Matematika A1

I. Minta ZH és megoldások

Pintér József (gyakorlatvezető)

1. Feladatsor (első fele – komplex számok)

- 1. feladat: Határozzuk meg az alábbi komplex szám algebrai alakját!

$$\frac{1728}{\left(3+\sqrt{3}i\right)^5} = ?$$

- 2. feladat: Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$z^6 + 64z^2 = 0$$

1. feladat

- Határozzuk meg az alábbi komplex szám algebrai alakját!

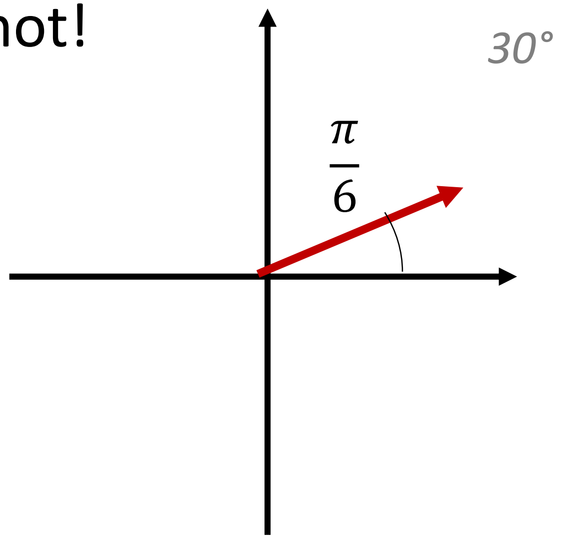
$$\frac{1728}{\left(3+\sqrt{3}i\right)^5} = ?$$

- 1. lépés: Írjuk át trigonometrikus alakra a hatványozandó számot!

1.1. lépés: $r = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12}$

1.2. lépés: $\mathrm{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$ v. $\frac{7\pi}{6} \rightarrow$ Rajz alapján $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

1.3. lépés: $3 + \sqrt{3}i = \sqrt{12}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$



1. feladat

- Határozzuk meg az alábbi komplex szám algebrai alakját!

$$\frac{1728}{\left(3+\sqrt{3}i\right)^5} = ?$$

- 2. lépés: Hatványozzuk a nevezőt!

$$\left(3+\sqrt{3}i\right)^5 = \left(\sqrt{12}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right)^5 = 12^{\frac{5}{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= 12^{\frac{5}{2}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -432 + 72\sqrt{12}i$$

1. feladat

- Határozzuk meg az alábbi komplex szám algebrai alakját!

$$\frac{1728}{\left(3+\sqrt{3}i\right)^5} =?$$

- 3. lépés: Bővítsünk a nevező konjugáltjával!

$$\frac{1728}{-432+72\sqrt{12}i} \cdot \frac{-432-72\sqrt{12}i}{-432-72\sqrt{12}i} = \underline{\underline{-3-\sqrt{3}i}}$$

2. feladat

- Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$z^6 + 64z^2 = 0$$

- 0. lépés: Nézzük meg, hogy megoldása-e a 0 az egyenletnek?
  Ez egy hatodfokú egyenlet, azaz 6 megoldást szeretnénk.
  Vegyük észre, hogy a 0 az kétszeres gyöke az egyenletnek, így

$$\underline{z_{1,2} = 0},$$

  azaz már csak négy megoldást kell megtalálnunk.

2. feladat

- Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$z^6 + 64z^2 = 0$$

- 1. lépés: Ha $z \neq 0$, akkor leoszthatunk z^2-tel, így a következőt kapjuk:

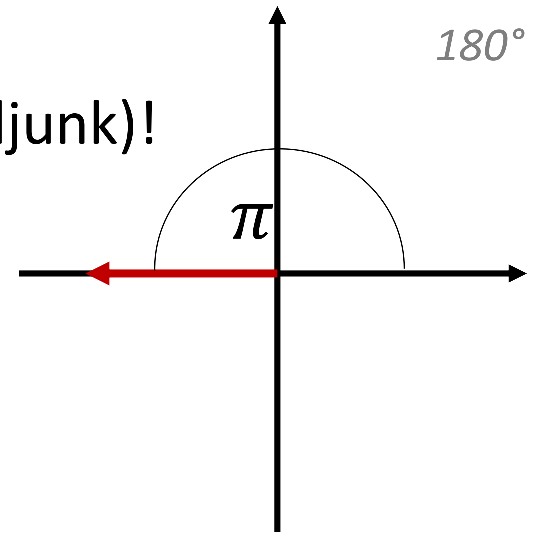
$$z^4 + 64 = 0$$

- 2. lépés: Oldjuk meg ezt az egyenletet!

$$z^4 = -64$$
$$z = \sqrt[4]{-64}$$

2.1. Írjuk át trigonometrikus alakra a gyökjel alatti kifejezést (rajzoljunk)!

$r = 64, \varphi = \pi$, azaz $-64 = 64(\cos \pi + i \sin \pi)$



2. feladat

- 2. lépés: Oldjuk meg ezt az egyenletet!

$$z = \sqrt[4]{-64}$$

2.1. Írjuk át trigonometrikus alakra a gyökjel alatti kifejezést (rajzoljunk)!

$r = 64, \varphi = \pi$, azaz $-64 = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$

2.2. Vonjunk gyököt a tanult formulával (sugárból gyökvonás, szöget osztjuk)!

$$z_3 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \underline{2+2i}$$

$$z_4 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi+1\cdot 2\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi+1\cdot 2\pi}{4}\right)\right) = \underline{-2+2i}$$

$$z_5 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi+2\cdot 2\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi+2\cdot 2\pi}{4}\right)\right) = \underline{-2-2i}$$

$$z_6 = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi+3\cdot 2\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi+3\cdot 2\pi}{4}\right)\right) = \underline{2-2i}$$

1. Feladatsor (második fele – térgeometria)

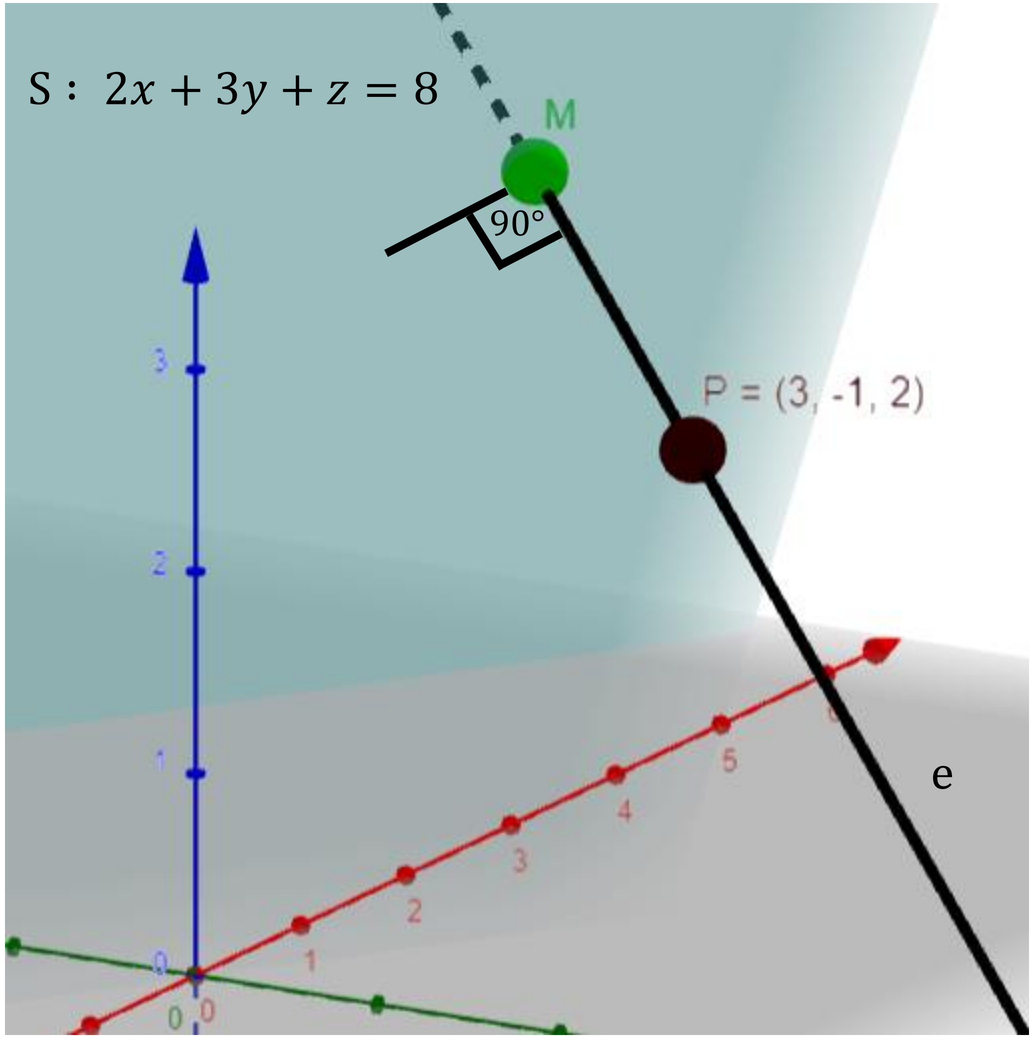
- 3. feladat: Határozzuk meg a $\mathrm{P}(3,-1,2)$ pont és $S : 2x + 3y + z = 8$ sík távolságát!

- 4. feladat: Tekintsük a $\mathrm{P}(2,3,4)$ pontot és $S : 2x - y + 2z = 15$ síkot. Határozzuk meg azon S_1 és S_2 síkokat, melyek párhuzamosak az S síkkal, és a távolságuk a P ponttól 6!

3. feladat

- Határozzuk meg a $\mathrm{P}(3, -1, 2)$ pont
  és $S : 2x + 3y + z = 8$ sík távolságát!

- Megoldási terv:
  - A távolság kiszámításához szükségünk lesz a P pont S-re való merőleges vetületére.
  - Ezt úgy fogjuk kiszámítani, hogy meghatározzuk azt az e egyenest, ami merőlegesen metszi az S síkot, és átmegy a P ponton!
  - Az M metszéspont (egyenes és sík) meghatározása után a távolságot könnyen kiszámíthatjuk $|\overrightarrow{MP}|$ vektor hosszával.

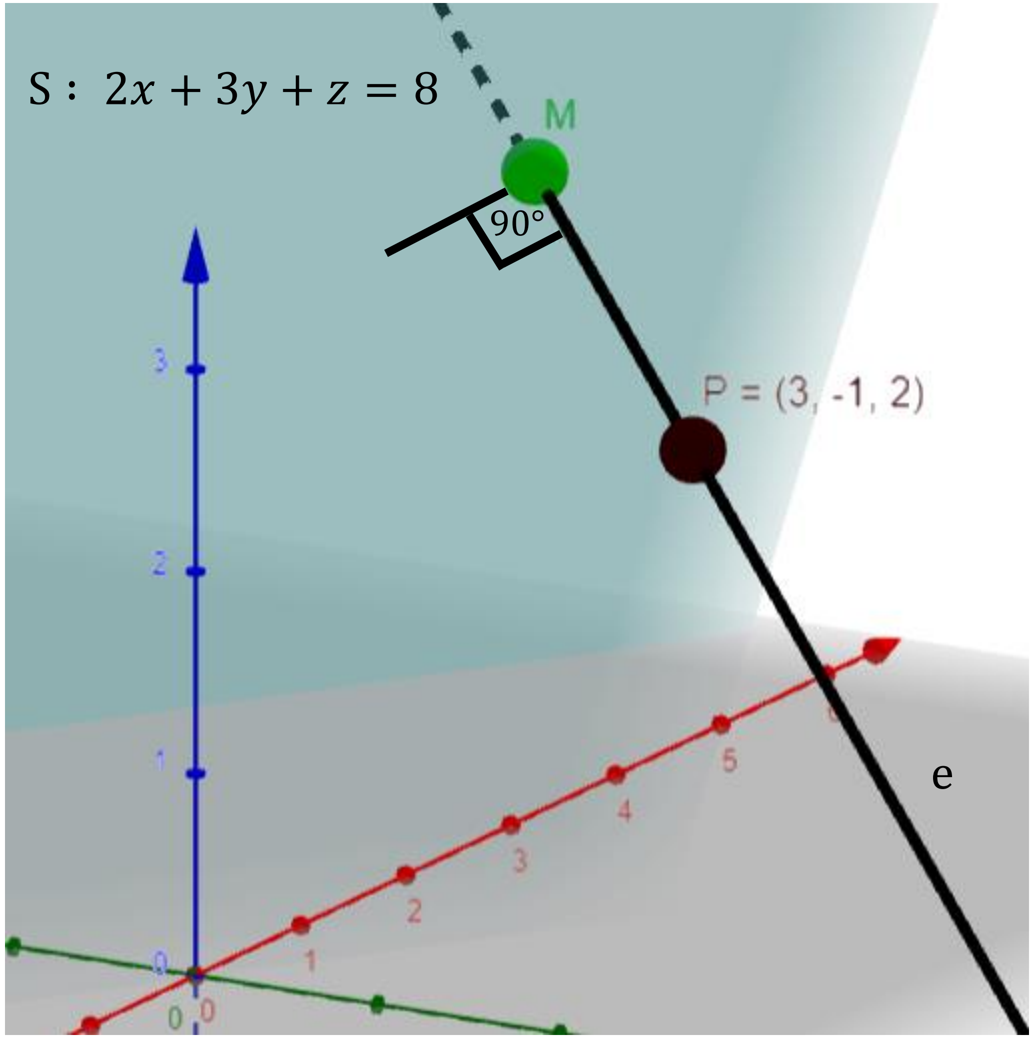


3. feladat

- Határozzuk meg a $\mathrm{P}(3, -1, 2)$ pont és $S : 2x + 3y + z = 8$ sík távolságát!

- Az e egyenes tartalmazza a P pontot, és irányvektora a sík normálvektora, azaz: $\mathrm{P}_0 = \mathrm{P} = (3, -1,2)$ és $v = n = (2, 3, 1)$.

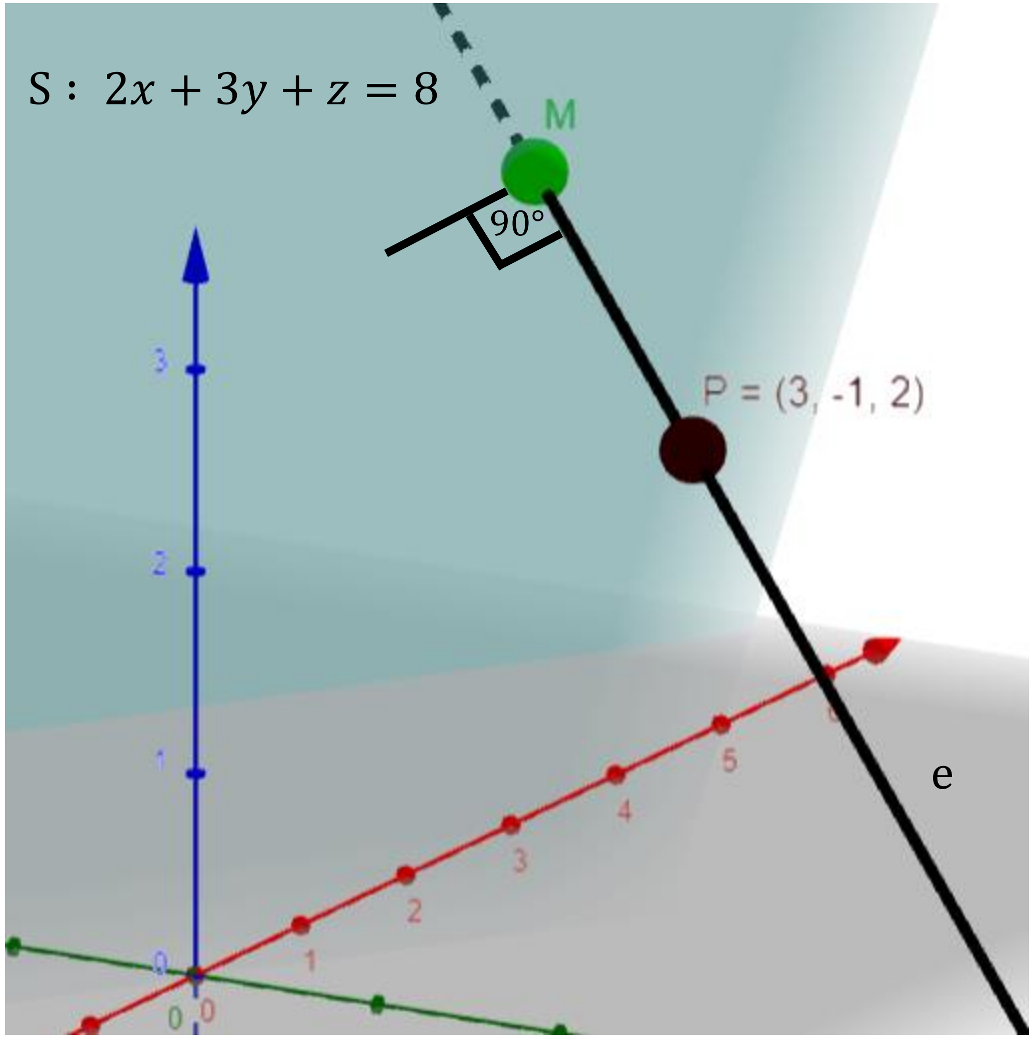
  Így a tanult formula alapján az egyenes egyenlete e : $x = 3 + 2t, y = -1 + 3t, z = 2 + t$.



3. feladat

- Határozzuk meg a $\mathrm{P}(3,-1,2)$ pont
  és $S: 2x+3y+z=8$ sík távolságát!

- Határozzuk meg a metszéspontot!
  $S: 2x+3y+z=8$
  $\mathrm{e}: x=3+2t, y=-1+3t, z=2+t.$
- Írjuk be az e egyenletek változóit S-be!
  $\mathrm{M}: 2(3+2t)+3(-1+3t)+(2+t)=8$
  $6+4t-3+9t+2+t=8$
  $14t=3 \rightarrow \mathrm{t}=\frac{3}{14}$
- Helyettesítsünk vissza e-be!
  $\mathrm{M}=\left(3+\frac{6}{14},-1+\frac{9}{14},2+\frac{3}{14}\right)$



3. feladat

- Határozzuk meg a $\mathrm{P}(3,-1,2)$ pont és $S: 2x+3y+z=8$ sík távolságát!

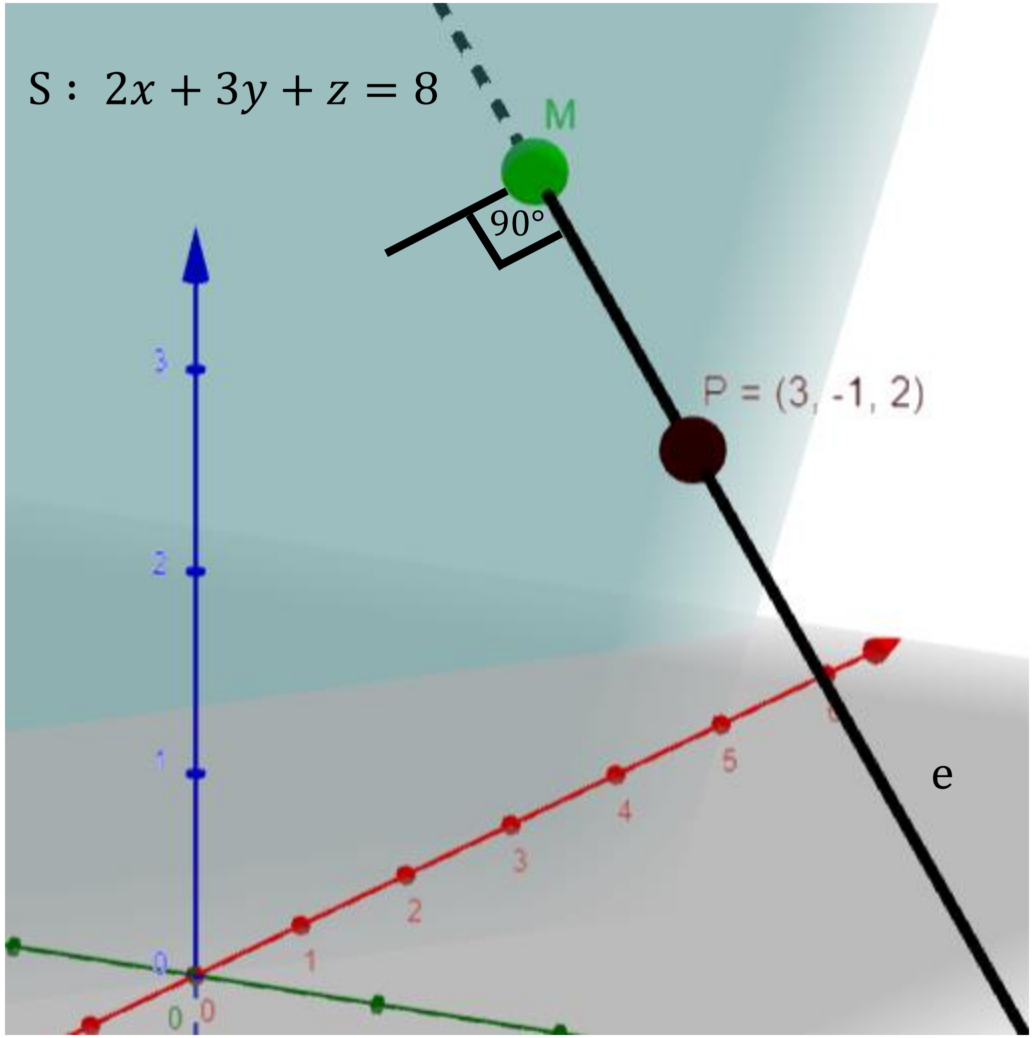
- Számoljuk ki a távolságot!

$$\mathrm{M}=\left(3+\frac{6}{14},-1+\frac{9}{14},2+\frac{3}{14}\right)$$

$$\left|\overrightarrow{MP}\right|=\left|\left(\frac{6}{14},\ \frac{9}{14},\ \frac{3}{14}\right)\right|=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{6}{14}\right)^2+\left(\frac{9}{14}\right)^2+\left(\frac{3}{14}\right)^2}=\frac{3}{\sqrt{14}}=$$

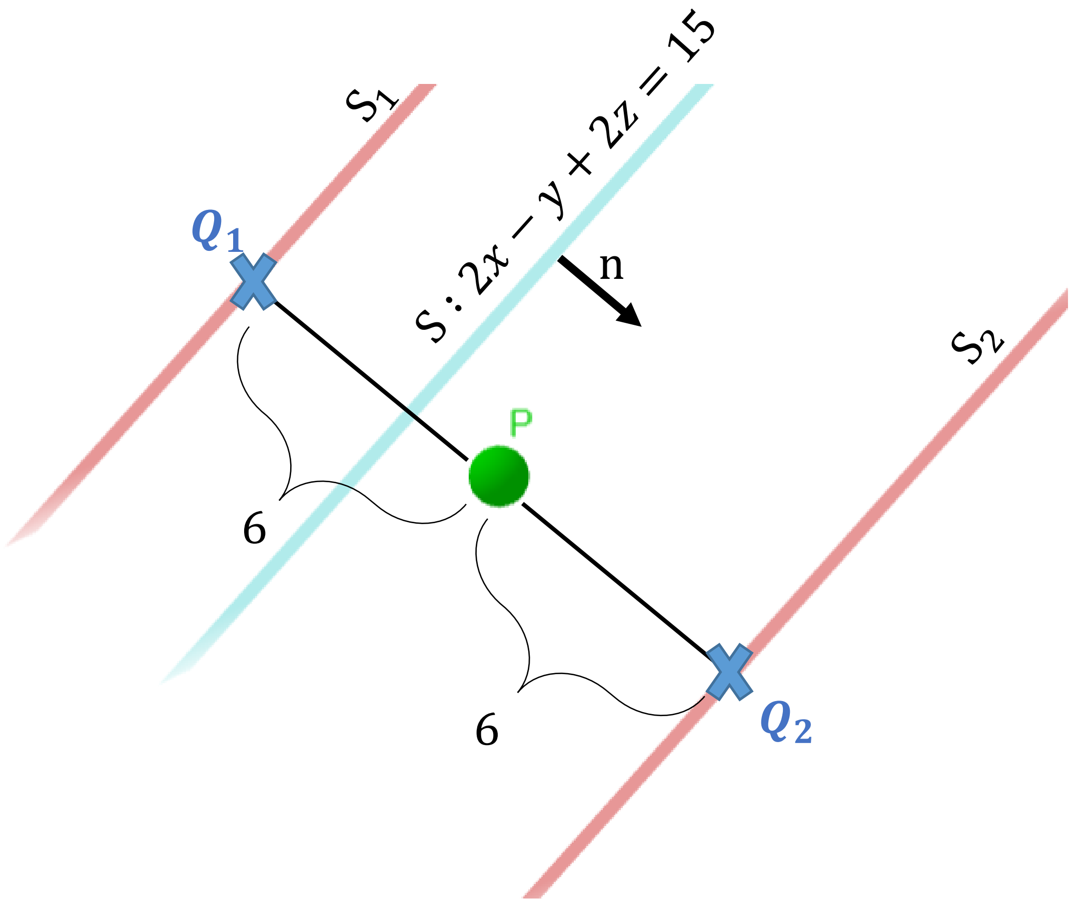
$$=0.8017$$



4. feladat

- Tekintsük a $\mathrm{P}(2,3,4)$ pontot és $S : 2x - y + 2z = 15$ síkot. Határozzuk meg azon S_1 és S_2 síkokat, melyek párhuzamosak az S síkkal, és a távolságuk a P ponttól 6!

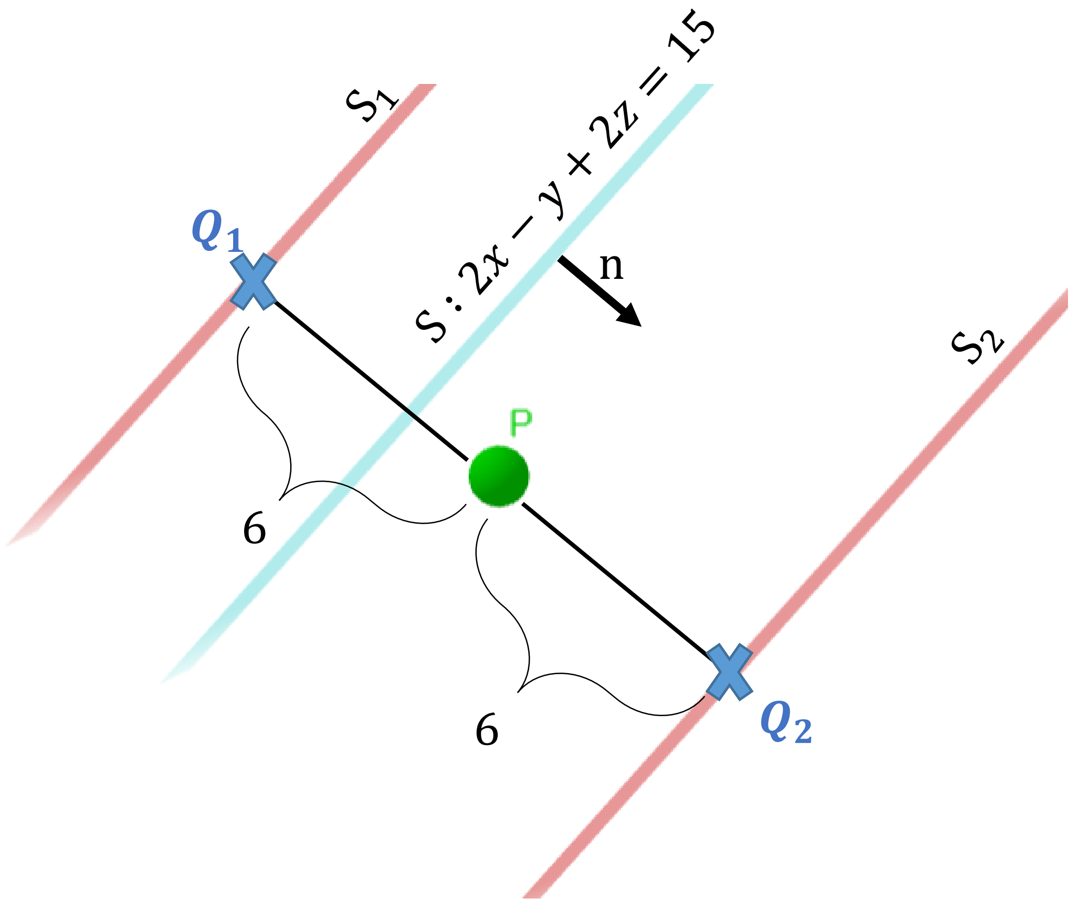
- Megoldási terv:
  - Tudjuk hogy az $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2$ síkok normálvektorai megegyeznek S normálvektorával, így a normálvektor meg tudjuk határozni.
  - Kell még egy-egy pont az S_1, S_2 síkokról hogy fel tudjuk írni az egyenletet.
  - A $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2$ pontokat meghatározhatjuk, ha eltoljuk a P pontot az n normálvektorral 6 távolságra.



4. feladat

- Tekintsük a $\mathrm{P}(2,3,4)$ pontot és $S : 2x - y + 2z = 15$ síkot. Határozzuk meg azon S_1 és S_2 síkokat, melyek párhuzamosak az S síkkal, és a távolságuk a P ponttól 6!

- S_1, S_2 normálvektora $n_1 = n_2 = n = (2, -1, 2)$, így a normálvektorokat kiolvastuk S egyenletéből.
- El kell tolnunk P-t n irányban 6 távolságra! Nézzük meg n hosszát!
  $|\mathrm{n}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$
  Azaz, ha eltoljuk $2\mathrm{n}$-nel a P pontot, pozitív és negatív irányba is, megkapjuk $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2$ pontokat.



4. feladat

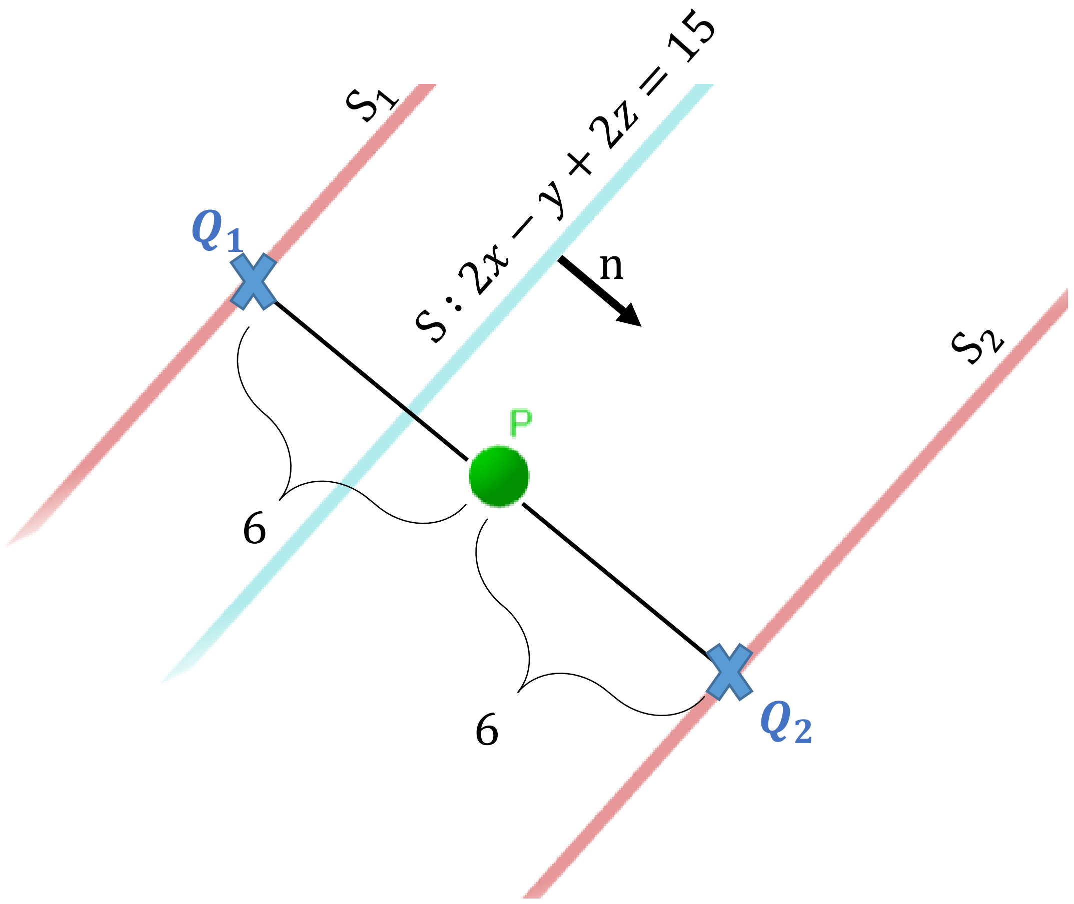
- Tekintsük a P(2,3,4) pontot és $S : 2x - y + 2z = 15$ síkot. Határozzuk meg azon S_1 és S_2 síkokat, melyek párhuzamosak az S síkkal, és a távolságuk a P ponttól 6!

  $n = (2, -1, 2)$

- A rajz alapján:

$$Q_1 = P - 2n = (-2, 5, 0)$$
$$Q_2 = P + 2n = (6,1,8)$$

- Így a síkok egyenletei:
  $S_1 : 2(x + 2) - (y - 5) + 2z = 0$, azaz
  $S_1 : 2x \ - y + 2z = -9$
  $S_2 : 2(x - 6) - (y - 1) + 2(z - 8) = 0$, azaz
  $S_2 : 2x \ - y + 2z = 27$



2. Feladatsor (két tanulságos feladat)

- 1. feladat: Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$z^2+\frac{\sqrt{2}}{2}z+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{8}i=0$$

- 2. feladat: Határozzuk meg az A(1,2,3), B(2,2,2), C(1,3,4) és D(2,2,5) pontok által meghatározott tetraéder térfogatát!

1. feladat

- Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$z^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} z + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8} i = 0$$

- 1. lépés: Ez egy másodfokú egyenlet, alkalmazhatjuk rá a megoldóképletet:
- $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} i}}{2} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}}{2}$
- Láthatjuk, hogy a gyök alatt egy komplex kifejezés maradt, így meg kell határoznunk annak az értékeit!

1. feladat

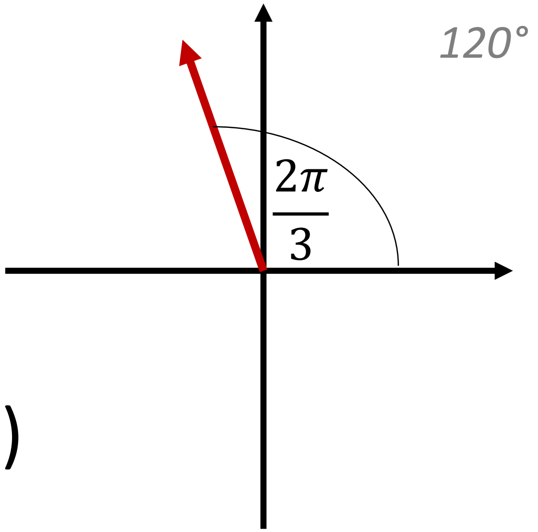
$$z_{1,2} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}}{2}$$

- 2. lépés: Határozzuk meg a gyök alatti kifejezés értékét!
- 2.1. lépés: Írjuk át trigonometrikus alakra!

$r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

és $\mathrm{tg}\varphi = -\sqrt{3}$, így $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ vagy $\varphi = \frac{5\pi}{3}$,

melyből $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ lesz a megoldás. (Készítsünk rajzot!)



1. feladat

$$z_{1,2} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}}{2}$$

- 2. lépés: Határozzuk meg a gyök alatti kifejezés értékét!
- 2.2. lépés: Vonjunk gyököt a tanult formulával!

$$\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i} = \sqrt{\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}} =$$

1. $= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$
2. $= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Vegyük észre, hogy a két gyök egymásnak -1-szerese, ami pont megfelel a $\pm$-nak a képletben, így elegendő az egyikkel számolni csak!

1. feladat

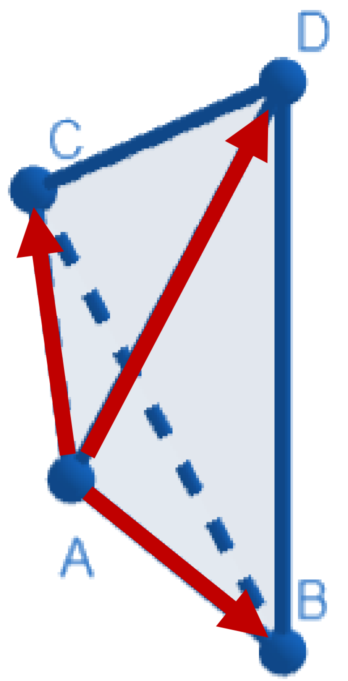
$$z_{1,2} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}}{2}$$

- 3. lépés: Számoljuk ki a gyököket!
- $z_1 = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{2} = \underline{\frac{1-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i}$
- $z_2 = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{2} = \underline{\frac{-1-\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i}$

2. feladat

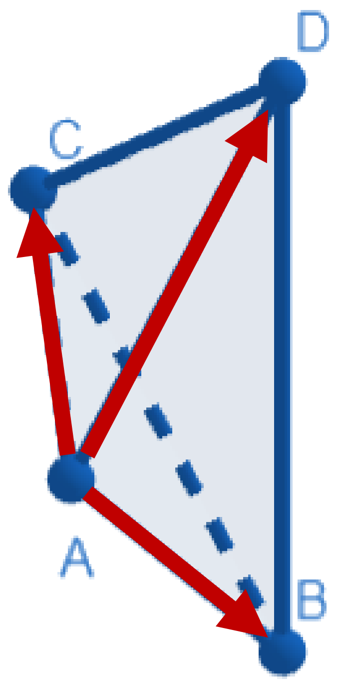
- Határozzuk meg az A(1,2,3), B(2,2,2), C(1,3,4) és D(2,2,5) pontok által meghatározott tetraéder térfogatát!

- Megoldási terv:
  - Tanultuk, hogy vegyesszorzattal meghatározható a tetraéder térfogata.
  - Azonban figyeljünk rá, hogy nem lehet kapásból az A, B, C és D helyvektorokra ráereszteni a képletet!
  - Alkalmazzuk a képletet például az $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AD}$ vektorokra!



2. feladat

- Határozzuk meg az A(1,2,3), B(2,2,2), C(1,3,4) és D(2,2,5) pontok által meghatározott tetraéder térfogatát!
- $\overrightarrow{AB} = (1,0,-1)$
- $\overrightarrow{AC} = (0,1,1)$
- $\overrightarrow{AD} = (1,0,2)$



2. feladat

- Határozzuk meg az A(1,2,3), B(2,2,2), C(1,3,4) és D(2,2,5) pontok által meghatározott tetraéder térfogatát!
- $\overrightarrow{AB} = (1,0,-1),\ \overrightarrow{AC} = (0,1,1), \overrightarrow{AD} = (1,0,2)$
- $T = \left|\frac{\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}}{6}\right|$
- $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1,-1,1)$
- $\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right) \overrightarrow{AD} = 3$
- $\mathrm{T} = \frac{1}{2}$