Felsőbb Matematika (2010-11 ősz) 5. gyakorlat

1. Melyek igazak az $\mathbb{R}^n$ vektortér minden f lineáris transzformációjára?
1. $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek $\implies$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek;
2. $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek $\implies$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek;
3. 0 sajátértéke f^2-nek $\implies$ 0 sajátértéke f-nek;
4. μ^2 sajátértéke f^2-nek $\implies$ μ vagy $-\mu$ sajátértéke f-nek.

Megoldás. 1. $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek, azaz $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} \implies f^2(\mathbf{v}) = f(\lambda\mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v}$, azaz $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek, az állítás igaz.
2. Hamis, például ha f a sík $90°$-os elforgatása, akkor f^2 a $180°$-os elforgatás, aminek a sík minden vektora sajátvektora, f-nek viszont nincs.
3. Igaz, hisz ha f-nek a 0 nem sajátértéke, azaz f egyik vektort sem viszi a nullvektorba, akkor f^2 sem.
4. Igaz. Legyen J a Jordan-féle normálalakja f-nek. Ennek főátlójában vannak f sajátértékei, f^2 sajátértékei pedig J^2-ben, ahol a J főátlóbeli elemeinek négyzetei szerepelnek.

2. Legyen d_i az $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^i$ nullterének dimenziója, $i = 1, 2, \ldots, s$, ahol s a maximális kitevő. Képezzük a $'_{.i} = d_i - d_{i-1}$ és abból a $d''_i = d'_i - d'_{i+1}$ (legyen $d_0 = d'_{s+1} = 0$). Mi a d' és a d'' sorozat elemeinek jelentése?

3. Legyen $n > 1$ és legyen az $n \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix főátlójában minden elem a, a többi elem $b \neq 0$. Mutassuk meg, hogy $a - b$ $(n-1)$-szeres, $a + (n-1)b$ 1-szeres geometriai multiplicitású sajátérték. Határozzuk meg Jordan-mátrixát, és azt a $\mathbf{P}$ mátrixot, melyre $\mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$.

Megoldás. Az $(1, 1, \ldots, 1)$ és a $(\ldots, 1, -1, \ldots)$ alakú vektorok független sajátvektorok a megadott sajátértékekkel. Ebből következik, hogy a karakterisztikus polinom $(a + (n-1)b - \lambda)(a - b - \lambda)^{n-1}$. Mivel a geometriai multiplicitások összege megegyezik az algebraival, a Jordan-mátrix diagonális.

4. Határozzuk meg az alábbi mátrixok Jordan-bázisát:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 6 & -2 & 4 \\ 4 & -5 & 9 & -3 & 5 \\ 4 & -5 & 8 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -7 & -2 & -8 & 0 & -3 \\ -4 & -1 & -4 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 9 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Az első két feladat megoldása a jegyzetben és Lukács Erzsébet leírásában.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Bizonyítsuk be, hogy minden mátrix hasonló a transzponáltjához.

Megoldás. Egy Jordan-blokk transzponáltját kapjuk, ha balról és jobbról is szorozzuk azzal az S mátrixszal, melynek mellékátlójában egyesek, egyebütt nullák vannak. Mivel $S^{-1} = S$, ezért minden Jordan-blokk hasonló a transzponáltjához. Ebből következik, hogy minden Jordan-féle normálalakú mátrix hasonló a transzponáltjához, amiből következik az állítás.

6. Határozzuk meg az $\mathbf{A}$ mátrix Jordan-féle normálalakját, $\mathbf{J}$-t, és az $\mathbf{A}^{100}$, $e^{\mathbf{J}}$, $e^{3\mathbf{A}}$ mátixokat.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ *d)* $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Megoldás. A régi 3. feladatlap 13. példája.

7. Mutassuk meg, hogy az alábbi (valós) mátrixok mind hasonlók:

a) $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}$, ahol a, b, c és d tetszőleges nem 0 értékek;

b) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix}$, ahol a, b, c és d tetszőleges nem 0 értékek;

c) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$, ahol $a \neq c$ tetszőleges, egymástól különböző értékek;

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Megoldás. A régi 4. feladatlap 4. példája.

HF. Konstruáljunk olyan egészelemű 3×3-as $\mathbf{A}$ mátrixot, melynek legföljebb két eleme 0, és amelynek egyetlen sajátértéke és két független sajátvektora van, majd (mintha nem tudnánk róla semmit), határozzuk meg Jordan-bázisát, és számítsuk ki 10-edik hatványát és az $e^{\mathbf{A}}$ mátrixot!