# Felsőbb Matematika (2010-11 ősz) 4. gyakorlat

**1.** Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{b}$ merőleges az $\mathbf{A}$ oszlopterére, és $\mathbf{A}$ oszlopvektorai lineárisan függetlenek, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ optimális megoldása $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

**Megoldás.** $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b} = \mathbf{0}$, tehát $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tényleg megoldása az $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ egyenletnek, és mivel $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ invertálható, ezért ez az egyetlen megoldása.

**2.** Mutassuk meg, hogy ha $\mathbf{A}$ oszlopai lineárisan függetlenek és $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ a QR-felbontás, akkor az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenletrendszerhez tartozó normálegyenlet-rendszer $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$, és az eredeti egyenletrendszer optimális megoldása $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$.

**Megoldás.** $\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$-ba behelyettesítve $\mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{QRx} = \mathbf{R}^T\mathbf{Rx} = \mathbf{R}^T\mathbf{Q}^T\mathbf{b}$ és $\mathbf{R}^T$ invertálható, ezért egyszerűsíthetünk vele: $\mathbf{Rx} = \mathbf{Q}^T\mathbf{b}$. Ennek csak egy megoldása van $\hat{\mathbf{x}}$.

**3.** Hogyan illesztenénk mért $(t_i, y_i)$ adatpárokra egy $y = Ae^{\alpha t} + B\cos\beta t + C\sin\beta t$ alakú görbét, ha $\alpha$ és $\beta$ ismert paraméterek, és $A$, $B$ és $C$ értékére kell optimális (legkisebb négyzetek elvének megfelelő) becslést adni. Írjuk fel az egyenletrendszert és a hozzá tartozó normálegyenletet-rendszert.

**Megoldás.** $\mathbf{M}$ $i$-edik sora $(e^{\alpha t_i}, \cos\beta t_i, \sin\beta t_i)$, az egyenletrendszer $\mathbf{M}\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \mathbf{Y}$. Beszorozni $\mathbf{M}^T$-vel.

**4.** Hozzuk ortogonális (unitér) hasonlósági transzformációval felső háromszögalakra az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & -3 \\ 3 & 17 & -6 \\ -12 & 14 & 4 \end{bmatrix}$$

mátrixot!

**Megoldás.** A karakterisztikus polinom $-x^3 + 28x^2 - 245x + 686 = (7-x)^2(14-x)$. A 7 kétszeres sajátérték, a sajátaltér 1-dimenziós, sajátvektor $\mathbf{x}_1 = (2, 3, 6)$, a 14-hez tartozó sajátvektor $\mathbf{x}_2 = (9, 17, 13)$, diagonalizálni nem lehet.

Az első sajátvektorhoz választunk egy ortonormált bázist, abból képezzük az $\mathbf{U}_1$ és az $\mathbf{U}_1^T\mathbf{AU}_1$ mátrixot:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{U}_1 = [\mathbf{x}_1|\mathbf{u}_2|\mathbf{u}_3] = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 3 & -2 & -6 \\ 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_1^T\mathbf{AU}_1 = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -21 \\ 0 & 14 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{A}_1 & \\ 0 & & & \end{array}\right]$$

tehát

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

A 7 sajátértékhez tartozó sajátvektor $(0, 1)$, rá merőleges az $(1, 0)$. Így

$$\mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbf{U}_2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Innen

$$\mathbf{U} = \mathbf{V}_1\mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 2/7 & 3/7 & -6/7 \\ 3/7 & -6/7 & -2/7 \\ 6/7 & 2/7 & 3/7 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{U}^T\mathbf{AU} = \begin{bmatrix} 7 & -21 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 14 \end{bmatrix}$$

**5.** Mutassuk meg, hogy minden normális felső háromszögmátrix diagonális.

**Megoldás.** Legyen $\mathbf{A}$ normális felső háromszögmátrix és jelölje $\mathbf{v}_k$ az $\mathbf{A}$ $k$. oszlopát illtve $\mathbf{s}_k$ az $\mathbf{A}$ $k$. sorát. Ekkor $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{s}_1$ első eleme megegyezik $(a_{11})$, továbbá $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ bal felső eleme $\mathbf{v}_1^T\mathbf{v}_1 = a_{11}^2$, $\mathbf{AA}^T$ bal felső eleme $\mathbf{s}_1\mathbf{s}_1^T \geq a_{11}^2$, amiből már következik, hogy $\mathbf{A}$ első sorában a főátlón kívül minden elem 0. Hasonlóan látható be a többi sorra is.

**6.** Diagonalizáljuk ortogonálisan az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

mátrixot és írjuk fel a spektrálfelbontását, azaz állítsuk elő $\mathbf{A} = \sum_\lambda \lambda \mathbf{P}_\lambda$ alakban, ahol $\mathbf{P}_\lambda$ a $\lambda$ sajátértékhez tartozó sajátaltérre való merőleges vetítés mátrixa.

**Megoldás.** Karakterisztikus polinom: $-x^3+6x^2-9x$, innen $\lambda_{1,2} = 3$, $\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$, a $(0,1,-1)$ sajátvektor ortogonalizálása után $\mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)$, $\lambda_3 = 0$, $\mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Ortogonálisan diagonalizáló mátrix:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

ahonnan $\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \operatorname{diag}(3,3,0)$.

A spektrálfelbontás ortonormált vektorokkal, ahonnan az alterekre vetítő változat is megkapható:

$$\begin{aligned} 3\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1^T + 3\mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^T + 0\mathbf{x}_3\mathbf{x}_3^T &= 3\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\cdot\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + 0\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 3\cdot\begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**7.** A Schur-féle háromszögalakra hozási tétellel bizonyítsuk Cayley-Hamilton tételét, mely szerint ha $p(x)$ az $\mathbf{A}$ mátrix karakterisztikus polinomja, akkor $p(\mathbf{A}) = \mathbf{O}$.

**Megoldás.** Az $\mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{U}$ felső háromszög alakú, melynek átlójában a sajátértékek vannak. Az algoritmusban a sajátértékek sorrendje tetszőleges, így elérhető, hogy az azonos sajátértékek egymás mellett szerepeljenek. Legyen $\lambda_i$ multiplicitása $m_i$. A

$$\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_i & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i\times m_i}$$

háromszögmátrixra $\mathbf{H}_i^{m_i} = \mathbf{O}$. Ezt kihasználva a

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}^H\mathbf{A}\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & * & \dots & * \\ 0 & \mathbf{H}_2 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{H}_k \end{bmatrix}$$

jelöléssel kapjuk, hogy $(\mathbf{H}-\lambda_1\mathbf{I})^{m_1}(\mathbf{H}-\lambda_2\mathbf{I})^{m_2}\dots(\mathbf{H}-\lambda_k\mathbf{I})^{m_k} = \mathbf{O}$. Mivel a karakterisztikus polinom $p(x) = (x-\lambda_1)^{m_1}(x-\lambda_1)^{m_2}\dots(x-\lambda_k)^{m_k} = 0$, ezért $\mathbf{U}^H p(\mathbf{A})\mathbf{U} = \mathbf{U}^H(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})^{m_1}(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})^{m_2}\dots(\mathbf{A}-\lambda_k\mathbf{I})^{m_k}\mathbf{U} = (\mathbf{H}-\lambda_1\mathbf{I})^{m_1}(\mathbf{H}-\lambda_2\mathbf{I})^{m_2}\dots(\mathbf{H}-\lambda_k\mathbf{I})^{m_k} = \mathbf{O}$.

**8.** Mutassuk meg, hogy önadjungált mátrix minden sajátértéke valós; hasonlóan unitér mátrix minden sajátértéke 1 abszolútértékű.

**Megoldás.** Önadjungáltra következik abból, hogy $\lambda$ pontosan akkor sajátértéke $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$-nek, ha $\overline{\lambda}$ sajátértéke $\mathbf{A}^H$-nak. Unitérre pedig abból, hogy ha $\mathbf{U} \in U(n)$ és $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, akkor $|\mathbf{x}| = |\mathbf{U}\mathbf{x}|$.

**9.** Milyen geometriai transzformáció felel meg annak a lineáris leképezésnek, melynek sajátértékei

(a) $1,1,1$; (b) $1,1,-1$; (c) $1,-1,-1$; (d) $-1,-1,-1$; (e) $1$; (f) $-1$?

**Megoldás.** (a) identikus; (b) síkra tükrözés; (c) egyenesre tükrözés; (d) origóra tükrözés; (e) pl. az egyenes körüli forgatás; (f) pl. a forgatva tükrözés.

**10.** Számítsuk ki a $k$-adik Fibonacci-számot ($F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$)!

**Megoldás.** Mátrixegyenletbe írva:

$$\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_k \\ F_{k-1} \end{bmatrix}$$

$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 - \lambda - 1$, $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, a merőleges sajátvektorok pedig $\mathbf{x}_i = (\lambda_i, 1)$ $(i = 1, 2)$. Ennek felhasználásával $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{S}^{-1}$ ahol $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ és $\mathbf{S}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$, amiből

$$\begin{bmatrix} F_{k+1} \\ F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} F_1 \\ F_0 \end{bmatrix} = \left( \mathbf{S} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{S}^{-1} \right)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{S} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} \mathbf{S}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \lambda_1^{k+1} & \lambda_2^{k+1} \\ \lambda_1^k & \lambda_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1} & \lambda_1^k - \lambda_2^k \\ \lambda_1^k - \lambda_2^k & \lambda_1^{k-1} - \lambda_2^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ez speciálisan azt jelenti, hogy

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^k - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^k \right).$$

**HF.** Diagonalizáljuk ortonormált bázisban az alábbi szimmetrikus mátrixokat:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**HF.** Mi a geometriai jelentése a következő (ortogonális) mátrixok által meghatározott transzformációknak:

$$\text{(a)}\ \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)}\ \tfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}?$$