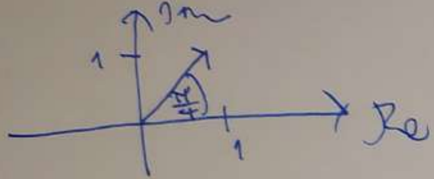
1.HF.

$$z_1=\frac{(1+i)^{21}}{2-3i}=\frac{\left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{21}}{2-3i}=\frac{\sqrt{2}^{21}\left(\cos\left(\frac{21\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{21\pi}{4}\right)\right)}{2-3i}=$$

$r=\sqrt{2}\,,\ \varphi=\frac{\pi}{4}$



$$=\frac{\sqrt{2}^{21}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)}{2-3i}=\frac{\sqrt{2}^{21}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}{2-3i}=$$

$$=\frac{-1024-1024i}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}=\frac{1024-5120i}{13}=\frac{1024}{13}-\frac{5120}{13}i$$

$$z_2=\frac{1024+2048i}{(1+i)^{19}}=\frac{1024+2048i}{\left(\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^{19}}=$$

$$=\frac{1024+2048i}{\sqrt{2}^{19}\cdot\left(\cos\left(\frac{19\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{19\pi}{4}\right)\right)}=\frac{1024+2048i}{\sqrt{2}^{19}\cdot\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)}=$$

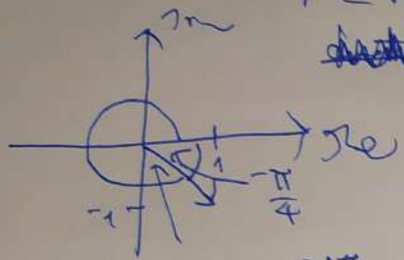
$$=\frac{1024+2048i}{\sqrt{2}^{19}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}=$$

$$=\frac{1024+2048i}{-512+512i}\cdot\frac{-512-512i}{-512-512i}=1-3i$$

$$z_3 = \frac{3072}{(1-i)^{21}} = \frac{3072}{\left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)\right)^{21}} = \frac{3072}{-1024+1024i} \cdot \frac{-1024-1024i}{-1024-1024i} = \underline{\underline{-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}i}}$$

Hasonlóan, mint z_1, z_2...

$r = \sqrt{2}$



$tg(\varphi) = -1$

$\Rightarrow \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$,

de $\varphi \in [0, 2\pi)$

$-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$

$\boxed{\varphi = \frac{7\pi}{4}}$

II. HF.

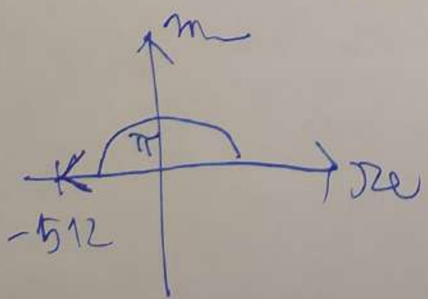
$z^4 + 512 \cdot z = 0$

$\boxed{z_1 = 0}$ gyök, ha pedig $z \neq 0$, akkor z-vel egyszerűsítünk: $z^3 + 512 = 0$

$z^3 = -512$

$$z_{2,3,4} = \sqrt[3]{-512} = \sqrt[3]{512 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi)} = \begin{cases} \sqrt[3]{512} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ \sqrt[3]{512} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi + 1\cdot 2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi + 1\cdot 2\pi}{3}\right)\right) \\ \sqrt[3]{512} \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi + 2\cdot 2\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi + 2\cdot 2\pi}{3}\right)\right) \end{cases} =$$

$\sqrt[3]{512} = 8$



$$= \begin{cases} 8 \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ 8 \cdot (-1 + 0 \cdot i) \\ 8 \cdot \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_2 = 4 + 4\sqrt{3}\,i \\ z_3 = -8 \\ z_4 = 4 - 4\sqrt{3}\,i \end{cases}$$

$$z^3 + (-8+8\sqrt{3}\,i)\cdot z = 0$$

$\boxed{z_1 = 0}$ nyilván, ha pedig $z \neq 0$, akkor egyszerűsítünk z-vel: $z^2 + (-8+8\sqrt{3}\,i) = 0$

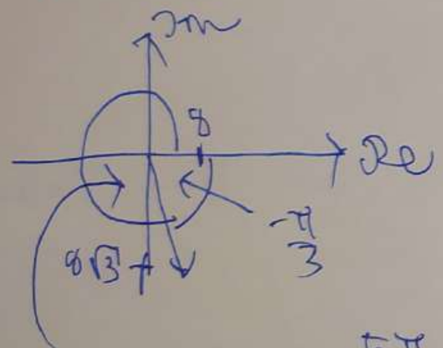
$$z^2 = 8 - 8\sqrt{3}\,i$$

$$z_{2,3} = \sqrt{8-8\sqrt{3}\,i} = \sqrt{16\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)} = \begin{cases} \sqrt{16}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) \\ \sqrt{16}\cdot\left(\cos\left(\cancel{\ldots}\right) + i\sin\left(\cancel{\ldots}\right)\right) \end{cases} =$$

4 $\quad \dfrac{\left(\frac{5\pi}{3}+2\pi\right)}{2} \quad \dfrac{\frac{5\pi}{3}+2\pi}{2}$

$$r = \sqrt{8^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\sqrt{3} \rightarrow \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = \frac{-\pi}{3}$$



(MINDIG RAJZOLJUK LE!)

$$\boxed{\varphi = \frac{-\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}}$$

(ZH-ban lehet olyan eset is, amikor π-vel kell eltolni az arctg(·) értékét!)

$$= \begin{cases} 4\cdot\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ 4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} z_2 = -2\sqrt{3} + 2i \\ z_3 = 2\sqrt{3} - 2i \end{array}$$

$$z^2+4z+16=0$$

$$z_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 16}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{-3\cdot 16}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{-48}}{2}=\frac{-4\pm 4\cdot\sqrt{3}\,i}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_1=-2+2\sqrt{3}\,i \qquad z_2=-2-2\sqrt{3}\,i$$

Feladat: $\sqrt{-48}=?$

$$\sqrt{-48}=\sqrt{48\cdot(\cos(\pi)+i\sin(\pi))}=\ldots=\begin{cases}4\cdot\sqrt{3}\,i\\-4\cdot\sqrt{3}\,i\end{cases}$$

$r=48 \quad \varphi=\pi$

III. HF. 2019/20: 1. ZH, A, B, C csoport 4-es feladatok IV. H.: uez. 5-ös feladatok

2019/20/1ZH/A csop. 4-es feladat:

Határozza meg az x értékét úgy, hogy az $\underline{a}=(x,4,3)$, $\underline{b}=(1,4,2)$ és $\underline{c}=(2,5,3)$ csúcsú tetraéder térfogata 2 egység legyen!

Tetraéder térfogata: $\dfrac{|\underline{a}\cdot\underline{b}\cdot\underline{c}|}{6}=\dfrac{|(\underline{a}\times\underline{b})\cdot\underline{c}|}{6}=\dfrac{1}{6}\begin{vmatrix}x&4&3\\1&4&2\\2&5&3\end{vmatrix}=x\cdot(4\cdot 3-2\cdot 5)-4\cdot(1\cdot 3-2\cdot 2)+3\cdot(1\cdot 5-4\cdot 2)=$

(ABSZOLÚTÉRTÉK!)

($x=\frac{17}{2}$ és $x=\frac{-7}{2}$ is jó megoldás!)

$$=\frac{1}{6}|2x+4-9|=|2x-5|\cdot\frac{1}{6}\overset{\text{Ha } 2x-5>0}{=}\frac{1}{3}x-\frac{5}{6}\overset{\text{feltétel miatt}}{=}2\Rightarrow \underline{x=\frac{17}{2}}$$

Ha $2x-5<0$, akkor $-(\frac{1}{3}x-\frac{5}{6})=2\Rightarrow \underline{x=\frac{-7}{2}}$

2019/20/1ZH/B ~~csop.~~ csop. 4-es feladat:

Hat. meg. y értékét úgy, hogy az $\underline{a}=(4,5,2)$, $\underline{b}=(3,y,-1)$ és $\underline{c}=(5,2,3)$ csúcsú paralelepipedon térfogata 5 egység legyen!

Paralelepipedon térfogata: $|\underline{a}\underline{b}\underline{c}| = |(\underline{a}\times\underline{b})\underline{c}| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & y & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 4\cdot(y\cdot 3 - {}^{-}1\cdot 2) - 5\cdot(3\cdot 3 - {}^{-}1\cdot 5) + 2\cdot(3\cdot 2 - 5\cdot y) =$

$= |2y-50| = 5$, ha $2y-50>0$: $2y-50=5$

$\boxed{y=\frac{55}{2}}$

ha $2y-50<0$: $-2y+50=5$

$\boxed{y=\frac{+45}{2}}$

2019/20/1ZH/C csop. 4-es feladat:

Hat. meg az $A=(2,{}^{-}1,3)$, $B=(5,3,1)$, $C=(4,{}^{-}1,2)$ pontokat tartalmazó sík egyenletét!

$\overrightarrow{AB}=(3,4,{}^{-}2)$ $\quad \underline{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = ({}^{-}4,{}^{-}1,{}^{-}8)$

$\overrightarrow{AC}=(2,0,{}^{-}1)$

~~[illegible]~~ $\underline{n}\cdot\underline{r} = (-4,{}^{-}1,{}^{-}8)\cdot(x,y,z) = \underbrace{-4x-y-8z \overset{\text{A-t helyettesítem}}{=} -31}$, ez a sík egyenlete

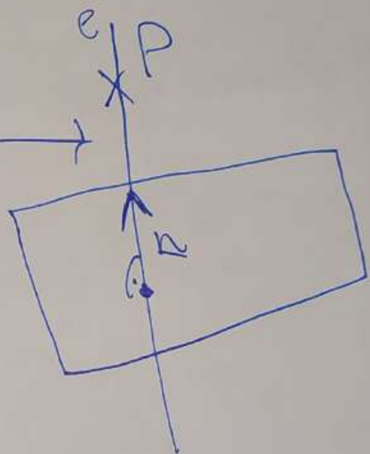
2019/20/1ZH/A.csop. 5-ös feladat:

Hat. meg a $P(2,-1,3)$ pont és a $4x+3y-z=8$ egyenletű sík távolságát!

1/ Sík normálvektora? $\underline{n}=(4,3,-1)$

2/ Egyenes P-n $\underline{v}=\underline{n}$ irányvektorral:

$$e: \begin{aligned} x &= 2+4t \\ y &= -1+3t \\ z &= 3-t \end{aligned}$$



$S: 4x+3y-z=8$

3/ Sík és egyenes metszete?

$$4\cdot(2+4t)+3\cdot(-1+3t)-(3-t)=8$$

$$\Rightarrow t=\frac{3}{13}$$

$$\Rightarrow \text{metszet } M=\left(2+4\cdot\frac{3}{13},\ -1+3\cdot\frac{3}{13},\ 3-\frac{3}{13}\right)=\left(\frac{38}{13},\ \frac{-4}{13},\ \frac{36}{13}\right)$$

4/ $\overrightarrow{PM}$ hossza a távolság: $\overrightarrow{PM}=\left(\frac{12}{13},\ \frac{9}{13},\ \frac{-3}{13}\right) \Rightarrow |\overrightarrow{PM}|=\underline{1{,}1767}$

2019/20/12H / B csop. 5-ös feladat

Hat. meg a $P=(2,-1,3)$ és $x=4+t,\ y=3-2t,\ z=1-t$ egyenes távolságát!

1/ Tetsz. Q pont az egyenesen! $Q=(4,3,1)$ ($t=0$-ra kapjuk)

2/ $\vec{QP}=(-2,-4,2)$

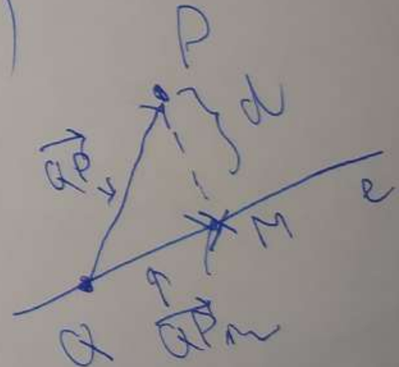
3/ $\vec{QP}$ merőleges vetülete $\underline{v}=(1,-2,-1)$ irányvektorra:

$$\vec{QP}_m=\frac{\vec{QP}\cdot\underline{v}}{|\underline{v}|^2}\cdot\underline{v}=\frac{4}{6}(1,-2,-1)=\left(\frac{2}{3},\frac{-4}{3},\frac{-2}{3}\right)$$

4/ $M = Q+\vec{QP}_m =$ [redacted]

5/ $d=|\vec{PM}|=$ [redacted]

Bocsánat, kézzel számoltam, és ezeket kétszer is elszámoltam, így kisatíroztam, hogy ne legyen zavaró a sok áthúzás...



$M=\left(\frac{14}{3},\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$

$|\vec{PM}|=\left|\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3},\frac{-8}{3}\right)\right|=\underline{\underline{4{,}62}}$

IV.HF.

2019/20/1ZH / C csop. 5-ös feladat

Hat. meg a $4x+2y-z=3$ és $-4x-2y+z=7$ síkok távolságát!

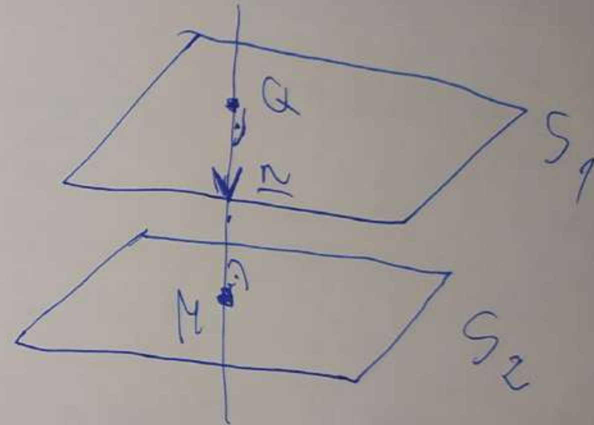
1/ Jelölj Q pontot az egyik síkon: $Q=(0,0,-3)$ ← ez rajta van az első síkon!

2/ Normálvektorral egyenes Q-n keresztül: $\underline{n}=(4,2,-1)$

$e: x=0+4t$

$y=0+2t$

$z=-3-t$



3/ Egyenes és sík metszete:
(másik sík)

$$-4(0+4t)-2\cdot(0+2t)+(-3-t)=7$$

$$\Rightarrow t=-\frac{10}{21}$$

$$M=\left(0+4\cdot\frac{-10}{21},\ 0+2\cdot\frac{-10}{21},\ -3+\frac{10}{21}\right)=\left(\frac{-40}{21},\ \frac{-20}{21},\ \frac{-53}{21}\right)$$

4/ $d=|\overrightarrow{QM}|=\left|\left(\frac{-40}{21},\frac{-20}{21},\frac{10}{21}\right)\right|=\underline{\underline{2{,}18}}$