2. ZH-ra gyakorló feladatok

1. Határérték számolás (Ne feledkezzünk meg a L'Hospital szabályról.)

   a) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$ b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^{10}-1}{x-1}$ c) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{5x}$

   e) $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(2x)}{7x}$ f) $\lim_{x\to \pi}\frac{\sin(x)}{x-\pi}$ g) $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$ h) $\lim_{x\to 2}\frac{2^x-4}{x-2}$

   i) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{3x}$ j) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin(3x)}$ k) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+2}{x-1})^{\frac{x+3}{x-1}}$ l) $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+2}{x-1})^{x+3}$

   m) $\lim_{x\to 1}(\frac{x+2}{x-1})^{x+3}$ n) $\lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{2x}-1}-\frac{1}{2x}$ o) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\frac{x+2}{x-1})^{\frac{x+3}{x-1}}$ p) $\lim_{q\to 0}\frac{1-\cos^4(x)}{\sin(x)}$ (L'H nélkül)

2. Függvények Mely pontban folytonosak a következő függvények

   a) $f(x)=\frac{1}{x-2}-3x$ b) $g(x)=\frac{x+1}{x^2-4x+3}$ c) $h(x)=\frac{x\mathrm{tg}(x)}{x^2+1}$

   d) $i(x)=\sqrt{2x+3}$ e) $f\circ i(x)(=f(i(x)))$ f) $f\cdot i(x)(=f(x)\cdot i(x))$

3. Készítsük el a következő függvények elemzését.

   a) $y=xe^{-x}$ b) $y=x^3-3x^2-9x+7$ c) $y=\sin(x)+\cos(x)$

4. Deriválás

   a) $f(x)=\frac{\sin^2(x)+5}{3x-2}$ b) $f(x)=(1-\cos^3(2x+2))(1+x^2)^{-1}$

   c) $f(x)=\frac{1+x-4\sqrt{x}}{x}$ d) $f(x)=\frac{1}{(x^2-1)(x^2+x+1)}$

   e) $f(x)=x^3e^x$ f) $f(x)=(x^2+e^{-x}\sin(3x))$

   implicit függvények deriválása:

   g) $0=y^3+3\sin(xy^2)+3\cos(x^2y)+x^3$ h) $0=\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}$

   Megolása

   4) g) x szerint deriválunk, tehát $\frac{dy}{dx}=y'$ és $\frac{dx}{dx}=1$, ezeket felhasználva: (ne feledkezzünk meg az összetett függvények deriválási szabályáról pl: $\frac{dy^3}{dx}=y^2\cdot y'$)
   $0'=(y^3+3\sin(xy^2)+3\cos(x^2y)+x^3)'=(y^3)'+3(\sin(xy^2))'+(3\cos(x^2y))'+(x^3)'=3y^2\cdot y'+3\cos(xy^2)(y^2+x\cdot 2y\cdot y')-3\sin(x^2y)(2x\cdot y+x^2\cdot y')-3x^2$ Ebből $y'=\frac{3x^2+3\sin(x^2y)2xy-3\cos(xy^2)y^2}{3y^2+3\cos(xy^2)x2y-3\sin(x^2y)x^2}$

   4) h) $0=(\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9})'=\frac{2x}{4}-\frac{2y}{9}\cdot y'$; ebből $y'=\frac{\frac{2x}{4}}{\frac{2y}{9}}=\frac{9x}{4y}$

5. Deriválás alkalmazása

   a) Húzzunk érintőt az $y=sin^3(\pi x)+x^5$ a P=(1,1) pontban.

   b) Húzzunk érintőt az $y+x=\sqrt{xy}+7$ a P=(4,9) pontban.

   Megoldás

   5) a) Nézzük meg, hogy a pont rajta van-e a görbén: igaz-e $1=\sin^3(\pi)+1$, OK. Számoljuk ki y'-t. $y'=3\pi\sin^2(\pi x)+5x^4$ így $y'(1,1)=3\pi\sin^2(\pi)+5\cdot 1=5$
   Az (1,1) pontban az érintő meredekséges 5. Tehát az érintő képlete $y=5x+b$, a b-t abból határozzuk meg, hogy az (1,1) pont rajta van az érintőn. $1=5\cdot 1+b$, $\Rightarrow$ $b=-4$. Az érintő $y=5x-4$.
   5) b) Igaz-e, hogy $4+9=\sqrt{4\cdot 9}+7$, OK. Számoljuk ki y'-t. $y'+1=\frac{1}{2\sqrt{xy}}(y+x\cdot y')$ $\Rightarrow$ $y'(4,9)=\frac{1}{2\sqrt{36}}(9+4\cdot y'(4,9))=\frac{1}{12}(9+4\cdot y'(4,9))$ és $y'(4,9)=\frac{3}{2}\frac{1}{12}9=\frac{9}{8}$. A (4,9) pontban az érintő meredeksége $\frac{9}{8}$. Az érintő képlete $y=\frac{9}{8}x+b$, a b-t abból határozzuk meg, hogy a (4, 9) pont rajta van az érintőn. $9=\frac{9}{8}4+b$, ezért a $b=\frac{9}{2}$. Tehát az érintő egyenlete $y=\frac{9}{8}x+\frac{9}{2}$.

6. Számoljuk ki a következő integrálokat:

   a) $\int\frac{x^3-6x+5}{x}dx$ b) $\int\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{x}dx$ c) $\int\frac{2\cdot 5^x-52^x}{5^x}dx$ d) $\int(2x+5)^{3/2}dx$

   e) $\int\frac{dx}{\cos^2(4-3x)}dx$ f) $\int\frac{e^{7x+1}}{e^{2x}}dx$ g) $\int\sqrt{5-2x}dx$ h) $\int\frac{dx}{x\ln(x)}$

   i) $\int\cos(2x)dx$ j) $\int\frac{e^{3x}}{5+12e^{3x}}dx$ k) $\int\frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}dx$ l) $\int\sin^3(x)\cos(x)dx$

   m) $\int x\sqrt{3-x^2}dx$ n) $\int\frac{\sqrt[3]{\mathrm{tg}}}{\cos^2(x)}dx$ o) $\int\mathrm{tg}^2(x)dx$ p) $\int xe^{-x}dx$

   q) $\int(x-2)\cos(3x)dx$ r) $\int e^{5x}\cos(2x)dx$ s) $\int x^2\ln(x)dx$ t) $\int 3x\sqrt{x^2-1}dx$

   u) $\int\frac{e^{-x}}{e^{-x}+3}$ v) $\int\frac{x^2-4x+7}{x-2}$ w) $\int x\sin^2(x)dx$ x) $\int\frac{dx}{\sin(x)}$

7. Határozott integrált úgy számoljuk ki, hogy $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, ahol $\int f(x)dx = F(x) + C$.

a) $\int_3^6 x^3 + 2x + 5$ b) $\int_0^{2\pi} \sin(x)dx$ c) $\int_1^e \ln^2(x)dx$ d) $\int_0^{\pi} \sin(x)dx$

8. Integrálszámítás alkalmazása

a) Számítsuk ki az $y = \sin(\frac{x}{2})$ görbe első pozitív félhullám alatti területet.

b) Számítsuk ki az $y = \frac{2}{3}(x-8)^{\frac{3}{2}}$

c) Számítsuk ki az alábbi görbék által határolt síkrészek területét: $y = \sqrt[3]{x}, y = 0, x = 8$.

d) Számítsuk ki az alábbi görbék által határolt síkrészek területét: $y = x^2, y = 9, x \geqslant 0$.