Matematika A1

III. ZH gyakorló feladatsor

Pintér József (gyakorlatvezető)

1. Implicit deriválás

<u>Feladat</u>

Határozzuk meg az implicit módon megadott $x^3 + 2x^2y + y = 0$ görbe azon érintő egyeneseit, melyek merőlegesek az y-tengellyel!

<u>Megoldás</u>

A görbe érintőjének meredekségét megadja az $y'(x)$ függvény, ami meghatározható implicit deriválással.
Tekintsünk y-ra x-től függő változóként (függvényként), azaz $y(x)$-ként.

$$x^3 + 2x^2y(x) + y(x) = 0$$

$$\Big\downarrow \frac{d}{dx}$$

$$3x^2 + 4xy(x) + 2x^2y'(x) + y'(x) = 0$$

1. Implicit deriválás

Megoldás (folyt.)

$3x^2 + 4xy(x) + 2x^2y'(x) + y'(x) = 0$ -> $y'(x) = \frac{-3x^2-4xy(x)}{2x^2+1} = \frac{-3x^2-4xy}{2x^2+1}$

Ahhoz, hogy merőleges legyen az y-tengelyre az érintő egyenes, annak meredeksége 0 kell hogy legyen, azaz $y'(x) = 0$.

$$y'(x) = \frac{-3x^2 - 4xy}{x^2 + 1} = 0 \ \rightarrow -3x^2 - 4xy = 0$$

Ennek az egyenletnek két megoldása van: $x_1 = 0$ és $x_2 = -\frac{4}{3}y$.

Tehát a görbének azokban a pontokban lesz vízszintes az érintő egyenese, amelyeknél az x koordináta 0 vagy $-\frac{4}{3}y$ alakú.

Határozzuk meg, hogy a görbe mely pontjaira teljesülnek ezek!

1. Implicit deriválás

<u>Megoldás</u> (folyt.)

I. eset: $x = 0$

$x^3 + 2x^2y + y = 0^3 + 2 \cdot 0^2y + y = y = 0.$

Tehát az egyik ilyen megoldás a $P_1 = (0, 0)$ pont.

II. eset: $x = -\frac{4}{3}y \ \rightarrow y = -\frac{3}{4}x$ (Lehetne az első verzióval is dolgozni, de én y-t szeretném kifejezni.)

$x^3 + 2x^2y + y = x^3 - \frac{6}{4}x^3 - \frac{3}{4}x = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x = 0.$

Vegyük észre, hogy ennek is megoldása az $x = 0$ (és így $y = -\frac{3}{4}x = 0$, azaz P_1 pont), de ezt már megtaláltuk. Nézzük a többit ($x \neq 0$):

$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4} = 0 \ \rightarrow x^2 = -\frac{3}{2} \ \rightarrow$ Nincs más valós megoldás.

1. Implicit deriválás

Megoldás (folyt.)

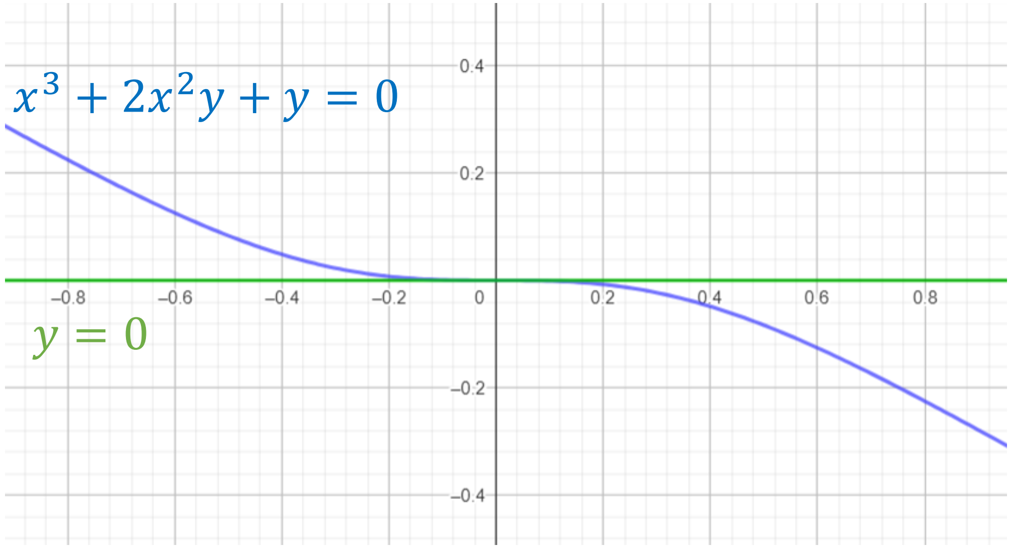
Tehát egyetlen pont van, melyben az érintő merőleges az y-tengellyel:

$P(0,0)$

Írjuk fel az érintőegyenesek egyenletét a tanult képlettel!

„e: $y = y'(x) \cdot (x - x_0) + y_0$, ahol $y'(x)$ a meredekség, x_0 és y_0 a fix pont koordinátái.”

$e\ : y = 0(x-0) + 0 \ \rightarrow \underline{\underline{y = 0}}$



2. Paraméteres deriválás

Feladat

Határozzuk meg a t paraméter azon értéket, melyre a $\gamma_1 = (\cos t\,, \sin t)$ $\left(t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ és $\gamma_2 = (t^2 + 1, t^2 - 1)$ $(t \in]-\infty, \infty[\ )$görbék érintő egyenesei merőlegesek! Írjuk fel az érintő egyenesek egyenletét is!

Megoldás

Tanultuk, hogy a paraméteres görbék érintő egyenesének meredekségét megadja az „$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$” formula.

2. Paraméteres deriválás

<u>Megoldás</u> (folyt.)

Tanultuk, hogy a paraméteres görbék érintő egyenesének meredekségét megadja az „$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$" formula. (Ahol a pötty a t változó szerinti deriválást jelöli!)

γ_1 esetén: $y_1' = \frac{\cos(t)}{-\sin(t)} = -ctg(t)$

γ_2 esetén: $y_2' = 1$ (Valóban, a γ_2 csak egy (fél)egyenes, lásd rajz a következő oldalon.)

Ahhoz, hogy a két egyenes merőleges legyen $y_1' = \frac{-1}{y_2'}$ összefüggésnek teljesülnie kell, azaz $y_1' = -ctg(t) = -1$ legyen, melynek egyetlen megoldása a $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ halmazon a $t = \frac{\pi}{4}$.

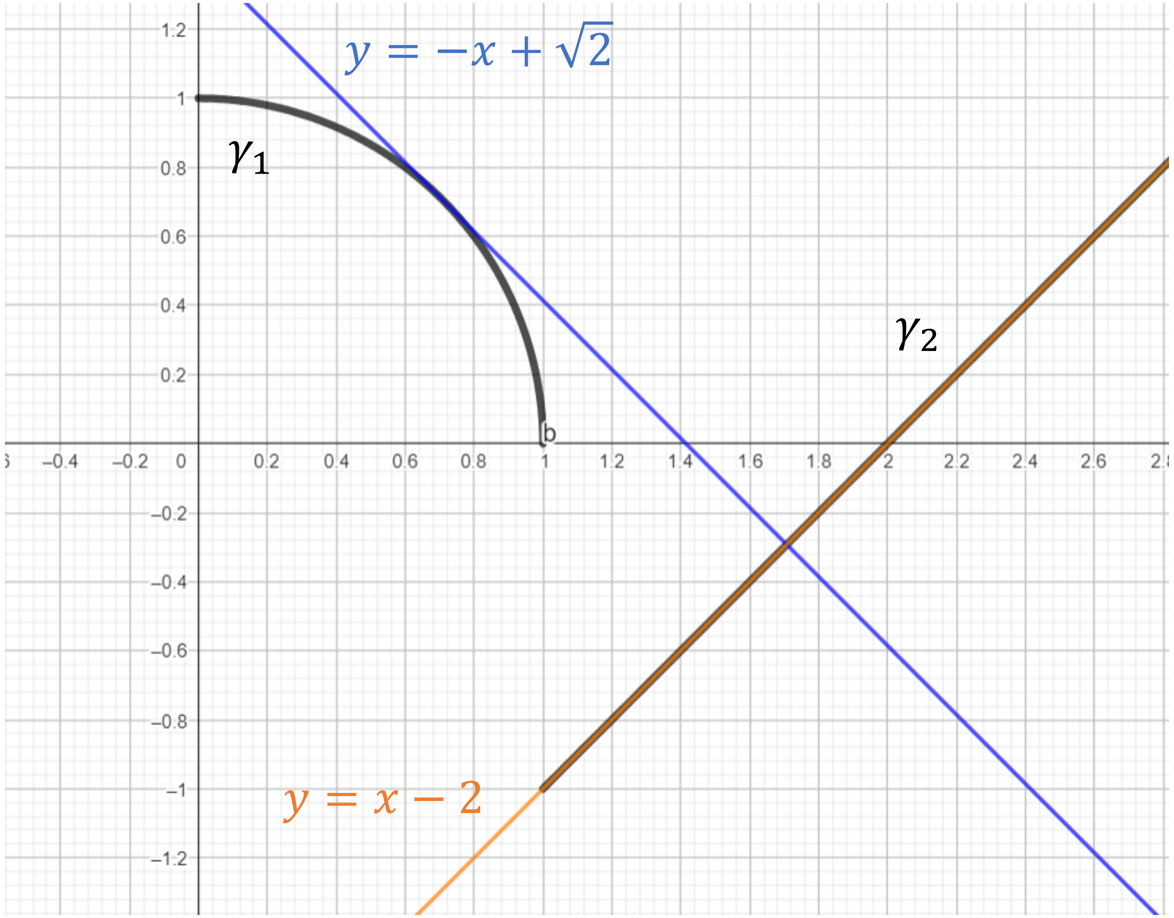
2. Paraméteres deriválás

<u>Megoldás</u> (folyt.)

Tehát a $t = \frac{\pi}{4}$ paraméterben kell venni a görbék érintő egyeneseit.

γ_1 esetén $e_1 : y = -1\left(x - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \underline{\underline{-x + \sqrt{2}}}$

γ_2 esetén $e_2 : y = 1\left(x - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - 1\right) + \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - 1 = \underline{\underline{x - 2}}$



Tehát a feladat egy negyedkör és egy féleegyenes merőleges érintő egyeneseinek felírásáról szólt.
De egyébként a megoldáshoz nem kell tudni felrajzolni egy ilyet, szimplán deriválással, egyenletek megoldásával kijön az eredmény.

3. Taylor-polinom 1.

<u>Feladat</u>

Határozzuk meg az $f(x) = \cos(\pi \cdot x) + \ln x + x^3 \cdot e^x$ harmadfokú Taylor-polinomját az $x_0 = 1$ pont körül!

<u>Megoldás</u>

A tanult képlet alapján $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$.

Így tehát ki kell számolnunk a deriváltakat egészen a harmadik deriváltig!

3. Taylor-polinom 1.

<u>Megoldás</u>

A tanult képlet alapján $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$.

Így tehát ki kell számolnunk a deriváltakat egészen a harmadik deriváltig!

$f(x) = \cos(\pi \cdot x) + \ln x + x^3 \cdot e^x$

$f'(x) = -\pi \cdot \sin(\pi \cdot x) + \frac{1}{x} + 3x^2e^x + x^3e^x$

$f''(x) = -\pi^2 \cdot \cos(\pi \cdot x) + \frac{-1}{x^2} + 6x\, e^x + 3x^2e^x + 3x^2e^x + x^3e^x$

$f'''(x) = \pi^3 \sin(\pi \cdot x) + \frac{2}{x^3} + 6e^x + 6xe^x + 6xe^x + 3x^2e^x + 6xe^x + 3x^2e^x + 3x^2e^x + x^3e^x$

3. Taylor-polinom 1.

Megoldás

$f(x) = \cos(\pi \cdot x) + \ln x + x^3 \cdot e^x$

$f'(x) = -\pi \cdot \sin(\pi \cdot x) + \frac{1}{x} + 3x^2e^x + x^3e^x$

$f''(x) = -\pi^2 \cdot \cos(\pi \cdot x) + \frac{-1}{x^2} + 6x\,e^x + 3x^2e^x + 3x^2e^x + x^3e^x$

$f'''(x) = \pi^3\sin(\pi \cdot x) + \frac{2}{x^3} + 6e^x + 6xe^x + 6xe^x + 3x^2e^x + 6xe^x + 3x^2e^x + 3x^2e^x + x^3e^x$

$f(1) = e - 1, f'(1) = 1 + 4e, f''(1) = -1 + 13e + \pi^2, f'''(1) = 2 + 34e$

Így mindent összerakva a Taylor-polinom:

$T_3(x) = e - 1 + (1 + 4e) \cdot (x - 1) + \frac{-1+13e+\pi^2}{2}(x - 1)^2 + \frac{2+34e}{3!}(x - 1)^3$

4. Taylor-polinom 2.

Feladat

Határozzuk meg az $f(x) = sh(2x)$ függvény ötödfokú Taylor-polinomját az $x_0 = 0$ pont körül a $g(x) = e^{2x}$ függvény segítségével! Adjunk becslést a $sh(0.1)$ értékére!

Megoldás

Tanultuk, hogy $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, így $e^{2x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!}$.

Tudjuk továbbá, hogy $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, azaz $sh(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$.

4. Taylor-polinom 2.

Megoldás

Tanultuk, hogy $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, így $e^{2x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!}$.

Tudjuk továbbá, hogy $sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, azaz $sh(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}$.

Így $sh(2x) = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2x)^k}{k!}}{2} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(2x)^k}{k!} - \frac{(-2x)^k}{k!} \right)}{2} =$

$= \frac{1}{2} \left((1-1) + (2x+2x) + \left(\frac{4x^2}{2} - \frac{4x^2}{2} \right) + \left(\frac{8x^3}{6} + \frac{8x^3}{6} \right) + \left(\frac{16x^4}{24} - \frac{16x^4}{24} \right) + \left(\frac{32x^5}{120} + \frac{32x^5}{120} \right) + \cdots \right) = 2x + \frac{16x^3}{12} + \frac{64x^5}{240} + \cdots$. Innen pedig egyszerűen meghatározható a Taylor-polinom.

4. Taylor-polinom 2.

<u>Megoldás</u>

$T_5(x) = 2x + \frac{16x^3}{12} + \frac{64x^5}{240}$

Ez alapján becslést tudunk adni a $sh(0.1)$ értékére!

Vegyük észre, hogy $\mathrm{f}(0.05) = sh(0.1) =$ 0.100166.

Így a becslés $T_5(0.05) = 2 \cdot 0.05 + \frac{16}{12} \cdot (0.05)^3 + \frac{64}{240}(0.05)^5 =$ 0.100166.

(Ez a becslés egyébként 10 tizedesjegyig pontos.)

5. Teljes függvényvizsgálat

Teljes függvényvizsgálathoz Nagy Ilona jegyzetét ajánlom, melyben 16 darab kidolgozott példa is szerepel! Aszimptotákról minimális említés volt csak, de egyébként olyat nem néztünk.

Ami nekünk fontos:

Értelmezési tartomány, zérushelyek, monotonitás, konvexitás (és ezekhez kapcsolódóan lokális szélsőértékek, inflexiós pontok), határérték az értelmezési tartomány szélein (végtelenben is) és szakadási helyeken, értékkészlet.

Készítsünk **táblázatot** és **ábrát** is! Ábrán legyen egy-két hely pontosan jelölve, pl.: zérushelyek, minimumok, maximumok, és nagyjából élethűen a görbületek (hol nő, hol csökken, konvex (U alakú), konkáv (fordított U alakú)).

Feladatsor: https://math.bme.hu/~nagyi/a1/fuggvenyvizsgalat.pdf

6. Szöveges feladatok

Az egyik legfontosabb, legnehezebb és leghasznosabb feladattípus!

Szintén Nagy Ilona kidolgozott példáit ajánlom, melyben 12 darab kidolgozott példa szerepel!

Feladatsor: https://math.bme.hu/~nagyi/a1/szelsoertek.pdf

Mindenképpen tudjuk megoldani az órán tanultakat, és a feladatsorból az 1., 2., 4., 5., 7., 11. és 12. feladatokat. (Tehát fontosabbak a geometriai jellegű feladatok! De azért a többit is érdemes lehet megnézni.)

Vigyázzatok! Néhol félre van számozva a megoldás, pl.: A 11-es feladathoz a 10-es megoldás tartozik. De úgyis ki lehet találni a megoldásból melyikről is van szó!