

1. Ábrázoljuk az $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 20y - 5 = 0$ egyenletű másodrendű görbét! Határozzuk meg centrumát, és tengelyeinek egyenletét!

Megoldás. Az \mathbf{A} sajátfelbontásából $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{x} + C = \mathbf{x}_1^T \mathbf{\Lambda} \mathbf{x}_1 + \mathbf{B} \mathbf{Q} \mathbf{x}_1 + C$, ahol $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{x}_1, \quad \mathbf{B} = [-10 \quad -20], \quad C = 5,$$

azaz $10x_1^2 + 5y_1^2 - 10\sqrt{5}y_1 + 5 = 0$, amiből $10x_1^2 + 5(y_1^2 - 2\sqrt{5}y_1 + 5) = 20$, azaz $(x_2, y_2) = (x_1, y_1 - \sqrt{5})$ jelöléssel: $2x_2^2 + y_2^2 = 4$. A középpont $(x_1, y_1) = (0, \sqrt{5})$, azaz $(x, y) = \mathbf{Q}(0, \sqrt{5}) = (1, 2)$, a rajta átmenő tengelyek iránytangense 2 és $-1/2$.

2. Mutassuk meg, hogy ha \mathbf{A} szimmetrikus, akkor az alábbi állítások ekvivalensek:

1. \mathbf{A} pozitív definit;
2. van olyan szimmetrikus, pozitív definit \mathbf{B} mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{X}^2$;
3. van olyan invertálható \mathbf{Y} mátrix, hogy $\mathbf{A} = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y}$.

Megoldás. 1. \Rightarrow 2.: $\mathbf{A} = \mathbf{C} \mathbf{\Lambda} \mathbf{C}^T = \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{D} \mathbf{C}^T = \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{C}^T = \mathbf{X}^2$

2. \Rightarrow 3.: $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ megfelel.

3. \Rightarrow 1.: $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} \mathbf{x} = |\mathbf{Y} \mathbf{x}|^2 \geq 0$ és az invertálhatóság miatt $\neq 0$, ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

3. Az $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vektor korrigált szórásnégyzetén az s^* számot értjük, ahol

$$s^* = \frac{1}{n-1} ((x_1 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2), \quad \text{és } \bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + \dots + x_n).$$

Írjuk fel e kvadratikus alak mátrixát, és döntsük el, hogy pozitív definit-e.

Megoldás. A főátlóban $\frac{1}{n}$, egyebütt $-\frac{1}{n(n-1)}$.

1. megoldás: A kvadratikus alak nyilván pozitív szemidefinit, hisz értéke minden \mathbf{x} vektorra nemnegatív, mivel négyzetösszeg, és 0 csak akkor lehet, ha minden $x_i = \bar{x}$, azaz ha az \mathbf{x} minden koordinátája azonos – ez nem csak a 0-vektorra igaz!

2. megoldás: A mátrix sajátértékei egy korábbi feladat szerint $\frac{1}{n} + \frac{1}{n(n-1)} > 0$ és $\frac{1}{n} - (n-1)\frac{1}{n(n-1)} = 0$.

4. Számítsuk ki az alábbi mátrixok szinguláris érték szerinti felbontásának teljes és redukált alakját, és írjuk fel a hozzá tartozó diadikus felbontást!

$$(a) \begin{bmatrix} -\frac{4}{11} & 6 \\ \frac{11}{13} & -4 \end{bmatrix}, \quad (b) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (c) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (d) \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Megoldás. (a) a teljes és a redukált alakok megegyeznek,

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 73 & -36 \\ -36 & 52 \end{bmatrix}, \quad x^2 - 125x + 2500, \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 100, \lambda_2 = 25, \\ \sigma_1 = 10, \sigma_2 = 5 \end{array} \right\} \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

(b) $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ -ból indulva $p(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$, a sajátvektorok $\lambda = 3: (1, 2, 1)$, $\lambda = 1: (1, 0, -1)$, $\lambda = 0: (1, -1, 1)$. Innen a felbontás:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

A redukált felbontás

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

(c) Hasonlóan az előzőhöz:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(d) A teljes felbontás mátrixai:

$$\mathbf{U} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

a redukált felbontás:

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

5. Határozzuk meg a fenti mátrixok általánosított (pszeudo)inverzét!

Megoldás. (a) $\begin{bmatrix} 2/25 & 3/25 \\ 111/650 & 2/325 \end{bmatrix}$, (b) $\begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$, (d) $\begin{bmatrix} -1/9 & 0 & 2/9 \\ -1/9 & 1/9 & 0 \\ 1/6 & -1/9 & -1/9 \end{bmatrix}$

6. Határozzuk meg az 1.(d)-beli mátrix polárfelbontását!

Megoldás. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. Tudjuk, hogy az $\mathbf{A} = \mathbf{U} \text{diag}(4, -2, -2, 0) \mathbf{U}^T$ az \mathbf{A} mátrix sajátfelbontása, ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Írjuk fel \mathbf{A} szinguláris felbontását!

Megoldás. Az $\mathbf{A} = \mathbf{U} \text{diag}(4, 2, 2, 0) \left(\text{diag}(1, -1, -1, 1) \mathbf{U}^T \right)$ az \mathbf{A} szinguláris felbontása, azaz \mathbf{V}^T úgy kapható meg \mathbf{U}^T -ből, ha második és harmadik sorát -1 -gyel szorozzuk. A módszer tetszőleges sajátfelbontás esetén működik.

8. Igazoljuk a pszeudoinvertzre vonatkozó alábbi összefüggéseket!

1. $\mathbf{A} \mathbf{A}^+ \mathbf{A} = \mathbf{A}$,
2. $\mathbf{A}^+ \mathbf{A} \mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$,
3. $(\mathbf{A} \mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A} \mathbf{A}^+$,
4. $(\mathbf{A}^+ \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+ \mathbf{A}$.

Megoldás.

HF. Írjuk fel az $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix szinguláris és redukált szinguláris felbontását.

HF. Mutassuk meg, hogy az $m \times n$ -es \mathbf{A} mátrixra $\mathbf{A} \mathbf{A}^+$ az \mathbb{R}^m merőleges vetítése az \mathbf{A} oszlopterére. (Útmutatás: használjuk a redukált felbontást!)