Matematika A1

II. Minta ZH és megoldások

Pintér József (gyakorlatvezető)

1. Feladatsor (első fele – sorozatok határértéke)

- 1. feladat: Határozzuk meg az $\epsilon = 10^{-5}$ számhoz tartozó N_0 küszöbindexet az

$$a_n = \frac{2n^2 + 1}{4n^2 - 1}$$

sorozat esetén! Lássuk be, hogy a sorozat monoton csökkenő!

- 2. feladat: Határozzuk meg a $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2}{2n^2-1}\right)^{\sqrt{n^4+n\cdot\ln(n)}}$ $=$? határértéket!

1. Feladat

Határozzuk meg az $\epsilon = 10^{-5}$ számhoz tartozó N_0 küszöbindexet az $a_n = \frac{2n^2+1}{4n^2-1}$ sorozat esetén! Lássuk be, hogy a sorozat monoton csökkenő!

Definíció:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, ha $\forall\epsilon > 0 :\ \exists N_0 \in \mathbb{N}^+ : \forall n \geq N_0 : |a_n - A| < \epsilon$

1. lépés: Határozzuk meg A-t!

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{4n^2-1}\right) =$$

1. Feladat

Határozzuk meg az $\epsilon = 10^{-5}$ számhoz tartozó N_0 küszöbindexet az $a_n = \frac{2n^2+1}{4n^2-1}$ sorozat esetén! Lássuk be, hogy a sorozat monoton csökkenő!

Definíció:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, ha $\forall\epsilon > 0 :\ \exists N_0 \in \mathbb{N}^+ : \forall n \geq N_0 : |a_n - A| < \epsilon$

1. lépés: Határozzuk meg A-t!

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+1}{4n^2-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{n^2}}{4-\frac{1}{n^2}}\right) = \frac{2}{4} = \underline{\frac{1}{2}}$$

0

1. Feladat

Határozzuk meg az $\epsilon = 10^{-5}$ számhoz tartozó N_0 küszöbindexet az $a_n = \frac{2n^2+1}{4n^2-1}$ sorozat esetén! Lássuk be, hogy a sorozat monoton csökkenő!

Definíció:
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, ha $\forall \epsilon > 0 :\ \exists N_0 \in \mathbb{N}^+ : \forall n \geq N_0 : \boldsymbol{|a_n - A| < \epsilon}$

2. lépés: Oldjuk meg az **egyenlőtlenséget**!

$$\left|\frac{2n^2+1}{4n^2-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{4n^2+2-4n^2+1}{8n^2-2}\right| = \left|\frac{3}{8n^2-2}\right| = \frac{3}{8n^2-2} < 10^{-5}$$

1. Feladat

Határozzuk meg az $\epsilon = 10^{-5}$ számhoz tartozó N_0 küszöbindexet az $a_n = \frac{2n^2+1}{4n^2-1}$ sorozat esetén! Lássuk be, hogy a sorozat monoton csökkenő!

Definíció:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, ha $\forall\epsilon > 0 :\ \exists N_0 \in \mathbb{N}^+ : \forall n \geq N_0 : \boldsymbol{|a_n - A| < \epsilon}$

2. lépés: Oldjuk meg az **egyenlőtlenséget**!

$$\left|\frac{2n^2+1}{4n^2-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{4n^2+2-4n^2+1}{8n^2-2}\right| = \left|\frac{3}{8n^2-2}\right| = \frac{3}{8n^2-2} < 10^{-5}$$

$$300000 < 8n^2 - 2$$
$$193.64 < n \ \Rightarrow N_0 = \underline{\underline{194}}$$

1. Feladat

Határozzuk meg az $\epsilon = 10^{-5}$ számhoz tartozó N_0 küszöbindexet az $a_n = \frac{2n^2+1}{4n^2-1}$ sorozat esetén! Lássuk be, hogy a sorozat monoton csökkenő!

A sorozat monoton csökkenő, ha $\forall n \in \mathbb{N}^+ \colon a_n \geq a_{n+1}$.

Írjuk fel a definícióban szereplő egyenlőtlenséget (fontos: elegendő, hogy $n \geq 1$-re igaz legyen):

$$\frac{2n^2+1}{4n^2-1} \geq \frac{2(n+1)^2+1}{4(n+1)^2-1}$$

($n \geq 1$ esetén átszorozhatunk egyenlőtlenség irányának változtatása nélkül, hiszen ekkor minden tag pozitív)

$$(2n^2+1)(4n^2+8n+4-1) \geq (2n^2+4n+2+1)(4n^2-1)$$

$$8\,n^4 + 16\,n^3 + 10\,n^2 + 8\,n + 3 \geq 8n^4 + 16n^3 + 10n^2 - 4n - 3$$

$$12n \geq -6$$

$$\underline{\underline{n \geq -\frac{1}{2}}} \quad \checkmark \quad \longrightarrow$$

$n \geq 1$-re monoton igaz az egyenlőtlenség, azaz a sorozat monoton csökken

2. feladat

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{2n^2-1}\right)^{\sqrt{n^4+n\cdot\ln(n)}}$ =? határértéket!

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{2n^2-1}\right)^{\sqrt{n^4+n\cdot\ln(n)}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n^2-1)+1}{2n^2-1}\right)^{\sqrt{n^4+n\cdot\ln(n)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2-1}\right)^{\sqrt{n^4+n\cdot\ln(n)}} = \cdots$$

Tétel: Ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, akkor $(1+a_n)^{b_n} = e^c$,
ahol $c = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)$.

Könnyen látható, hogy a példában teljesülnek a feltételek így alkalmazhatjuk a tételt!

2. feladat

Határozzuk meg a $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{2n^2-1}\right)^{\sqrt{n^4+n\cdot\ln(n)}}$ =? határértéket!

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{2n^2-1}\right)^{\sqrt{n^4+n\cdot\ln(n)}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n^2-1)+1}{2n^2-1}\right)^{\sqrt{n^4+n\cdot\ln(n)}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2n^2-1}}\right)^{\sqrt{\mathbf{n^4+n\cdot\ln(n)}}} = e^c = \underline{\underline{e^{\frac{1}{2}}}}$$

$$c = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^4+n\cdot\ln(n)}}{2n^2-1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{n\cdot\ln(n)}{n^4}}}{2-\frac{1}{n^2}}\right) = \frac{1}{2}$$

0

1. Feladatsor (második fele – deriválás és alkalmazása)

- 3. feladat: Határozzuk meg az $\arccos(x^2)$ görbe azon érintőjét, amely merőleges az $\mathrm{y} = -\frac{3}{4}x + 2$ egyenesre!

- 4. feladat: Számoljuk ki a következő deriváltakat!

  a, $f(x) = \frac{tg(x) \cdot \sin(x)}{x^3 + \ln(x)}$, $f'(x) = ?$

  b, $f(x) = \cos(x)^{\sin(x)}$, $f'(x) = ?$

3. feladat

Határozzuk meg az $f(x) = \arccos(x^2)$ görbe azon érintőjét, amely merőleges az $\mathrm{y} = -\frac{3}{4}x + 2$ egyenesre!

Tudjuk, hogy az egyenes meredeksége $-\frac{3}{4}$, ami azt jelenti, hogy az érintő meredeksége $\frac{4}{3}$ kell, hogy legyen.

Az érintő meredekségét megadja a függvény deriváltja, így a megoldandó egyenlet:

$$f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{4}{3}$$

3. feladat

Határozzuk meg az $f(x) = \arccos(x^2)$ görbe azon érintőjét, amely merőleges az $y = -\frac{3}{4}x + 2$ egyenesre!

$$f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{4}{3} \Rightarrow -6x = 4\sqrt{1-x^4} \Rightarrow 36x^2 = 16 - 16x^4$$

$$4x^4 + 9x^2 - 4 = 0$$

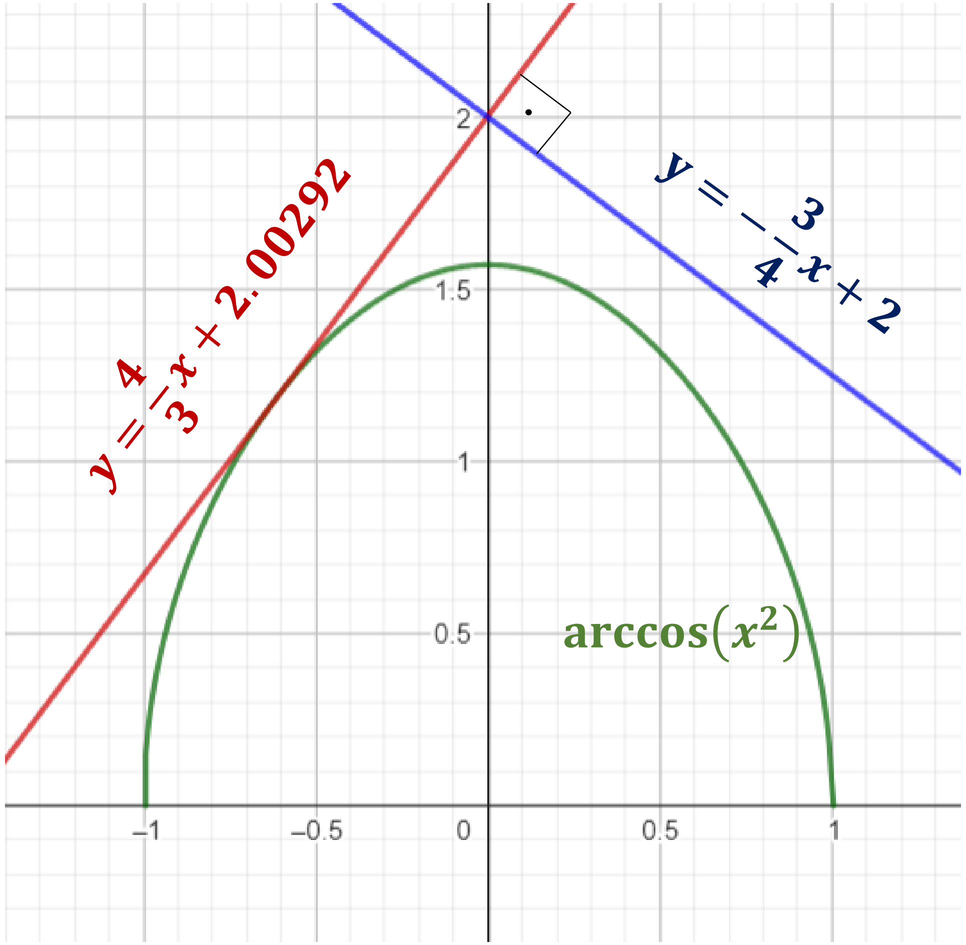
Másodfokú megoldóképlettel megoldva megkapjuk, hogy a két valós megoldás $x_1 = -0.6166$ *és* $x_2 = 0.6166.$

Figyelem! A narancssárga lépés egy négyzetre emelés, ami behozhat hamis gyököket, így kötelező ellenőrizni a megoldásokat!

Ellenőrzés: $f'(x_1) = \frac{4}{3}$, $f'(x_2) = -\frac{4}{3}$, így csak az x_1 lesz megoldás!

3. feladat

- Határozzuk meg az $f(x) = \boldsymbol{arccos}(\boldsymbol{x^2})$ görbe azon érintőjét, amely merőleges az $\mathbf{y} = -\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{x} + \mathbf{2}$ egyenesre!



Tudjuk, hogy az $x_0 = -0.6166$ pontban lesz merőleges az érintő az egyenesre,
így a képlet alapján:

$$e : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$y = \frac{4}{3}(x + 0.6166) + 1.18079$$

$$\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{x} + \mathbf{2.00292}$$

4. feladat

Számoljuk ki a következő deriváltakat!

a, $f(x) = \frac{5^x \cdot \sin(x)}{x^3 + \ln(x)}$, $f'(x) = ?$

b, $f(x) = \cos(x)^{\sin(x)}$, $f'(x) = ?$

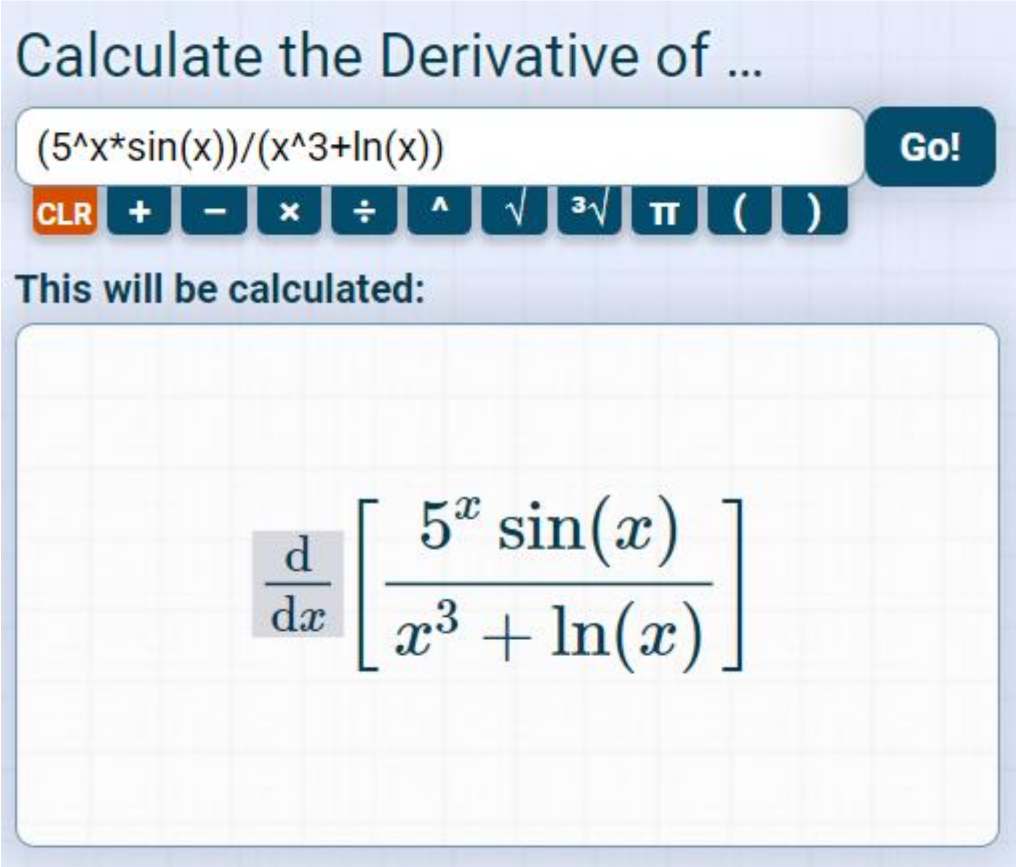
A példákat megoldjuk az általunk használt jelöléssel is, de mellé odateszem a https://www.derivative-calculator.net/ oldal által használtat is, hogy azzal is tudjunk feladatokat gyakorolni!

4. feladat

a, $f(x) = \frac{5^x \cdot \sin(x)}{x^3 + \ln(x)}$, $f'(x) = ?$

A $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ *csak annyit jelent, hogy az* x *változó szerint deriváljuk a függvényt! Ennek akkor lenne jelentősége, ha több változó is lenne, pl.: x és y is.*

(Matematika A2 anyagában olyan is lesz.)



4. feladat

a, $f(x) = \frac{5^x \cdot \sin(x)}{x^3 + \ln(x)}$, $f'(x) = ?$ *Tulajdonképpen:* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\text{függvény}] = (\text{függvény})'$

a mi jelölésünkkel.

FIRST DERIVATIVE:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathbf{f}(\boldsymbol{x})] = \mathbf{f}'(\boldsymbol{x}) =$$

Click at any deriv... hat was applied.

Apply the quotient rule:

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{5^x \sin(x)}{\ln(x) + x^3}\right]$$

$$= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[5^x \sin(x)] \cdot (\ln(x) + x^3) - 5^x \sin(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln(x) + x^3]}{(\ln(x) + x^3)^2}$$

4. feladat

a, $f(x) = \frac{5^x \cdot \sin(x)}{x^3+\ln(x)}$, $f'(x) = \frac{(5^x \cdot \sin(x))' \cdot (\ln(x)+x^3) - 5^x \sin(x) \cdot (\ln(x)+x^3)'}{(\ln(x)+x^3)^2}$

Először csak alkalmaztuk a törtek deriválására vonatkozó szabályunkat!

FIRST DERIVATIVE:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathbf{f}(x)] = \mathbf{f}'(x) =$$

Click at any deriv hat was applied.

Apply the quotient rule:

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{5^x \sin(x)}{\ln(x) + x^3}\right]$$

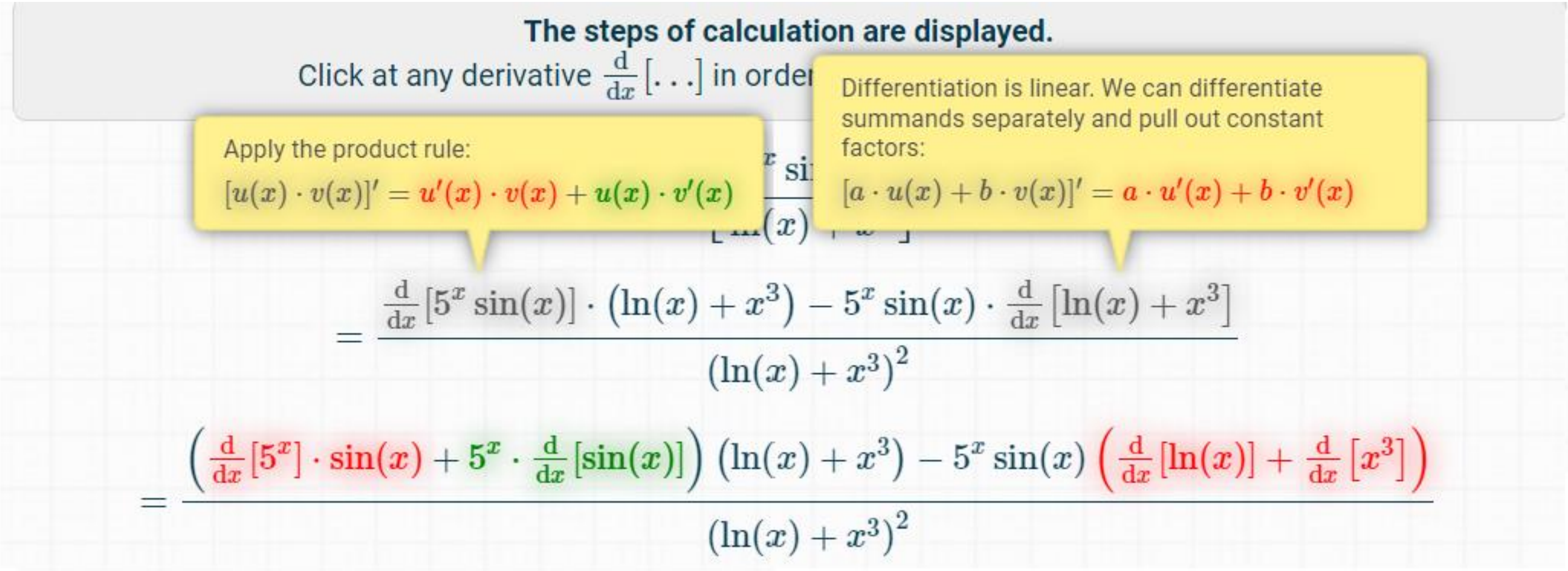
$$= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[5^x \sin(x)] \cdot (\ln(x) + x^3) - 5^x \sin(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln(x) + x^3]}{(\ln(x) + x^3)^2}$$

4. feladat

Következő lépésben alkalmaztunk két szabályt, először is a szorzat deriváltjára tanult képletet a bal oldalon, és az összeg felbontását a jobb oldalon!

$$f'(x) = \frac{(5^x \cdot \sin(x))' \cdot (\ln(x) + x^3) - 5^x \sin(x) \cdot (\ln(x) + x^3)'}{(\ln(x) + x^3)^2} =$$

$$\frac{\left((5^x)' \cdot \sin(x) + 5^x \cdot (\sin(x))'\right)(\ln(x) + x^3) - 5^x \sin(x)\left((\ln x)' + (x^3)'\right)}{(\ln(x) + x^3)^2}$$



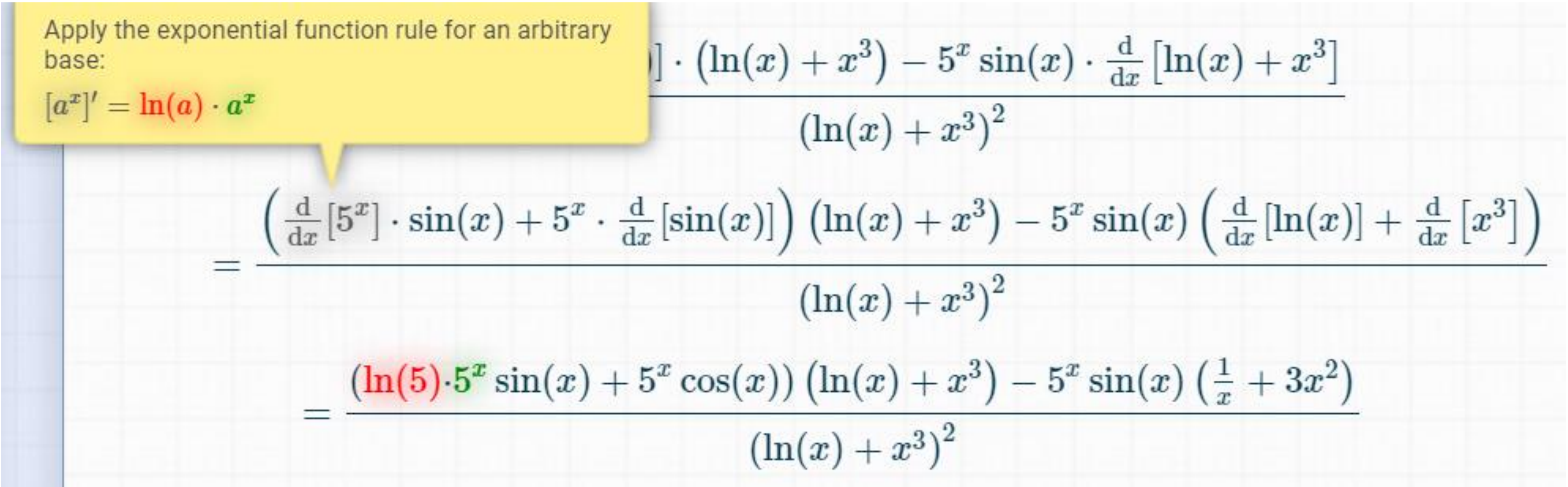
4. feladat

Végül kiszámoltuk az elemi deriváltakat! Ezeket is meg tudja mondani a program!

$$f'(x) = \frac{(5^x \cdot \sin(x))' \cdot (\ln(x) + x^3) - 5^x \sin(x) \cdot (\ln(x) + x^3)'}{(\ln(x) + x^3)^2} =$$

$$\frac{\left((5^x)' \cdot \sin(x) + 5^x \cdot (\sin(x))'\right)(\ln(x) + x^3) - 5^x \sin(x)\left((\ln x)' + (x^3)'\right)}{(\ln(x) + x^3)^2} =$$

$$\frac{(\ln(5) \cdot 5^x \sin(x) + 5^x \cos(x))(\ln(x) + x^3) - 5^x \sin(x)\left(\frac{1}{x} + 3x^2\right)}{(\ln(x) + x^3)^2}$$



4. feladat

a, $f(x) = \frac{5^x \cdot \sin(x)}{x^3 + \ln(x)}$, $f'(x) = \frac{(\ln(5) \cdot 5^x \sin(x) + 5^x \cos(x))\left(\ln(x) + x^3\right) - 5^x \sin(x)\left(\frac{1}{x} + 3x^2\right)}{(\ln(x) + x^3)^2}$

ZH-ra tanuljuk meg az összes szabályt, összeg deriválása, szorzat deriválása, törtek deriválása, összetett függvények deriválása, és tanuljuk meg az összes elemi deriváltat is!

A programot csak azért mutattam meg, hogy könnyen le tudjátok ellenőrizni magatokat, illetve a megoldások lépéseit! Nem kell zhn olyan részletesen végigírni, ahogy én (vagy a program) végigírjuk. Akár kapásból írhatjátok is a megoldást egy ilyen egyszerű feladatnál!

4. feladat

b, $f(x) = \cos(x)^{\sin(x)} = e^{\ln(\cos(x))\cdot\sin(x)}$

$f'(x) = \cos(x)^{\sin(x)} \left(\ln(\cos(x)) \cdot \sin(x)\right)' = \cos(x)^{\sin(x)} \left(\frac{1}{\cos(x)} \cdot - \sin(x) \sin(x) + \ln(\cos(x)) \cos(x)\right)$

Vagy alkalmazzátok az órán tanult képletet a feladatra! Ilyen rövid megoldás is bőven teljes pontot ér!

2. Feladatsor (két hasznos feladat)

1. feladat: Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2-\sqrt{n^4+2n^2}\right)$ határértéket!

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2-\sqrt{n^4+2n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\left(n^2-\sqrt{n^4+2n^2}\right)\cdot\left(\frac{n^2+\sqrt{n^4-2n^2}}{n^2+\sqrt{n^4-2n^2}}\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^4-n^4+2n^2}{n^2+\sqrt{n^4-2n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n^2+\sqrt{n^4-2n^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}}\right)=\underline{\underline{1}}$$

2. Feladatsor (két hasznos feladat)

2. feladat: Határozzuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy folytonos legyen a függvény!

$$\mathrm{f(x)} \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} & \text{, ha } x > 0 \\ a & \text{, ha } x = 0 \end{cases}$$

Ahhoz, hogy folytonos legyen a függvény meg kell hogy egyezzen a helyettesítési értéke a határértékével az $x = 0$ pontban, azaz

$$f(0) = a = \lim_{x \to 0} \big(f(x)\big) = \lim_{x \to 0+0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right).$$

Tehát lényegében csak ki kell számolnunk a fenti függvény határértékét a 0-ban!

2. Feladatsor (két hasznos feladat)

$$a = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)}\right) \underset{\text{L'H}}{\overset{„\frac{\infty}{\infty}”}{=}} \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - 1}{(e^x - 1) + xe^x}\right) \underset{\text{L'H}}{\overset{„\frac{\infty}{\infty}”}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{e^x + e^x + xe^x}\right) = \frac{1}{2}$$

Így a függvény az $a = \frac{1}{2}$ paraméterre lesz folytonos!