Integrálszámítás és alkalmazásai

Feladatok és megoldásuk

Pintér József gyakorlatvezető

Elmélet ismétlése

Az elmélet megtalálható **Sándor Csaba Tanár Úr honlapján**, melyeket ide is belinkelek:

- Határozatlan integrálok: https://math.bme.hu/%7Ecsandor/A1/Eloadas/Hatarozatlan_integral.pdf
- Határozott integrálok: https://math.bme.hu/%7Ecsandor/A1/Eloadas/Hatarozott_integral.pdf
- Improprius integrálok: https://math.bme.hu/%7Ecsandor/A1/Eloadas/Improprius_integral_es_numerikus_integralas.pdf
- **Képletgyűjtemény: https://math.bme.hu/%7Ecsakany/b1/kepletgyujtemeny.pdf**
- **Feladatgyűjtemény (ilyenek lesznek vizsgán!): https://math.bme.hu/%7Ecsandor/A1/2023241/Integralszamitas%20gyakorlofeladatsor.pdf**
- Feladatgyűjtemény megoldásai (csak végeredmények): https://math.bme.hu/%7Ecsandor/A1/2023241/Integralszamitasi%20gyakorlo%20feladatsor%20megoldasok.pdf
- **Integrál kalkulátor: https://www.integral-calculator.com/**

1. Feladatsor

1. feladat: Határozza meg az $\int \frac{5x-3}{\sqrt{1+4x^2}} dx$ integrált!

2. feladat: Határozza meg az $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} dx$ integrált $t = \sqrt[3]{x}$ helyettesítéssel!

3. feladat: Forgassa meg az $f(x) = x \cdot \sin x\ , 0 \leq x \leq \pi$ függvényt az x-tengely körül, és számolja ki az így kapott forgástest térfogatát!

1. Feladatsor

1. feladat: Határozza meg az $\int \frac{5x-3}{\sqrt{1+4x^2}}dx$ integrált!

<u>Megoldás:</u>

Vegyük észre, hogy a nevezőben a gyök alatti kifejezés másodfokú, míg a számlálóban található kifejezés elsőfokú. Azaz ez az integrál visszavezethető $\int f' \cdot f^{\mu} = \frac{f^{\mu+1}}{\mu+1} + C$ alakra, ahol a $\mu = -\frac{1}{2}$ -del! (Hiszen a nevezőben a gyökjel megfeleltethető $-\frac{1}{2}$ hatványnak, és a másodfokú polinom deriváltja elsőfokú!)

1. Feladatsor

1. feladat: Határozza meg az $\int \frac{5x-3}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx$ integrált!

<u>Megoldás:</u>

Tehát az $\int f' \cdot f^{\mu} = \frac{f^{\mu+1}}{\mu+1} + C$ képletet akarjuk alkalmazni!

Ha $f = 1 + 4x^2$, akkor $f' = 8x$, azaz át kell alakítanunk a számlálót, hogy $8x$ szerepeljen benne:

$$\int \frac{5x-3}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx = \frac{5}{8}\int \frac{8x}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx + \int \frac{-3}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx$$

(Szétszedjük két tagra az összeg mentén, és az első tagot bővítjük $\frac{5}{8}$-dal, hogy a számláló $8x$ legyen.)

1. Feladatsor

1. feladat: Határozza meg az $\int \frac{5x-3}{\sqrt{1+4x^2}} dx$ integrált!

<u>Megoldás:</u>

Első tag: $\frac{5}{8} \int \frac{8x}{\sqrt{1+4x^2}} dx = \frac{5}{8} \frac{\left(1+4x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$ az előbb említett képlet alapján.

Második tag: $\int \frac{-3}{\sqrt{1+4x^2}} dx = -3 \int \frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}} dx = -3 \frac{\operatorname{arsh}(2x)}{2} + C$ (elemi integrál, lásd képletgyűjtemény).

Így $\int \frac{5x-3}{\sqrt{1+4x^2}} dx = \underline{\underline{5 \frac{\left(1+4x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{4} - 3 \frac{\operatorname{arsh}(2x)}{2} + C}}.$

1. Feladatsor

2. feladat Határozza meg az $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} dx$ integrált $t = \sqrt[3]{x}$ helyettesítéssel!

<u>Megoldás:</u>

Ha $t = \sqrt[3]{x}$, akkor $x = t^3$, és így $\frac{dx}{dt} = 3t^2 \to dx = 3t^2 dt$, azaz a kapott integrál helyettesítés után:

$$\int \frac{3t^2}{1+t} dt$$

Vegyük észre, hogy ez egy olyan racionális törtfüggvény (polinom osztva polinommal), hol a számláló nagyobb fokú, mint a nevező. Tanultuk, hogy ebben az esetben polinomosztással át kell alakítani úgy, hogy a számláló legyen a kisebbfokú!

1. Feladatsor

2. feladat Határozza meg az $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}dx$ integrált $t = \sqrt[3]{x}$ helyettesítéssel!

<u>Megoldás:</u>

$$\int \frac{\mathbf{3t^2}}{\mathbf{1+t}}dt$$

Polinomosztást alkalmazunk, tehát szeretnénk felírni $3t^2$-et a következő alakban:

$$\mathbf{3t^2} \qquad = (\mathbf{t+1})(\mathbf{a}t+\mathbf{b})+\mathbf{c}$$

1. Feladatsor

2. feladat Határozza meg az $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$ integrált $t = \sqrt[3]{x}$ helyettesítéssel!

Megoldás:

$$\begin{array}{c} \mathbf{3t^2} \\ \underline{-(\mathbf{3t^2+3t})} \\ 0-3t \end{array} \qquad = (\mathbf{t+1})(\mathbf{3}t+\mathbf{b})+\mathbf{c}$$

Az $\boldsymbol{a} = \mathbf{3}$, hiszen így kapunk $\mathbf{3t^2}$-et. Ekkor $(t+1)\cdot 3t = 3t^2+3t$, azaz marad még nekünk $-3t$-nk, amit el kell tűntetnünk következő lépésben! Ehhez úgy kell megválasztani a $\boldsymbol{b}$-t, hogy $-3t$-nk legyen következő lépésben!

1. Feladatsor

2. feladat Határozza meg az $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$ integrált $t = \sqrt[3]{x}$ helyettesítéssel!

<u>Megoldás:</u>

$$\begin{array}{l} \mathbf{3t^2} \\ -(\mathbf{3t^2} + \mathbf{3t}) \\ \hline \quad 0 - 3t \\ \quad -(-3t - 3) \\ \hline \qquad 0 + 3 \end{array} \qquad = (\mathbf{t} + \mathbf{1})(\mathbf{3}t - 3) + \boldsymbol{c}$$

Így a $\boldsymbol{b} = \mathbf{-3}$, amit így összeszorozva $(t+1)\cdot -3 = -3t\ - 3$-at, kapunk, amiből megmarad egy 3-as. Ezt a 3-ast már nem tudjuk eltűntetni, ez lesz a maradék! Azaz $\boldsymbol{c} = \mathbf{3}$.

1. Feladatsor

2. feladat Határozza meg az $\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} dx$ integrált $t = \sqrt[3]{x}$ helyettesítéssel!

<u>Megoldás:</u>

Tehát $3t^2 = (t+1)\cdot(3t-3)+3$, azaz az integrálunk:

$$\int \frac{3t^2}{1+t} dt = \int \frac{(t+1)(3t-3)+3}{t+1} dt =$$

$$= \int \frac{(t+1)(3t-3)}{t+1} dt + \int \frac{3}{t+1} dt = \int 3t - 3dt + \int \frac{3}{t+1} dt =$$

$$= \frac{3t^2}{2} - 3t + 3\ln(t+1) + C = \underline{\underline{\frac{3\sqrt[3]{x}^2}{2} - 3\sqrt[3]{x} + 3\ln|\sqrt[3]{x}+1| + C}}$$

1. Feladatsor

3. feladat: Forgassa meg az $f(x) = \sqrt{x \cdot \sin x}\,, 0 \leq x \leq \pi$ függvényt az x-tengely körül, és számolja ki az így kapott forgástest térfogatát!

<u>Megoldás:</u>

A feladat megoldásához alkalmazzuk a forgástest térfogatára tanult formulát! $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$

Azaz $V = \pi \int_0^\pi x \sin x \, dx$, melyet parciális integrálással kell kiszámítani!

$$V = \pi \int_0^\pi x \cdot \sin x \, dx = [-\mathrm{x} \cdot \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi - \cos x \, dx =$$

$$= [-x \cdot \cos x]_0^\pi + [\sin x]_0^\pi$$

1. Feladatsor

3. feladat: Forgassa meg az $f(x) = \sqrt{x \cdot \sin x}\,, 0 \leq x \leq \pi$ függvényt az x-tengely körül, és számolja ki az így kapott forgástest térfogatát!

Megoldás:

A feladat megoldásához alkalmazzuk a forgástest térfogatára tanult formulát! $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$

Azaz $V = \pi \int_0^\pi x \sin x \, dx$, melyet parciális integrálással kell kiszámítani!

$$V = \pi \int_0^\pi x \cdot \sin x \, dx = \pi \left([-\mathrm{x} \cdot \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi - \cos x \, dx \right) =$$

$$= \pi([-x \cdot \cos x]_0^\pi + [\sin x]_0^\pi)$$

1. Feladatsor

3. feladat: Forgassa meg az $f(x) = \sqrt{x \cdot \sin x}$, $0 \leq x \leq \pi$ függvényt az x-tengely körül, és számolja ki az így kapott forgástest térfogatát!

<u>Megoldás:</u>

$$V = \pi\left([-x \cdot \cos x]_0^{\pi} + [\sin x]_0^{\pi}\right) = \pi(-\pi \cdot \cos \pi - 0 \cdot \cos 0 + \sin \pi - \sin 0)$$

$$= \pi(\pi - 0 + 0 - 0) = \underline{\underline{\pi^2}}$$

2. Feladatsor

1. feladat: Határozza meg az $\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}, 1 \leq x \leq 2$ görbe ívhosszát!

2. feladat: Határozza meg az $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\ln(x)}dx$ és $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ impropríus integrálokat, amennyiben azok konvergensek!

3. feladat: Tekintsük az alábbi paraméteres görbét: $x(t) = \cos(t)$ és $y(t) = \sin(t)$, ahol $0 \leq \mathrm{t} \leq \frac{\pi}{2}$. Forgassuk meg a görbét az x-tengely körül, és számítsuk ki az így kapott test felszínét!

2. Feladatsor

1. feladat: Határozza meg az $\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}, 1 \leq x \leq 2$ görbe ívhosszát!

<u>Megoldás:</u>

A megoldáshoz alkalmazzuk az ívhosszra tanult képletünket:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2}\, dx$$

Hiszen ha $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}$, akkor $f'(x) = x - \frac{1}{4x}$.

2. Feladatsor

1. feladat: Határozza meg az $\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}, 1 \leq x \leq 2$ görbe ívhosszát!

<u>Megoldás:</u>

$$s = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2}\, dx = \int_1^2 \sqrt{1 + \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2}\, dx =$$

$$= \int_1^2 \sqrt{1 + x^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{16x^2}}\, dx = \int_1^2 \sqrt{x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16x^2}}\, dx =$$

$$= \int_1^2 \sqrt{\left(x + \frac{1}{4x}\right)^2}\, dx = \int_1^2 \left| x + \frac{1}{4x} \right| dx = \int_1^2 x + \frac{1}{4x}\, dx$$

Mivel a függvény pozitív az $1 \leq x \leq 2$ tartományon,
így elhagyhatjuk az abszolútértéket!
(Ha negatív lenne, be kellene szorozni -1-gyel!)

2. Feladatsor

1. feladat: Határozza meg az $\frac{x^2}{2} - \frac{\ln x}{4}, 1 \leq x \leq 2$ görbe ívhosszát!

<u>Megoldás:</u>

$$s = \int_1^2 x + \frac{1}{4x}\, dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{\ln 4x}{4}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{2^2}{2} + \frac{\ln(4 \cdot 2)}{4} - \frac{1^2}{2} - \frac{\ln(4 \cdot 1)}{4} = \underline{\underline{1.6733}}$$

2. Feladatsor

2. feladat: Határozza meg az $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\ln(x)}dx$ és $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ improprius integrálokat, amennyiben azok konvergensek!

<u>Megoldás:</u>

Tekintsük először az első integrált!

Ahhoz, hogy meg tudjuk mondani, hogy egy improprius integrál konvergens-e, nem feltétlenül kell kiszámítanunk a primitív függvényt, hiszen tanultunk konvergencia-kritériumokat! (Lásd. Sándor Csaba Tanár Úr Improprius Integrál jegyzete.)

2. Feladatsor

2. feladat: Határozza meg az $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\ln(x)}\,dx$ és $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ improprius integrálokat, amennyiben azok konvergensek!

<u>Megoldás:</u>

Tekintsük először az első integrált!

Mivel a nevező lassabban nő, mint a $2x$ függvény, így azt sejtjük, hogy divergens az integrál (jegyzetben p-kritérium az $\frac{1}{x^p}$ integráljainak konvergenciája)!

Valóban, ha $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\ln(x)}$, és $g(x) = \frac{1}{2x}$, akkor $f(x) \geq g(x)$ kellően nagy x −re, így mivel $\int_1^\infty \frac{1}{2x}\,dx = \infty$, a **minoráns kritérium** értelmében $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\ln(x)}\,dx = \infty$.

Célszerű lehet röviden indokolni a becslést:

$x \geq 1$ esetén: $\sqrt[3]{x} \leq x$ és $\ln(x) \leq x$, azaz $\sqrt[3]{x} + \ln(x) \leq 2x$, így $\frac{1}{\sqrt[3]{x}+\ln(x)} \geq \frac{1}{2x}$.

2. Feladatsor

2. feladat: Határozza meg az $\int_1^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\ln(x)}dx$ és $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ improprius integrálokat, amennyiben azok konvergensek!

<u>Megoldás:</u>

Tekintsük most a második integrált!

Az integrálandó függvénynek szakadási helye az $x=-1$ és $x=1$ is, így az integrált a következőképpen kell felírnunk:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\substack{b\to 1\\ a\to -1}} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \lim_{\substack{b\to 1\\ a\to -1}} [\arcsin(\mathrm{x})]\,_a^b =$$

$$= \lim_{b\to 1} \arcsin(b) - \lim_{a\to -1} \arcsin(a) = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \underline{\underline{3.1415\ldots}}$$

Mivel az arcsin folytonos 1-ben és -1-ben, így szimplán beírhatjuk a számológépbe. Ha olyan primitív függvény jön ki, ami nem folytonos az adott pontokban, akkor rendesen meg kell határozni a határértéket is!

2. Feladatsor

3. feladat: Tekintsük az alábbi paraméteres görbét: $x(t) = \cos(t)$ és $y(t) = \sin(t)$, ahol $0 \leq \mathrm{t} \leq \pi$. Forgassuk meg a görbét az x-tengely körül, és számítsuk ki az így kapott test felszínét!

<u>Megoldás:</u>

Alkalmazzuk a paraméteres görbével megadott forgástest felszínére tanult formulánkat!

$$F = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{x}(t)^2} dt = 2\pi \int_0^{\pi} \sin(t) \cdot \sqrt{(-\cos(t))^2 + (\sin(t))^2} dt$$

Hiszen $\dot{x}(t) = -\sin(t)$ és $\dot{y}(t) = \cos(t)$ (a pötty a t szerinti deriválást jelenti).

$$F = 2\pi \int_0^{\pi} \sin(t) \cdot \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = 2\pi \int_0^{\pi} \sin(t)\, dt = [-\cos(t)]_0^{\pi} =$$

$$= 2\pi(-\cos(\pi) + \cos(0)) = \underline{\underline{4\pi}}$$

Valóban, amit kiszámoltunk,
az az 1 egység sugarú kör felszíne!