

1. Bizonyítsuk be, hogy egy $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix pontosan akkor ortogonális (vagyis $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$), ha \mathbf{A} oszlopai (és sorai) ortonormált rendszert alkotnak.

Megoldás. Jelölje \mathbf{v}_k az \mathbf{A} mátrix k . oszlopát. $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}$ pontosan azt jelenti, hogy $\mathbf{v}_k \mathbf{v}_\ell = 1$ ha $k = \ell$ és 0 különben.

2. Bizonyítsuk be, hogy $(n \times n)$ -es ortogonális mátrixok szorzata és inverze is ortogonális.

Megoldás. Legyenek $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonális mátrixok. Ekkor $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T = (\mathbf{AB})^T$. Hasonlóan, $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A} = (\mathbf{A}^T)^T = (\mathbf{A}^{-1})^T$.

3. Önadjungáltak-e, unitérek-e a következő komplex mátrixok:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Megoldás. (a) nem önadjungált, mert tisztán valós elemekből áll, de nem szimmetrikus. Nem is unitér, mert adjungáltjával (most transzponáltjával) összeszorozva $2\mathbf{I}$ -t kapunk. (b) nyilván önadjungált, de nem unitér. (c) nem önadjungált és nem is unitér.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ önadjungált és $\mathbf{M} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitér mátrixok, akkor $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}$ önadjungált.

Megoldás. $(\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M})^H = \mathbf{M}^H \mathbf{A}^H (\mathbf{M}^{-1})^H = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} (\mathbf{M}^H)^H = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M}$.

5. Adjunk meg ortonormált bázist az $\mathbf{a}_1 = (1, 2, -1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (2, 1, 0, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, -1, 1, -1) \in \mathbb{R}^4$ vektorok által generált altérben.

Megoldás. Gram-Schmidt ortogonalizációval: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{a}_1$, \mathbf{v}_2 párhuzamos $\mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \mathbf{v}_1 = (\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$ -vel, például $\mathbf{v}_2 = (4, -1, 2, 3)$, \mathbf{v}_3 párhuzamos $\mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{a}_3 \mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|} \mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{a}_3 \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|} \mathbf{v}_2 = (\frac{4}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{7}{5})$ -vel, például $\mathbf{v}_3 = (4, -1, 2, -7)$. Kaptuk tehát a $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ortogonális bázist az $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \rangle$ altérben, ebből normálással adódik egy ortonormált bázis is.

6. Legyenek $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ alterek. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$\dim \langle V \cup W \rangle = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V \cap W).$$

Megoldás. Legyen \mathcal{B} bázis $V \cap W$ -ben. Egészítsük ezt ki V és W egy-egy bázisává: $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ és $\mathcal{B} \cup \mathcal{D}$. Belátjuk, hogy $\mathcal{B} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ bázis $\langle V \cup W \rangle$ -ben, ebből az állítás már azonnal adódik. \mathcal{D} nyilván generálja $\langle V \cup W \rangle$ -t. Indirekt tegyük fel, hogy \mathcal{D} nem független rendszer. Ekkor elemeinek egy $\mathbf{0}$ -t adó lineáris kombinációja $\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ alakba vonható össze, ahol $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$, $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$ és $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$, továbbá legalább egy (tehát legalább kettő) vektor nem $\mathbf{0}$. Ha $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, akkor $\mathbf{c} = -\mathbf{b} - \mathbf{d} \in W$, így $\mathbf{c} \in V \cap W$, de $\mathcal{C} \cap V \cap W = \emptyset$, ellentmondás. Hasonlóan, $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ is ellentmondásra vezet.

7. Adjuk meg az $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ altérre való merőleges vetítés mátrixát. Írjuk fel az $(1, 2, 0)$ vektort egy S -beli és egy rá merőleges vektor összegeként.

Megoldás. 1. megoldás: Elemi térgometriával könnyen kiszámolható $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ és $(0, 0, 1)$ képei ennél a lineáris transzformációnál, a leképezés mátrixa ezen képvektorokból, mint oszlopokból álló mátrix.

2. megoldás: Könnyen megoldható, hogy $\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$ bázisa S -nek. Legyen $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Ekkor az ismert képlet alapján az S -re való merőleges vetítés mátrixa

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Tetszőleges \mathbf{v} vektor felbontását egy S -beli és egy S -re merőleges vektor összegére a $\mathbf{v} = \mathbf{P}\mathbf{v} + (\mathbf{v} - \mathbf{P}\mathbf{v})$ képlet adja, ebből $(1, 2, 0) = (0, 1, -1) + (1, 1, 1)$.

8. Mutassuk meg, hogy egy $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix pontosan akkor egy k dimenziós altérre való merőleges vetítés mátrixa, ha $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$ és $r(\mathbf{P}) = k$.

Megoldás. Legyen \mathbf{P} egy k dimenziós altérre való merőleges vetítés mátrixa. Ekkor $r(\mathbf{P}) = \dim(\text{Im}\mathbf{P}) = k$. A másik két követelmény helyett a velük ekvivalens $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T\mathbf{P}$ egyenlőséget igazoljuk. Legyenek $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ tetszőlegesek. Ekkor $(\mathbf{P}\mathbf{a})^T(\mathbf{b} - \mathbf{P}\mathbf{b}) = 0$, mert az első vektor a képtérben van a második pedig merőleges rá, továbbá

$$(\mathbf{P}\mathbf{a})^T(\mathbf{b} - \mathbf{P}\mathbf{b}) = \mathbf{a}^T\mathbf{P}^T(\mathbf{b} - \mathbf{P}\mathbf{b}) = \mathbf{a}^T(\mathbf{P}^T\mathbf{b} - \mathbf{P}^T\mathbf{P}\mathbf{b}) = \mathbf{a}^T(\mathbf{P}^T - \mathbf{P}^T\mathbf{P})\mathbf{b} = \mathbf{a}^T(\mathbf{P} - \mathbf{P}^T\mathbf{P})^T\mathbf{b}.$$

Tehát minden \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorra $\mathbf{a}^T(\mathbf{P} - \mathbf{P}^T\mathbf{P})^T\mathbf{b} = 0$, de ez csak úgy lehetséges, ha $\mathbf{P} - \mathbf{P}^T\mathbf{P}$ a csupa 0-t tartalmazó mátrix.

Visszafelé: Legyen $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy a feltételeknek eleget tevő mátrix és legyen $S = \text{Im}\mathbf{P}$. Belátjuk, hogy \mathbf{P} az S -re merőleges vetítés mátrixa. Tetszőleges $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\mathbf{a}^T(\mathbf{P} - \mathbf{P}^T\mathbf{P})^T\mathbf{b} = 0$, amiből az előző gondolatmenettel kapjuk, hogy $\mathbf{P}\mathbf{a} \perp \mathbf{b} - \mathbf{P}\mathbf{b}$ vagyis \mathbf{P} merőleges vetítés.

Hf 1. Legyen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy tetszőleges mátrix. Mutassuk meg, hogy \mathbf{A} és $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ nulltere megegyezik.

Hf 2. Legyenek $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ altérek. Pontosán mikor altér $V \cup W$?