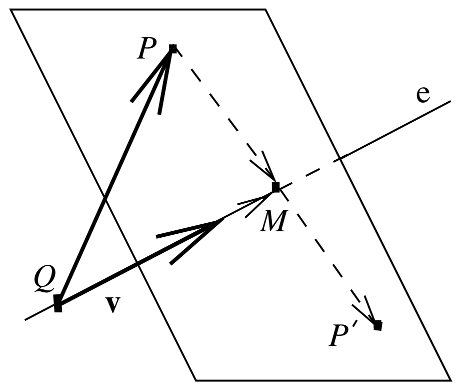
Az M pont helyvektora $(1, 1, -2) + (1, -1, 1) = (2, 0, -1)$, azaz M koordinátái: $(2, 0, -1)$.

18.2. Kérdés. Adjuk meg P-nek az egyenesre vonatkozó tükörképét!

18.2.1. Megoldás. Ha a tükörképet P'-vel jelöljük, akkor M a PP' szakasz felezőpontja, és koordinátái a P és P' megfelelő koordinátáinak számtani közepei: $x_M = \frac{x_P + x_{P'}}{2}$, így $x_{P'} = -2$. Hsonlóképpen kiszámítva az y és z koordinátákat $P'(-2, -2, 1)$.

Az origót O-val jelölve P' koordinátáit az $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PM} = (6, 2, -3) + 2(-4, -4, 2) = (-2, -2, 1)$ összefüggésből is megkaphatjuk.



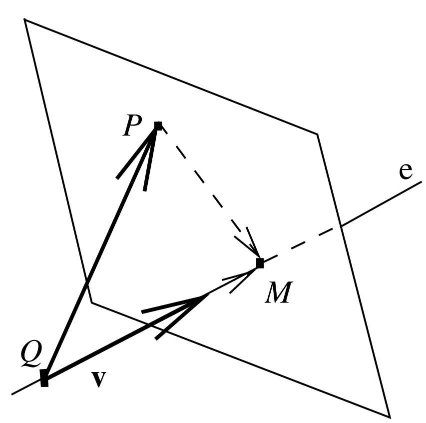


18.3. Kérdés. Adjuk meg a pont és az egyenes távolságát!

18.3.1. Megoldás. A pont és az egyenes távolsága a pontnak és a vetületének távolsága:
$|\overrightarrow{PM}| = \sqrt{(2-6)^2 + (0-2)^2 + (-1-(-3))^2} = \sqrt{24}$

18.3.2. Megoldás. A $\overrightarrow{QP}$ és a $\mathbf{v}$ vektorok által meghatározott parallelogramma területe $|\overrightarrow{QP}\times\mathbf{v}|$. Ha ezt $\mathbf{v}$ abszolút értékével elosztjuk, akkor a parallelogramma $\mathbf{v}$ által meghatározott oldalához tartozó magasságát kapjuk, ami éppen a pont és egyenes távolsága:

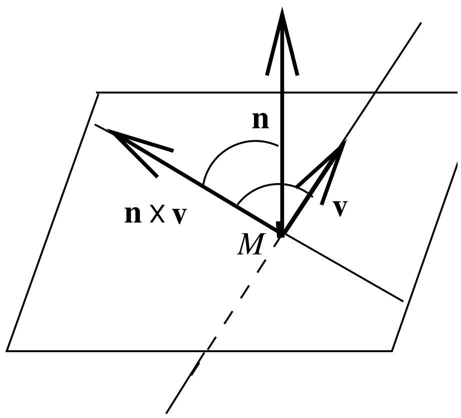
$$\frac{|\overrightarrow{QP}\times\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{|(5,1,-1)\times(-1,1,-1)|}{|(-1,1-1)|} = \frac{|(0,6,6)|}{|(-1,1-1)|} = \sqrt{24}$$



19. FELADAT. Adott egy sík és egy vele nem párhuzamos egyenes. Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletrendszerét, amely átmegy a metszéspontjukon, benne van a síkban és merőleges az egyenesre.

19.1. Kérdés. A sík egyenlete: $2x + y - z = 7$; az egyenes pedig $x = 6 + t$, $y = 3 + 3t$, $z = 5 + 2t$.

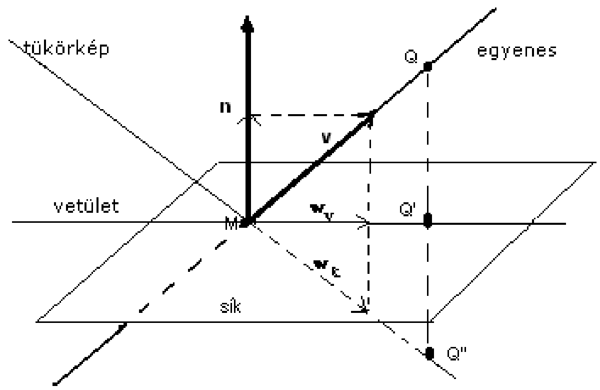
19.1.1. Megoldás. A metszéspont koordinátái kielégítik a sík egyenletét, tehát $2(6 + t) + (3 + 3t) - (5 + 2t) = 7$, amiből $t = -1$. A metszéspont tehát $M(5, 0, 3)$. A keresett egyenes a síkban fut, tehát merőleges a sík normálvektorára és az adott egyenes irányvektorára. A sík normálvektora $\mathbf{n} = (2, 1, -1)$, az adott egyenes irányvektora $\mathbf{v} = (1, 3, 2)$, így a keresett egyenes $\mathbf{w}$ irányvektora: $\mathbf{w} = \mathbf{n} \times \mathbf{v} = (5, -5, 5)$. Az egyenes egyenletrendszere: $x = 5+5t$, $y = -5t$, $z = 3 + 5t$. Mivel egy irányvektor minden nem nullaszorosa is irányvektor, ezt az egyenletrendszert $x = 5 + t$, $y = -t$, $z = 3 + t$ alakba is írhatjuk.



20. FELADAT. Tekintsünk egy síkot, és egy egyenest. Vetítsük az egyenest merőlegesen a síkra, majd adjuk meg az egyenesnek a síkra vonatkozó tükörképét!

20.1. Kérdés. A sík egyenlete $x + 2y - z = 5$, az egyenes egyenletrendszere $x = 3$, $y = 2 + t$. $z = -3 - 3t$.

20.1.1. Megoldás. A sík normálvektora $\mathbf{n} = (1, 2, -1)$, az egyenes irányvektora $\mathbf{v} = (0, 1, -3)$. Mivel $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \neq 0$, a sík és az egyenes nem párhuzamos. A keresett vetület egy pontja a sík és az egyenes M metszéspontja: $3+2(2+t)-(-3-3t) = 5$, $t = -1$, $M(3, 1, 0)$. Mivel $\mathbf{n}$ és $\mathbf{v}$ nem egymás számszorosai, az egyenes nem merőleges a síkra, így vetülete nemcsak a metszéspont, hanem egy egyenes. Tekintsük az adott egyenesnek egy másik pontját, pl. $t = 0$ esetén $Q(3, 2, -3)$. Határozzuk meg ennek Q' vetületét a síkon. Ennek meghatározására több út is van, az egyik: a Q-n átmenő, a síkra merőleges egyenesnek irányvektora a sík normálvektora, így egyenletrendszere: $x = 3+t$, $y = 2+2t$, $z = -3-t$. Q' ennek és a síknak közös pontja: $(3+t)+2(2+2t)-(-3-t) = 5$, $t = -\frac{5}{6}$, $Q'(\frac{13}{6}, \frac{2}{6}, -\frac{13}{6})$. A vetület átmegy M-en és Q'-n, irányvektora $\overrightarrow{MQ'}$, vagy ennek nem nullaszorosa: $\overrightarrow{MQ'} = (-\frac{5}{6}, -\frac{4}{6}, -\frac{13}{6})$, azaz megfelelő irányvektor $\mathbf{w}_v = (5, 4, 13)$. A vetület (egyik) egyenletrendszere: $x = 3 + 5t$, $y = 1 + 4t$, $z = 13t$.



A tükörkép-egyenes átmegy az M metszésponton és a Q pont Q'' tükörképén. Q' a QQ'' szakasz felezőpontja, pl. $x_{q''}$ az $x_{q'} = \frac{x_q + x_{q''}}{2}$ egyenlőségből $\frac{8}{6}$, hasonlóképpen $y_{q''} = -\frac{8}{6}$, $z_{q''} = -\frac{8}{6}$. Mivel a tükörkép-egyenes átmegy az M és Q'' pontokon, így a $\mathbf{w}_t = \overrightarrow{MQ''}$ alkalmas számszorosát tekintve irányvektornak (egyik) paraméteres egyenletrendszere: $x = 3 + 5t$, $y = 1 + 7t$, $z = 4t$.

20.1.2. Megoldás. A sík normálvektora $\mathbf{n} = (1, 2, -1)$, az egyenes irányvektora $\mathbf{v} = (0, 1, -3)$. Mivel $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \neq 0$, a sík és az egyenes nem párhuzamos. A keresett egyenesnek egy pontja a sík és az egyenes M metszéspontja: $3+2(2+t)-(-3-t) = 5$, $t = -1$, $M(3, 1, 0)$. Ha az egyenes irányvektorát felbontjuk $\mathbf{n}$-nel párhuzamos és rá merőleges összetevőkre, akkor a merőleges összetevő megfelel a vetület irányvektorának. Az $\mathbf{n}$-nel párhuzamos összetevő $\frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{n}^2}\mathbf{n} = \frac{5}{6}(1, 2, -1) = (\frac{5}{6}, \frac{10}{6}, -\frac{5}{6})$, így a merőleges összetevő $(0 - \frac{5}{6}, 1 - \frac{10}{6}, -3 + \frac{5}{6}) = (-\frac{5}{6}, -\frac{4}{6}, -\frac{13}{6})$. Ennek bármilyen nem nullaszorosa a vetület irányvektora, pl. $\mathbf{w}_v = (5, 4, 13)$.
A vetület (egyik) egyenletrendszere: $x = 3 + 5t$, $y = 1 + 4t$, $z = 13t$.
A tükörkép-egyenes irányát megkapjuk, ha a merőleges összetevőhöz a párhuzamos összetevő (-1)-szeresét adjuk: $\mathbf{w}_t = (-\frac{5}{6}, -\frac{4}{6}, -\frac{13}{6}) - (\frac{5}{6}, \frac{10}{6}, -\frac{5}{6}) = (-\frac{10}{6}, -\frac{14}{6}, -\frac{8}{6})$. Ennek (-3)-szorosát véve irányvektorként, a tükörkép (egyik) egyenletrendszere: $x = 3 + 5t$, $y = 1 + 7t$, $z = 4t$.

20.2. Kérdés. A sík egyenlete: $3x - 2y - z = 1$, az egyenes egyenletrendszere $x = 5 + t$, $y = 1 + t$, $z = -2 + t$.

20.2.1. Megoldás. A sík normálvektora $\mathbf{n} = (3, -2, -1)$, az egyenes irányvektora $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$. Mivel $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = 0$, a sík és az egyenes párhuzamos. A egyenes vetületének irányvektora megegyezik az eredetiével, egy pontja pedig az egyenes tetszőleges pontjának vetülete a síkra. Pl. az egyenes egy pontja $Q(5, 1, -2)$. Ennek a síkra való vetületét többféleképpen is meghatározhatjuk, pl. a Q-n átmenő, a síkra merőleges egyenes egyenletrendszere $x = 5 + 3t$, $y = 1 - 2t$, $z = -2 - t$, és legyen ennek a síkkal való metszéspontja Q'. A metszéspont: $3(5 + 3t) - 2(1 - 2t) - (-2 - t) = 1$, $t = -1$, így $Q'(2, 3, -1)$. A vetület egyenletrendszere $x = 2 + t$, $y = 3 + t$, $z = -1 + t$.
A tükörkép-egyenes átmegy a Q pont Q'' tükörképén. Q' a QQ'' szakasz felezőpontja, pl. $x_{q''}$ az $x_{q'} = \frac{x_q + x_{q''}}{2}$ egyenlőségből -1, hasonlóképpen $y_{q''} = 5$, $z_{q''} = 0$.

A tükörkép-egyenes egyenletrendszere: $x = -1 + t$, $y = 5 + t$, $z = t$.

20.3. Kérdés. A sík egyenlete $x + 2y - z = 5$, az egyenes egyenletrendszere $x = 3 - 2t$, $y = -1 - 4t$, $z = 2t$.

20.3.1. Megoldás. A sík normálvektora $\mathbf{n} = (1, 2, -1)$, az egyenes irányvektora $\mathbf{v} = (-2, -4, 2)$. Mivel $\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \neq 0$, a sík és az egyenes nem párhuzamos. Az egyenes vetülete áthalad a sík és az egyenes M metszéspontján. A metszéspont: $(3-2t)+2(-1-4t)-(2t) = 5$, $t = -\frac{1}{3}$, így $M(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$. Ránézésre is látszik, hogy az irányvektor számszorosa a normálvektornak, így az egyenes merőleges a síkra, ezért merőleges vetülete egyetlen pont, az M metszéspont, tükörképe pedig saját maga.
Az, hogy a normálvektor és az irányvektor párhuzamos, kiderülhet abból is, hogy ha az egyenes egy $Q \neq M$ pontját vetítjük a síkra, ugyancsak az M pontot kapjuk, vagy ha az irányvektort a normálvektorral párhuzamos és rá merőleges összetevőkre bontjuk, akkor a párhuzamos összetevő maga az irányvektor, a merőleges pedig a nullvektor, vagy abból, hogy $\mathbf{n} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

21. FELADAT. Tekintsünk két síkot, S_1-et és S_2-t. Tükrözzük S_1-et S_2-re!

21.1. Kérdés. Az egyik sík $S_1 : x + y + z = 3$, a másik $S_2 : 2x - y + 2z = 6$.

21.1.1. Megoldás. Tudjuk, hogy a tükörkép egy sík. Ha az S_1 síkról 3 db nem egy egyenesbe eső pontot választunk, majd tükrözzük őket az S_2 síkra, azután felírjuk a három tükörképen átmenő sík egyenletét, akkor megvan a válasz a kérdésre. (Nyilvánvaló, hogy ez így "‘unalmas"’, hiszen háromszor kell ugyanazt a feladatot, a tükrözést végigszámolni. Általában ez valóban nem a legrövidebb megoldás).
Ha egy síkon véletlenszerűen veszünk fel három pontot, azok csak a legritkább esetben esnek egy egyenesbe. Mivel S_1 nem megy át az origón, ha pl. S_1-nek a három tengellyel való metszéspontjait vesszük, azok biztosan nem esnek egy egyenesbe. Ezek: $A(3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 3)$.
Az A pont koordinátái véletlenül épp kielégítik S_2 egyenletét, így a tükörképe, azaz A' saját maga.
A B pont tükörképét többféleképpen is meghatározhatjuk, most az S_2 síkra való vetületének segítségével tesszük. A B ponton átmenő és S_2-re merőleges egyenes irányvektora az S_2 sík normálvektorával egyezik meg: $\mathbf{n} = \mathbf{v} = (2, -1, 2)$, és így egyenletrendszere $x = 2t$, $y = 3 - t$, $z = 2t$. Ennek S_2-vel való metszéspontja a $2(2t) - (3 - t) + 2(2t) = 6$ egyenletből a $t = 1$ paraméterű pontnál van, azaz a vetület az $M_B(2, 2, 2)$ pont. Ha B tükörképét B'-vel jelöljük, akkor M_B éppen a BB' szakasz felezőpontja. Azaz: $2 = \frac{x_{B'}+0}{2}$, $2 = \frac{y_{B'}+3}{2}$, $2 = \frac{z_{B'}+0}{2}$, azaz $B'(4, 1, 4)$.
A C pont koordinátái szintén kielégítik S_2 egyenletét, így a tükörképe, azaz C' saját maga.
A három tükörképponton átmenő sík $\mathbf{n}_T$ normálvektora $\overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{A'C'} = (1, 1, 4) \times (-3, 0, 3) = (3, -15, 3)$. A sík egyenlete pedig $3x - 15y + 3z = 9\ azaz (x - 5y + z = 3)$. Látjuk, ha az A és C pontok nem lettek volna pontjai S_2-nek, akkor a számítás sokkal hosszadalmasabb lett volna.

21.1.2. Megoldás. Tudjuk, hogy a tükörkép egy sík. A két adott sík nem párhuzamos. A tükörkép tartalmazza a síkok metszetegyenesét, ami mindkét normálvektorra merőleges. Ennek iránya a normálvektorok vektori szorzata: $\mathbf{v} = (1,1,1) \times (2,-1,2) = (3,0,-3)$. Az irányvektor z irányú komponense nem nulla, így a közös pont keresésénél z szabadon választható, pl. $z = 0$ választással az $x + y = 3$, $2x - y = 6$ egyenletekből $x = 3$, $y = 0$, adódik, így $A(3,0,0)$ a metszetegyenes egy pontja. Ki kell számítanunk az S_1 sík egy másik, nem a metszeten levő pontjának tükörképét is, pl. a $P(2,-3,4)$ pontét. A P-n átmenő, S_2 síkra merőleges egyenes egyenletrendszere $x = 2 + 2t$, $y = -3 - t$, $z = 4 + 2t$. A $2(2 + 2t) - (-3 - t) + 2(4 + 2t) = 6$ egyenlőségből a metszéspont paramétere $t = -1$, így P vetülete, ami a PP' szakasz felezőpontja, $(0,-2,2)$. Ebből P' koordinátái $(-2,-1,0)$. Az $\overrightarrow{AP'}$ vektor és $\mathbf{v}$ is párhuzamos a síkkal, így a keresett sík normálvektora $\mathbf{n} = \overrightarrow{AP'} \times \mathbf{v} = (3,-15,3)$, az egyenlete pedig $3x - 15y + 3z = 9\ azaz (x - 5y + z = 3)$.

21.2. Kérdés. Az egyik sík $S_1 : 4x-2y+4z = 0$, a másik $S_2 : 2x-y+2z = 6$.

21.2.1. Megoldás. Tudjuk, hogy a tükörkép egy sík. A két adott sík párhuzamos, így a tükörkép is párhuzamos velük. Tudjuk továbbá, hogy ebben az esetben ha S_1 bármelyik pontját tükrözzük S_2 bármelyik pontjára, akkor a tükörképsík egy pontját kapjuk. S_1 egyik pontja az origó, jelöljük P-vel, S_2 egyik pontja $(3,0,0)$, jelöljük M-mel. Mivel M felezőpontja a PP' szakasznak, P' koordinátái $(6,0,0)$. A tükörképsík egyenlete tehát $2x - y + 2z = 12$.

22. FELADAT. Tekintsünk egy síkot, egy egyenest és egy pontot. Tükrözzük a síkot és az egyenest a pontra.

22.1. Kérdés. A sík: $3x - y - 2z = 2$; az egyenes: $x = 1-t$, $y = 2t$, $z = 4-t$; a pont: $P(1,2,3)$.

22.1.1. Megoldás. Egy síknak egy pontra vonatkozó tükörképe szintén sík, amelyik az eredetivel párhuzamos, így normálvektora ugyanaz. Az adott síknak egy pontja pl. $Q(0,0,-1)$, és ha a tükörképét Q'-vel jelöljük, a P pont a QQ' szakasz felezőpontja. $x_P = \frac{x_Q + x_{Q'}}{2}$, amiből $x_{Q'} = 2$. Hasonlóképpen számolva az y és z koordinátákat $Q'(2,4,7)$. A keresett sík egyenlete tehát $3x - y - 2z = 3 \cdot 2 - 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-5)$, azaz $3x - y - 2z = -12$.
Egy egyenesnek egy pontra vonatkozó tükörképe szintén egyenes, amelyik az eredetivel párhuzamos, így irányvektora ugyanaz. Az adott egyenesnek egy pontja pl. $T(1,0,4)$, és ha a tükörképét T'-vel jelöljük, a P pont a TT' szakasz felezőpontja. $x_P = \frac{x_T + x_{T'}}{2}$, amiből $x_{T'} = 1$. Hasonlóképpen számolva az y és z koordinátákat $T'(1,4,2)$. A keresett egyenes egyenletrendszere tehát $x = 1 - t$, $y = 4 + 2t$, $z = 2 - t$.

23. FELADAT. Adott egy sík, egy egyenes és egy irány. Vetítsük az egyenest a síkra az iránnyal párhuzamosan!

23.1. Kérdés. A sík: $x + y + z = 0$, az egyenes: $x = 3 + 2t$, $y = 1$, $z = 2 + 4t$, az irány: $\mathbf{a} = (1,2,3)$.

23.1.1. Megoldás. Az egyenes vetülete egyenes vagy pont. A sík normálvektora $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$, az egyenes irányvektora $\mathbf{v} = (2, 0, 4)$. Mivel $\mathbf{nv} \neq 0$, a sík és az egyenes nem párhuzamosak, a metszéspont vetülete saját maga. A metszéspont a $(3 + 2t) + 1 + (2 + 4t) = 0$ egyenletből a $t = -1$ paraméterértékhez tartozó pont, azaz $M(1, 1, -2)$. Vetítsük az egyenes egy másik pontját is, pl. a $P(3, 1, 2)$ pontot. A P-n átmenő, az adott iránnyal párhuzamos egyenes egyenletrendszere $x = 3+t$, $y = 1+2t$, $z = 2+3t$. Ennek a síkkal való metszéspontja a $(3 + t) + (1 + 2t) + (2 + 3t) = 0$ egyenlet alapján a $t = -1$ paraméterértékhez tartozik, így $P'(2, -1, -1)$. Megvan tehát a vetületnek két pontja, az ezeken átmenő egyenes (egy) irányvektora $\mathbf{w} = \overrightarrow{MP'} = (1, -2, 1)$, és ezzel a paraméteres egyenletrendszere: $x = 1 + t$, $y = 1 - 2t$, $z = -2 + t$.

23.2. Kérdés. A sík: $x + y + z = 0$, az egyenes: $x = 3 + t$, $y = 1$, $z = 2 - t$, az irány: $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$.

23.2.1. Megoldás. Az egyenes vetülete egyenes vagy pont. A sík normálvektora $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$, az egyenes irányvektora $\mathbf{v} = (1, 0, -1)$. Mivel $\mathbf{nv} = 0$, a sík és az egyenes párhuzamosak. Az egyenes vetülete így párhuzamos saját magával. Pl. határozzuk meg a $P(3, 1, 2)$ pont vetületét. A P-n átmenő, az adott iránnyal párhuzamos egyenes egyenletrendszere $x = 3 + t$, $y = 1 + 2t$, $z = 2 + 3t$. Ennek a síkkal való metszéspontja a $(3 + t) + (1 + 2t) + (2 + 3t) = 0$ egyenlet alapján a $t = -1$ paraméterértékhez tartozik, így $P'(2, -1, -1)$. A vetület párhuzamos az eredeti egyenessel, így egyenletrendszere: $x = 2 + t$, $y = -1$, $z = -1 - t$.

23.3. Kérdés. A sík: $x + y + z = 0$, az egyenes: $x = 3 + 2t$, $y = 1$, $z = 2 + 4t$, az irány: $\mathbf{a} = (1, 0, 2)$.

23.3.1. Megoldás. Az egyenes vetülete egyenes vagy pont. A sík normálvektora $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$, az egyenes irányvektora $\mathbf{v} = (2, 0, 4)$. Mivel $\mathbf{nv} \neq 0$, a sík és az egyenes nem párhuzamosak, a metszéspont vetülete saját maga. A metszéspont a $(3 + 2t) + 1 + (2 + 4t) = 0$ egyenletből a $t = -1$ paraméterértékhez tartozó pont, azaz $M(1, 1, -2)$. A vetítés iránya nyilvánvalóan párhuzamos az egyenessel, így a vetület egyetlen pont, az M. (Erről meggyőződhetünk úgy is, hogy az egyenes egy másik pontjának a vetületét is megpróbáljuk kiszámítani. Mivel a vetítő egyenes ugyanaz az egyenes, a metszéspontja sem lehet más.)

24. FELADAT. Adott két egyenes. Határozzuk meg közös pontjaikat, ha vannak.

24.1. Kérdés. Az egyik egyenes: $x = t$, $y = 5-3t$, $z = 1+2t$; a másik egyenes: $x = -1 - t$, $y = 4 + t$, $z = 9 + 3t$.

24.1.1. Megoldás. Az egyenesek nem eshetnek egybe, mert nem párhuzamosak: $\mathbf{v}_1 = (1, -3, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, 1, 3)$. A két egyenesnek akkor van közös pontja, ha a két egyenletrendszerrel adott koordináták paramétereik valamilyen értékére megegyeznek. Mivel a két egyenletrendszer paraméterei egymástól függetlenek, meg kell őket különböztetni, ha ugyanabban az egyenlőségben használjuk őket. Jelöljük pl. a második egyenes paraméterét τ-val. Ekkor $t = -1 - \tau$, $5 - 3t =$

$4+\tau$, $1+2t = 9+3\tau$. Ez három egyenlet két ismeretlenre. Megpróbálunk találni az egyenletek közül két olyat, hogy azokból az ismeretleneket meghatározhassuk. Ha sikerül, ellenőriznünk kell, kielégítik-e a harmadik egyenletet is. Ha igen, találtunk egy közös pontot. Ha nem, nincs közös pont. Most az első két egyenletből $t = 1$, $\tau = -2$ adódik, ami kielégíti a harmadik egyenletet is, így az (1,2,3) pont közös pont.

24.2. Kérdés. Az egyik egyenes: $x = 4 + t$, $y = 2t$, $z = -t$; a másik egyenes: $x = 7 - t$, $y = 6 - 2t$, $z = 5 + 2t$.

24.2.1. Megoldás. Az egyenesek nem eshetnek egybe, mert nem párhuzamosak ($\mathbf{v}_1 = (1, 2, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, -2, 2)$). A két egyenesnek akkor van közös pontja, ha a két egyenletrendszerrel adott koordináták paramétereik valamilyen értékére megegyeznek. Mivel a két egyenletrendszer paraméterei egymástól függetlenek, meg kell őket különböztetni, ha ugyanabban az egyenlőségben használjuk őket. Jelöljük pl. a második egyenes paraméterét τ-val. Ekkor $4+t = 7-\tau$, $2t = 6-2\tau$, $-t = 5 + 2\tau$. Ez három egyenlet két ismeretlenre. Megpróbálunk találni az egyenletek közül két olyat, hogy azokból az ismeretleneket meghatározhassuk. Ha sikerül, ellenőriznünk kell, kielégítik-e a harmadik egyenletet is. Ha igen, találtunk egy közös pontot. Ha nem, nincs közös pont. Most az első két egyenletből nem tudjuk őket meghatározni, mert ezek valójában ugyanazok, de bármelyiket a harmadikkal együtt tekintve $t = 11$, $\tau = -8$ adódik, így a $(15, 22, -11)$ pont közös pont. (A két első egyenlet azonossága azt jelenti, hogy ha az egyeneseket merőlegesen az (x, y)-síkra vetítjük, akkor a vetületeik egy egyenesbe esnek. Irányvektoraik első két koordinátája az (x, y) síkban párhuzamos irányt jelöl ki.)

24.3. Kérdés. Az egyik egyenes: $x = 1+t$, $y = 2t$, $z = 1-t$; a másik egyenes: $x = 7 - t$, $y = 6 - 2t$, $z = 5 + 2t$.

24.3.1. Megoldás. Az egyenesek nem eshetnek egybe, mert nem párhuzamosak ($\mathbf{v}_1 = (1, 2, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1, -2, 2)$). A két egyenesnek akkor van közös pontja, ha a két egyenletrendszerrel adott koordináták paramétereik valamilyen értékére megegyeznek. Mivel a két egyenletrendszer paraméterei egymástól függetlenek, meg kell őket különböztetni, ha ugyanabban az egyenlőségben használjuk őket. Jelöljük pl. a második egyenes paraméterét τ-val. Ekkor $1+t = 7-\tau$, $2t = 6-2\tau$, $1 - t = 5 + 2\tau$. Ez három egyenlet két ismeretlenre. Megpróbálunk találni az egyenletek közül két olyat, hogy azokból az ismeretleneket meghatározhassuk. Ha sikerül, ellenőriznünk kell, kielégítik-e a harmadik egyenletet is. Ha igen, találtunk egy közös pontot. Ha nem, nincs közös pont. Most az első két egyenletből mindjárt ellentmondásra jutunk, azaz, nincsenek olyan pontok az egyeneseken, amelyeknek az első két koordinátája megegyezne. (Ez azt jelenti, hogy ha az egyeneseket merőlegesen levetítjük az (x, y)-síkra, akkor a vetületeik nem metszik egymást. Irányvektoraik első két koordinátája az (x, y) síkban párhuzamos irányt jelöl ki.) Az egyeneseknek tehát nincs közös pontjuk, a két egyenes kitérő.

24.4. Kérdés. Az egyik egyenes: $x = 2+t$, $y = 1-2t$, $z = t$; a másik egyenes: $x = 3-t$, $y = 3-2t$, $z = 5+2t$.

24.4.1. Megoldás. Az egyenesek nem eshetnek egybe, mert nem párhuzamosak ($\mathbf{v}_1 = (1,-2,1)$, $\mathbf{v}_2 = (-1,-2,2)$). A két egyenesnek akkor van közös pontja, ha a két egyenletrendszerrel adott koordináták paramétereik valamilyen értékére megegyeznek. Mivel a két egyenletrendszer paraméterei egymástól függetlenek, meg kell őket különböztetni, ha ugyanabban az egyenlőségben használjuk őket. Jelöljük pl. a második egyenes paraméterét τ-val. Ekkor $2+t = 3-\tau$, $1-2t = 3-2\tau$, $t = 5+2\tau$. Ez három egyenlet két ismeretlenre. Megpróbálunk találni az egyenletek közül két olyat, hogy azokból az ismeretleneket meghatározhassuk. Ha sikerül, ellenőriznünk kell, kielégítik-e a harmadik egyenletet is. Ha igen, találtunk egy közös pontot. Ha nem, nincs közös pont. Most az első két egyenletből $t = 0$, $\tau = 1$ adódik, de ezek az értékek nem elégítik ki a harmadik egyenletet. ($t = 0$, $\tau = 1$ esetén $x = 2$, $y = 1$. Ez azt jelenti, hogy ha az egyeneseket merőlegesen levetítjük az (x,y)-síkra, akkor vetületeik az (x,y)-sík (2,1) pontjában metszik egymást, de a megfelelő pontok z koordinátái különböznek.) Az egyeneseknek tehát nincs közös pontjuk. A két egyenes kitérő.

24.5. Kérdés. Az egyik egyenes: $x = 2+t$, $y = 1-2t$, $z = t$; a másik egyenes: $x = 3-2t$, $y = 3+4t$, $z = 5-2t$.

24.5.1. Megoldás. A két egyenes párhuzamos ($\mathbf{v}_1 = (1,-2,1)$, $\mathbf{v}_2 = (-2,4,-2)$). A $(2,1,0)$ pont nincs rajta a második egyenesen, tehát nem eshetnek egybe, így egyáltalán nincs közös pontjuk.

25. FELADAT. Ismert, hogy azon pontok mértani helye, amelyek két síktól egyenlő távolságra vannak, szintén sík. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amelynek pontjai két adott síktól egyenlő távolságra vannak!

25.1. Kérdés. A két sík egyenlete: S_1: $2x-2y+z = 2$, S_2: $3y-4z = 6$.

25.1.1. Megoldás. A két sík nem párhuzamos, így a keresett sík a szögfelező sík. A síkok normálvektorai: $\mathbf{n}_1 = (2,-2,1)$, $\mathbf{n}_2 = (0,3,-4)$. A keresett sík normálvektora felezi a normálvektorok szögét. Mivel bármely normálvektorral együtt annak -1-szerese is normálvektor, két megfelelő irányunk is lesz, $\mathbf{n}_1$, és $\mathbf{n}_2$, valamint $\mathbf{n}_1$ és $-\mathbf{n}_2$ szögfelezője. Ez a két irány egymásra merőleges. (A rajzon a metszésvonalra merőleges metszet látható.) Ha két vektor egyenlő hosszú, akkor az összegük éppen felezi a szögüket. $|\mathbf{n}_1| = 3$, $|\mathbf{n}_2| = 5$. Ha az elsőt hárommal, a másodikat öttel szorozzuk, szintén normálvektorokat kapunk, amelyeknek hossza 15. A két szögfelező sík normálvektorai tehát $\mathbf{m}_1 = 5\mathbf{n}_1 + 3\mathbf{n}_2 = (10,-1,-11)$, $\mathbf{m}_2 == 5\mathbf{n}_1 - 3\mathbf{n}_2 = (10,-19,17)$. A sík egyenletéhez a normálvektoron kívül szükségünk van egy pontra is, a két sík egy közös pontjára. Pl. $z = 0$ választással a második egyenletből $y = 2$, az elsőből $x = 3$. A keresett síkok egyenleti $10(x-3)-(y-2)-11(z-0) = 0$, és $10(x-3)-19(y-2)+17(z-0) = 0$.

25.2. Kérdés. A két sík egyenlete: S_1: $2x-2y+z = 2$, S_2: $4x-4y+2z = -8$.

25.2.1. Megoldás. A két sík párhuzamos. Így a megoldás egyetlen olyan sík, amelyik mindkettőtől ugyanakkora távolságban halad, és velük párhuzamos. A normálvektora tehát ugyanaz, mint a síkoké, egy pontja pedig a két sík egy-egy pontját összekötő szakasz felezőpontja (a párhuzamos szelők tétele alapján). Pl. $P_1(0,0,2) \in S_1$, $P_2(0,0,-4) \in S_2$, a P_1P_2 szakasz felezőpontja $F(0,0,-1)$. A keresett sík egyenlete $2x - 2y + z = -1$.

26. FELADAT. Tekintsünk egy metsző egyenespárt. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amelyik átmegy a metszéspontjukon, velük egy síkban van, és a szögüket felezi!

26.1. Kérdés. Az egyenesek egyenletrendszere $x = 1 + t$, $y = -2t$, $z = 2 + 2t$, ill. $x = 6 - t$, $y = -2$, $z = 4$.

26.1.1. Megoldás. Az M metszéspont meghatározása: $1 + t = 6 - \tau$, $-2t = -2$, $2 + 2t = 4$; Az első két egyenletből $t = 1$ és $\tau = 4$, és ennek a harmadik egyenlet is megfelel. Tehát $M(2,-2,4)$. A metszéspontnál, ha az egyenesek nem merőlegesek, két különböző szög van. Az egyenesek irányvektorai $\mathbf{v}_1 = (1,-2,2)$ és $\mathbf{v}_2 = (-1,0,0)$. $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \neq 0$, így az egyenesek nem merőlegesek. Az egyenesek hajlásszöge a kisebbik, tehát a kisebbik szöget kell feleznünk. Két vektor derékszögnél kisebb szöget zár be, ha skalárszorzatuk pozitív, és ha a két vektor egyenlő hosszú, akkor összegük a szögüket felezi. A két egyenesnek tehát ilyen irányvektorait kell tekinteni. $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 < 0$, és $|\mathbf{v}_1| = 3$, $|\mathbf{v}_2| = 1$. Szorozzuk meg $\mathbf{v}_2$-t -3-mal, legyen $\tilde{\mathbf{v}}_2 = (3,0,0)$. Így is a második egyenes irányvektorát kapjuk, és így a két vektor eleget tesz a kívánalmaknak. A keresett egyenes (egyik) irányvektora tehát $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \tilde{\mathbf{v}}_2 = (4,-2,2)$, egyenletrendszere pedig $x = 2 + 4t$, $y = -2 - 2t$, $z = 4 + 2t$.
Ha a kérdés az lenne, hogy olyan egyenest keressünk, amelyik az adott egyenesek mindegyikével azonos szöget zár be, akkor a nagyobbik szög szögfelező egyenese is megoldás. Ez merőleges az elsőre, és (egyik) irányvektora $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 - \tilde{\mathbf{v}}_2 = (-2,-2,2)$, egyenletrendszere pedig $x = 2 - 2t$, $y = -2 - 2t$, $4 + 2t$.

27. FELADAT. Tekintsünk két egyenest, amelyek metszők, vagy párhuzamosak. Adjuk meg azon pontok mértani helyét, amelyek a két egyenestől egyenlő távolságra vannak.

27.1. Kérdés. Az egyenesek: e_1: $x = 1 - t$, $y = 1 + 2t$, $z = 1 - 2t$, ill. e_2: $x = 1 - 2t$, $y = 3t$, $z = -1 - 6t$.

27.1.1. Megoldás. A két egyenes irányvektora $\mathbf{v}_1 = (-1,2,-2)$, ill. $\mathbf{v}_2 = (-2,3,-6)$. A két egyenes nem párhuzamos. A metszéspontjuk az $1-t = 1-2\tau$, $1+2t = 3\tau$, $1-2t = -1-6\tau$ egyenletekből a $t = -2$, $\tau = -1$ paraméterértékeknél az $M(3,-3,5)$ pont. Tudjuk, hogy az egyenesektől egyenlő távolságban levő pontok két síkban helyezkednek el. A keresett síkok merőlegesek az egyenesek síkjára, és tartalmazzák a metszésponton átmenő szögfelező egyeneseket. A metszéspontnál levő két szögfelező egyenes egymásra merőleges. A két sík így egymásra is merőleges. Bármelyik szögfelező irányvektora normálvektora a másik szögfelezőt tartalmazó síknak. Szögfelező irányt akkor kapunk, ha egyenlő hosszúságú vektorokat adunk össze. $|\mathbf{v}_1| = 3$, $|\mathbf{v}_2| = 7$. Ha nem akarunk törtekkel számolni, az elsőt héttel, a másodikat hárommal szorozzuk, így a szögfelezők irányai $7\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 = (-13, 23, -32)$, és mivel egy vektor (-3)-szorosa ugyanolyan hosszú, mint a háromszorosa, és szintén irányvektor, a másik szögfelező iránya $7\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 = (-1, 5, 4)$. A keresett síkok egyenletei tehát: $-13(x-3) + 23(y+3) - 32(z-5) = 0$, ill. $-(x-3) + 5(y+3) + 4(z-5) = 0$.

27.2. Kérdés. Az egyenesek: e_1: $x = 1 - t$, $y = 1 + 2t$, $z = 1 - 2t$, ill. e_2: $x = 1 + 2t$, $y = -4t$, $z = -1 + 4t$.

27.2.1. Megoldás. A két egyenes irányvektora $\mathbf{v}_1 = (-1, 2, -2)$, ill. $\mathbf{v}_2 = (2, -4, 4)$. Az egyenesek párhuzamosak, így a keresett mértani hely egy olyan sík, amelyik az egyenesekkel párhuzamos, a síkjukra merőleges, és tartalmazza a két egyenest összekötő bármilyen szakasz felezőpontját. Az egyik egyenes egy pontja $P(1, 1, 1)$, a másiké $Q(1, 0, -1)$, a felezőpont $F(1, \frac{1}{2}, 0)$. A keresett sík normálvektora merőleges az egyenesek irányára, és párhuzamos a síkjukkal. $\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{v}_1$ merőleges az egyenesek síkjára, $\mathbf{n} = \mathbf{v_1} \times (\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{v_1})$ merőleges $\mathbf{v_1}$-re, és párhuzamos a síkkal. $\mathbf{n} = (-1, 2, -2) \times ((0, -1-2) \times (-1, 2, -2)) = (2, -13, -14)$, a sík egyenlete pedig $2(x-1) - 13(y - \frac{1}{2}) - 14(z - 0) = 0$.

28. FELADAT. Adott egy egyenes és rajta egy pont. Adjuk meg az egyenes azon pontjait, amelyek az adott ponttól adott távolságra vannak!

28.1. Kérdés. Az egyenes egyenletrendszere: $x = 1 + t$, $y = 3 - 2t$, $z = 5 + 2t$. Az adott pont a $t = 2$ paraméterértékhez tartozik, a távolság pedig legyen 5 egység.

28.1.1. Megoldás. A $t = 2$ paraméterértékhez tartozó pont $P(3, -1, 9)$, helyvektorát jelöljük $\mathbf{p}$-vel. Ha ehhez a vektorhoz hozzáadunk egy olyan vektort, ami az irányvektorral párhuzamos, akkor szintén az egyenes egy pontjának helyvektorát kapjuk, és ha a hozzáadott vektor hossza 5, akkor a két pont távolsága 5. Az egyenes irányvektora $\mathbf{v} = (1, -2, 2)$, $|\mathbf{v}| = 3$. Így $|\frac{5}{3}\mathbf{v}| = |(\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{10}{3})| = 5$, és $A(3 + \frac{5}{3}, -1 - \frac{10}{3}, 9 + \frac{10}{3}) = (\frac{14}{3}, -\frac{13}{3}, \frac{37}{3})$ az egyenesnek olyan pontja, amelyik P-től öt egységnyire van az egyik irányban (az adott paraméterezéssel a paraméter növekedésének irányában). Hasonlóképpen $|-\frac{5}{3}\mathbf{v}| = |(-\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{10}{3})| = 5$, és $B(3 - \frac{5}{3}, -1 + \frac{10}{3}, 9 - \frac{10}{3}) = (\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{17}{3})$ az egyenesnek olyan pontja, amelyik P-től öt egységnyire van a másik irányban.

29. FELADAT. Adott egy sík és egy távolság. Adjuk meg azoknak a síkoknak az egyenleteit, amelyek az adott síktól az adott távolságban haladnak!

29.1. Kérdés. A sík egyenlete $x - 2y + 2z = 6$, a távolság pedig 5 egység.

29.1.1. Megoldás. A keresett síkok párhuzamosak az adott síkkal. Jelöljük az adott sík egy P pontjának helyvektorát $\mathbf{p}$-vel. Ha $\mathbf{p}$-hez hozzáadunk egy olyan vektort, amelyik merőleges a síkra és a hossza 5, akkor egy olyan pontot kapunk, amelynek az adott síktól való távolsága 5, tehát benne van a keresett síkban. Az adott sík $\mathbf{n} = (1, -2, 2)$ normálvektora merőleges a síkra, és $|\mathbf{n}| =$

$|(1,-2,2)| = 3$. $|\frac{5}{3}\mathbf{n}| = |(\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{10}{3})| = 5$ és a sík egy pontja $P(6,0,0)$. Az $A(6+\frac{5}{3}, 0-\frac{10}{3}, 0+\frac{10}{3}) = (\frac{23}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{10}{3})$ pont 5 egysényi távolságban van az adott síktól, és a rajta átmenő, az adott síkkal párhuzamos sík egyenlete: $x - 2y + 2z = \frac{23}{3} - 2(-\frac{10}{3}) + 2 \cdot \frac{10}{3}$, azaz $x - 2y + 2z = 21$. Hasonlóképpen $|-\frac{5}{3}\mathbf{n}| = |(-\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{10}{3})| = 5$, és a $B(6-\frac{5}{3}, 0+\frac{10}{3}, 0-\frac{10}{3}) = (\frac{13}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{10}{3})$ pont szintén 5 egységnyi távolságban van, csak a másik oldalon. A B-n átmenő sík egyenlete $x - 2y + 2z = \frac{13}{3} - 2 \cdot \frac{10}{3} + 2 \cdot (-\frac{10}{3})$, azaz $x - 2y + 2z = -9$.