Felsőbb Matematika (2010-11 ősz) — 2. gyakorlat

1. *Egyenletrendszer megoldásának felírása blokkmátrixokkal* Tegyük fel, hogy az r rangú $\mathbf{A}$ mátrix első r oszlopa lineárisan független – ez oszlopcserékkel mindig elérhető. Jelölje $\mathbf{B}_r$ az $\mathbf{A}$ első r oszlopából álló mátrixot, és legyen az $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ bővített mátrix redukált lépcsős alakja

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_r & \mathbf{S} & \mathbf{d}_r \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

ahol $\mathbf{d}_r$ egy r-dimenziós vektor. Ekkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszer megoldható, és megoldása

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_r \\ \mathbf{0}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s \end{bmatrix} \mathbf{t}_s$$

ahol s a szabad változók száma, azaz $s = n - r$, és $\mathbf{t}_s$ a szabad paraméterek vektora, ráadásul $\mathbf{A} = \mathbf{B}_r[\mathbf{I}_r|\mathbf{S}]$ és $\mathbf{b} = \mathbf{B}_r\mathbf{d}_r$.

Megoldás. Mivel $[\mathbf{I}_r|\mathbf{S}]$ az $\mathbf{A}$ redukált lépcsős alakja, ezért ennek bármely oszlopa az $\mathbf{A}$ mátrix azonos sorszámú oszlopának koordinátás alakja az $\mathbf{B}_r$ oszlopvektoraiban, mint bázisban felírva. Ez épp azt jelenti, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{B}_r[\mathbf{I}_r|\mathbf{S}]$. Ez az oszloptér bármely oszlopára, így $\mathbf{b}$-re is igaz, hisz $[\mathbf{A}|\mathbf{b}]$ redukált lépcsős alakja szerint az egyenletrendszer megoldható, így $\mathbf{b}$ eleme az oszloptérnek. Eszerint tehát $\mathbf{b} = \mathbf{B}_r\mathbf{d}_r$.

Az, hogy minden megoldás fölírható ilyen alakba, a Gauss–Jordan-módszerből következik. Meg kell még mutatni, hogy a tételben felírt $\mathbf{x}$ vektor valóban megoldás.

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{B}_r \left[\mathbf{I}_r\ \mathbf{S}\right] \left(\begin{bmatrix} \mathbf{d}_r \\ \mathbf{0}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{S} \\ \mathbf{I}_s \end{bmatrix} \mathbf{t}_s \right) \\ &= \mathbf{B}_r \left(\mathbf{d}_r - \mathbf{S}\mathbf{t}_s + \mathbf{S}\mathbf{t}_s\right) = \mathbf{B}_r\mathbf{d}_r \\ &= \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Ez bizonyítja az állítást.

2. Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ invertálható mátrixok, akkor a következő ún. blokkdiagonális mátrixok invertálhatók, és

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix},$$

illetve

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}.$$

ahol $\mathbf{B}$ tetszőleges, de megfelelő típusú mátrix. Hasonlóan, ha $\mathbf{A}$ és $\mathbf{D}$ négyzetes mátrixok, akkor

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & -\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X} & \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{X}\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{X} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$, és feltételezzük, hogy minden felírt mátrixinverz létezik. Ezt felhasználva számítsuk ki az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A képletek egyszerű behelyettesítéssel ellenőrizhetők. Az inverz:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Írjuk fel a $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,2,3),(1,1,2)\}$ bázisról a $\mathcal{C} = \{(7,3,3),(8,1,2),(4,4,3)\}$ bázisra való áttérés mátrixát, és határozzuk meg a $(\mathbf{v})_\mathcal{B} = (3,2,1)$ vektor $\mathcal{C}$ bázisbeli alakját!

Megoldás. *1. megoldás:* A megadott vektorokból fölírhatók a két bázisból a standard bázisba való áttérés mátrixai:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

amiből $\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}} = \mathbf{A}^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}\mathbf{A}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{B}}$, amiből egy invertálás és egy mátrixszorzás után megkapható az áttérés mátrixa:

$$\mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 7 & 47 & 35 \\ -4 & -27 & -20 \\ -4 & -28 & -21 \end{bmatrix}$$

2. megoldás: Az áttérés mátrixának oszlopai a $\mathcal{B}$ bázis vektorainak $\mathcal{C}$ bázisban kifejezett alakjai. Ez egy szimultán egyenletrendszerből kapható meg:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 7 & 8 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & 47 & 35 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -27 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -28 & -21 \end{array}\right]$$

Innen $[\mathbf{v}]_\mathcal{C} = \mathbf{A}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}[\mathbf{v}]_\mathcal{B}$ elvégzésével kapjuk, hogy $(\mathbf{v})_\mathcal{C} = (150, -86, -89)$.

4. Legyen A egy 10×10-es valós mátrix. Jelölje r_i az A^i rangját. Lehet-e az $(r_1, r_2, \ldots)$ sorozat egyenlő az alábbiakkal? *(a)* $(5, 6, \ldots)$, *(b)* $(9, 8, 7, \ldots, 4, 4 \ldots)$, *(c)* $(10, 9, 8, \ldots)$, *(d)* $(8, 5, \ldots)$.

Megoldás. Az A rangja megegyezik képterének dimenziójával, az A^i rangja az A^{i-1} képtere A általi képének dimenziójával.

(a) Az A leképezés az $\mathbb{R}^{10}$ teret egy 5-dimenziós részébe képzi, így ez az altér saját magába képződik, tehát nem lehet 5-nél több dimenziós: ez a sorozat nem lehetséges.

(b) Ha A a tér bázisán az alábbi módon hat, a rangok a megkívánt sorozatot adják: $\mathbf{e}_6 \mapsto \mathbf{e}_5 \mapsto \mathbf{e}_4 \mapsto \mathbf{e}_3 \mapsto \mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{0}$, és $\mathbf{e}_7$, $\mathbf{e}_8$, $\mathbf{e}_9$, $\mathbf{e}_{10}$ helyben maradnak. E leképezés mátrixa és annak hatványai is könnyen felírhatók.

(c) Ha A rangja 10, akkor determinánsa nem 0, így hatványaié sem, vagyis 10-zel csak a $10, 10, \ldots$ sorozat kezdődik.

(d) Ha A rangja 8, akkor magterének dimenziója 2, így egy 8-dimenziós tér képe legalább 6. E sorozat nem lehetséges.

5. Legyen $\mathbf{a} = (-1, -2, -3)$, $\mathbf{b} = (-1, 2, 3)$. Határozzuk meg az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{a}\mathbf{b}^T\mathbf{x}$ leképezés kép- és magterét!

Megoldás. A magtér az $(\mathbf{a}\mathbf{b}^T)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyenletrendszer megoldástere:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \\ -3 & -6 & -9 & 0 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

és ebből a megoldás $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y-3z \\ y \\ z \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, a $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorok által kifeszített altér. Képterét a mátrix oszlopai generálják, s mivel mindegyik az $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ skalárszorosa, a képtér az ezen vektor által kifeszített egydimenziós altér (általában: a lépcsős alak vezéregyeseket tartalmazó oszlopainak megfelelő oszlopok az eredeti mátrixban bázisát adják a képtérnek).

6. Adjunk meg olyan lineáris transzformációt $\mathbb{R}^3$-ben (ha létezik), amely a $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ vektorokat a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ vektorokba viszi, ahol $\mathbf{v}_1 = (1,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,-1,1)$, $\mathbf{v}_3 = (2,-1,3)$, és

(i) $\mathbf{w}_1 = (1,0,2)$, $\mathbf{w}_2 = (1,1,1)$, $\mathbf{w}_3 = (1,1,2)$;

(ii) $\mathbf{w}_1 = (1,0,2)$, $\mathbf{w}_2 = (1,1,1)$, $\mathbf{w}_3 = (3,1,5)$;

(iii) $\mathbf{w}_1 = (1,0,2)$, $\mathbf{w}_2 = (1,1,1)$, $\mathbf{w}_3 = (2,1,3)$;

Írjuk fel e leképezés mátrixát!

Megoldás. Mindhárom kérdés megválaszolható úgy, hogy megoldjuk az $\mathbf{A}\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_i$ $(i = 1,2,3)$ egyenletekből álló 9-ismeretlenes egyenletrendszert, ahol az ismeretlenek az $\mathbf{A}$ mátrix elemei. Egyetlen mátrixszorzatba tömörítve a fenti egyenleteket, megoldandó az $\mathbf{AW} = \mathbf{V}$ mátrixegyenlet, ahol $\mathbf{A}$ az ismeretlen, és $\mathbf{W}$ illetve $\mathbf{V}$ a $\mathbf{w}_i$, illetve $\mathbf{v}_i$ vektorokból álló mátrix. Az *(i)* kérdésben W invertálható, ezért a megoldás az $A = VW^{-1}$ kiszámolásával is megoldható, de mindhárom esetben használható az elemi sorműveletekkel való megoldás. Ha mindkét oldal transzponáltját vesszük, az ismeretlenek a hagyományos helyen jelennek meg, így a $W^TA^T = V^T$ egyenletben az A^T oszlopvektoraiban három háromismeretlenes egyenletrendszert, vagyis egy szimultán egyenletrendszert kapunk. Ezek megoldása:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Tehát az *(i)* megoldása

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

A *(ii)* esetén végtelen sok megoldást kapunk:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

A jobb oldali rész első oszlopát véve egy egyenletrendszer jobb oldalának, az $x + 2z = 1$, $y - z = -1$ egyenletrendszert kapjuk, melynek megoldása $z = r$, $y = -1 + r$, $x = 1 - 2r$, ahol r szabad paraméter. Hasonlóan megoldva a másik két egyenletrendszert is, majd a belőlük képzett mátrixot transzponálva kapjuk *(ii)* megoldását:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1-2r & -1+r & r \\ -2s & -1-s & s \\ 1-2t & -t & t \end{bmatrix}.$$

Azért kaptunk végtelen sok megoldást, mert a $\mathbf{w}_i$ vektorok összefüggőek, egy síkot feszítenek ki, és a köztük lévő összefüggések megegyeznek a $\mathbf{v}_i$ vektorok közti összefüggésekkel. Ez a síkon kívüli vektorok leképzésére még végtelen sok lehetőséget hagy. A *(iii)* esetén nincs megoldás, mert bár a $\mathbf{w}_i$ vektorok itt is összefüggőek, de köztük más összefüggés van, mint a $\mathbf{v}_i$ vektorok közt:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -1 & 3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

7. Mibe viszi az $xy + z = 0$ felületet az a lineáris transzformáció, amelynek mátrixa $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$?

Megoldás. Az (x,y,z) képe $(x',y',z') = (x, x+y, z)$, amiből $(x,y,z) = (x', y'-x', z')$, így az $xy + z = 0$ formulába való helyettesítés után kapjuk, hogy a felület egyenlete $x'y' - x'^2 + z' = 0$.

8. Adjuk meg az alábbi lineáris transzformációk mátrixát a megadott bázisokban:

(a) az $x - 2y + z = 0$ síkra való merőleges vetítés a standard bázisban;

(b) $f : (x,y,z) \mapsto (2x - y + z, x + z, y - 3z)$ a standard, illetve az $\{(1,1,0), (0,1,0), (2,1,1)\}$ bázisban;

(c) a sík tükrözése az $y = 2x$ egyenesre a standard, illetve az $\{(1,2), (-2,1)\}$ bázisban;

(d) $\mathbb{R}^n$ vetítése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektor által kifeszített eltérre a standard bázisban;

(e) $\mathbb{R}^n$ vetítése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra a standard bázisban;

(f) $\mathbb{R}^n$ tükrözése az $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektorra merőleges hipersíkra a standard bázisban.

Megoldás. *(a)* Az (a,b,c) ponton átmenő, az $x - 2y + z = 0$ síkra merőleges egyenes paraméteres vektoregyenlete: $(x,y,x) = (a,b,c) + t(1,-2,1) = (a+t, b-2t, c+t)$. Az egyenes metszéspontja a síkkal az $(a+t) - 2(b-2t) + (c+t) = 0$ egyenletből kapható $t = -\frac{1}{6}a + \frac{2}{6}b - \frac{1}{6}c$ paraméterértékből $(\frac{5}{6}a + \frac{2}{6}b - \frac{1}{6}c, \frac{2}{6}a + \frac{2}{6}b + \frac{2}{6}c, -\frac{1}{6}a + \frac{2}{6}b + \frac{5}{6}c)$. Ebből leolvasható, hogy az

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6}a + \frac{2}{6}b - \frac{1}{6}c \\ \frac{2}{6}a + \frac{2}{6}b + \frac{2}{6}c \\ -\frac{1}{6}a + \frac{2}{6}b + \frac{5}{6}c \end{bmatrix}$$

leképezést megvalósító mátrix

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{5}{6} \end{bmatrix}.$$

(b) Az f transzformáció mátrixa a $\mathcal{E} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ standard bázisban $\mathbf{A}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. A $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\} = \{(1,1,0), (0,1,0), (2,1,1)\}$ bázisban az

$$\begin{aligned} f(\mathbf{c}_1) &= (1,1,1) = -\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3 \\ f(\mathbf{c}_2) &= (-1,0,1) = -3\mathbf{c}_1 + 2\mathbf{c}_2 + \mathbf{c}_3 \\ f(\mathbf{c}_3) &= (4,3,-2) = 8\mathbf{c}_1 - 3\mathbf{c}_2 - 2\mathbf{c}_3 \end{aligned}$$

összefüggésből

$$\mathbf{A}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(a mátrix oszlopai a báziselemek képének koordinátavektorai). Egy másik megoldási lehetőséghez jutunk, ha az áttérés mátrixával számolunk:

$$\mathbf{C}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}} = \mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Így $\mathbf{A}_{\mathcal{C}} = \mathbf{C}_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{E}}\mathbf{A}_{\mathcal{E}}\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1}\mathbf{A}_{\mathcal{E}}\mathbf{C}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}$ fölhasználásával

$$\mathbf{A}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(c) Érdemes először a $\mathcal{C} = \{(1,2),(-2,1)\}$ bázisban fölírni a mátrixot, mert ennek elemei sajátvektorok, így a képüket meghatározni és koordinátázni is könnyű: $\mathbf{c}_1 = (1,2)$ és $\mathbf{c}_2 = (-2,1)$ jelöléssel

$$f(\mathbf{c}_1) = \mathbf{c}_1 = 1\cdot\mathbf{c}_1 + 0\cdot\mathbf{c}_2$$
$$f(\mathbf{c}_2) = -\mathbf{c}_2 = 0\cdot\mathbf{c}_1 + (-1)\cdot\mathbf{c}_2$$

tehát f mátrixa $\mathcal{C}$ szerint $\mathbf{A}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Az $\mathbf{A}_{\mathcal{E}}$ standard mátrixra $\mathbf{A}_{\mathcal{E}} = \mathbf{P}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}\mathbf{A}_{\mathcal{C}}\mathbf{P}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}}^{-1}$, ahol $\mathbf{P}_{\mathcal{E}\leftarrow\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, így azt kapjuk, hogy $\mathbf{A}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

(d) Keressük $\mathbf{x} \mapsto \mathrm{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ mátrixát. Ennek i-edik oszlopa

$$\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{e}_i) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_i}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \frac{a_i}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}},$$

amiből a vetítés mátrixa

$$\mathbf{P} = \left[\frac{a_1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} \;\middle|\; \frac{a_2}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}} \;\middle|\; \dots \;\middle|\; \frac{a_n}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\right] = \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

(e) Keressük az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - \mathrm{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ mátrixát:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{1}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

(f) Keressük az $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - 2\,\mathrm{proj}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ mátrixát:

$$\mathbf{P} = \mathbf{I} - \frac{2}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}\mathbf{a}\mathbf{a}^T$$

9. Határozzuk meg a $\mathbf{P}$ és $\mathbf{R}$ mátrixok LU-felbontását, majd ezt fölhasználva

1. oldjuk meg a $\mathbf{Px} = (0,2,4,6)$ egyenletrendszert,
2. invertáljuk az $\mathbf{R}$ mátrixot, ahol

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A Pascal-háromszög LU-felbontása két Pascal-háromszöget ad:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A másik felbontás is hasonlóan varázslatos:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Az egyenletrendszer megoldása $(-2,2,0,0)$.
2. Az inverz:

$$\mathbf{R}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

10. A Gram–Schmidt-ortogonalizációval keressünk ortogonális és ortonormált bázist

(a) $\mathbb{R}^3$-ben a $\{(2,0,1),(1,1,1),(1,2,3)\}$ bázisból kiindulva,
(b) $\mathbb{R}^4$-nek a $(0,2,1,0)$, $(1,-1,0,0)$, $(1,1,1,0)$, $(1,2,0,-1)$ vektorok által kifeszített alterében.

Megoldás. *(a)*

$$\mathbf{v}_1 = (2,0,1)$$
$$\mathbf{v}_2 = (1,1,1) - \frac{(1,1,1)\cdot(2,0,1)}{|(2,0,1)|^2}(2,0,1) = \left(\frac{-1}{5},1,\frac{2}{5}\right)$$
$$\mathbf{v}_3 = (1,2,3) - \frac{(1,2,3)\cdot(2,0,1)}{|(2,0,1)|^2}(2,0,1)$$
$$- \frac{(1,2,3)\cdot(\frac{-1}{5},1,\frac{2}{5})}{|(\frac{-1}{5},1,\frac{2}{5})|^2}\left(\frac{-1}{5},1,\frac{2}{5}\right) = \left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$$

A normált vektorok: $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1)$, $\mathbf{u}_2 = \frac{5}{\sqrt{30}}(-1,5,2)$, $\mathbf{u}_3 = \frac{2}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$.

(b) $\frac{1}{\sqrt{5}}(0,2,1,0)$, $\frac{1}{\sqrt{30}}(5,-1,2,0)$, $(0,0,0,0)$, $\frac{1}{\sqrt{10}}(1,1,-2,-2)$.

HF. Az LU-felbontásnak több változatát használják.

1. Az egyik az LDU-felbontás, ahol az $\mathbf{A} = \mathbf{LDU}$ szorzatban $\mathbf{D}$ diagonális mátrix, továbbá $\mathbf{L}$ és $\mathbf{U}$ főátlójában is csupa 1-es szerepel. Megmutatható, hogy ha $\mathbf{A}$-nak van LU-felbontása, akkor az LDU-felbontás egyértelmű. Határozzuk meg az

$$\begin{bmatrix} 3 & 10 & 10 \\ 2 & 4 & 11 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

LDU-felbontását!

2. A másik fontos változat a PLU-felbontás. Ezt akkor használjuk, ha az elimináció megakad, vagy azért, mert a következő oszlop első eleme 0, vagy mert numerikus okokból másik elemmel szeretnénk eliminálni, így egy sorcserére lenne szükség. E sorcseréket előre végrehajtva, az $\mathbf{A}$ olyan alakra hozható, melynek már van LU-felbontása. A sorcserék megvalósíthatók egy $\mathbf{P}$ permutációs mátrixszal való szorzással is (a permutációs mátrix minden sorában és minden oszlopában pontosan egy 1-es van, a többi 0). Ekkor tehát $\mathbf{PA} = \mathbf{LU}$, vagyis $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{LU}$. Határozzuk meg az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

mátrix PLU-felbontását, és igazoljuk, hogy ha $\mathbf{P}$ permutációs mátrix, akkor $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$.