Szeparábilis differenciálegyenletek

Feladatok és megoldásuk

Pintér József gyakorlatvezető

Elmélet ismétlése

A szeparábilis (vagy szétválasztható) differenciálegyenletek olyan egyenletek, melyek felírhatóak $y' = f(x) \cdot g(y)$ alakban, ahol f olyan függvény, mely csak x-től függ, g pedig csak y-tól. Ezekben az egyenletekben a megoldás nem egy szám, hanem az $y(x)$ függvény, azaz a cél y meghatározása x függvényében.

Ilyen egyenletek megoldásához a következő észrevételeket kell tennünk:

1. $y' = \frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \rightarrow \frac{1}{g(y)} dy = f(x)\, dx$
2. Ha az utóbbi összefüggés mindkét oldalát integráljuk:
   $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x)\, dx + C$
3. A fenti integrálokat kiszámolva a bal oldal csak y-tól függ, a jobb oldal pedig csak x-től. Így apróbb átalakításokkal/transzformációkkal meghatározható y.

Elmélet ismétlése

A szeparábilis (vagy szétválasztható) differenciálegyenletek olyan egyenletek, melyek felírhatóak $y' = f(x) \cdot g(y)$ alakban.

Ezekhez némely feladatok esetében tartozik egy kezdeti érték feltétel is.

A kezdeti érték feltétel megadja, hogy egy tetszőleges x_0 pontban, mennyi kell hogy legyen az $y(x_0)$ értéke. (Például megadhatja, hogy $y(1) = 5$.)

A kezdeti érték feltétel megoldása az $y(x)$ függvény meghatározása után történik.

Mivel a megoldásban szerepel egy C paraméter ($\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x)\, dx + C$), így a kezdeti érték feltétel megoldásához csak meg kell határozni a C paraméter értékét. (Például mennyi legyen a C, hogy $y(1) = 5$ legyen.)

(Ha van kezdeti érték feltétel is, akkor a C paramétert még tartalmazó megoldást általában a differenciálegyenlet általános megoldásának hívjuk.)

1. feladat

Oldjuk meg az $y' = 6y^2x$ egyenletet az $y(1) = \frac{1}{25}$ kezdeti érték feltétel mellett!

<u>Megoldás:</u>

Azért hogy lássuk a definíciót a feladatban, írjuk fel $f(x)$-et és $g(y)$-t:

Mondjuk egy lehetséges felírás: $f(x) = 6x$ és $g(y) = y^2$. (A 6-ost bárhova tehetjük.)

Ez alapján a megoldás: $\int \frac{1}{y^2} dy = \int 6x \, dx + C$.

1. feladat

Oldjuk meg az $y' = 6y^2x$ egyenletet az $y(1) = \frac{1}{25}$ kezdeti érték feltétel mellett!

Megoldás:

$\int \frac{1}{y^2} dy = \int 6x\, dx + C$ egyenletben az integrálást elvégezve a következőeket kapjuk: $-\frac{1}{y} = 3x^2 + C$

Tehát a differenciálegyenlet általános megoldása (fejezzük ki y-t):
$y = \frac{-1}{3x^2+C}$.

1. feladat

Oldjuk meg az $y' = 6y^2x$ egyenletet az $y(1) = \frac{1}{25}$ kezdeti érték feltétel mellett!

<u>Megoldás:</u>

Tehát a differenciálegyenlet általános megoldása: $y = \frac{-1}{3x^2+C}$.

Végül pedig határozzuk meg C értékét a kezdeti érték feltétel teljesítéséhez: $y(1) = \frac{-1}{3\cdot 1^2+C} = \frac{1}{25} \ \rightarrow C + 3 = -25 \ \rightarrow C = -28$.

Így a kezdeti érték feltételt kielégítő megoldás az $y(x) = \frac{-1}{3x^2-28}$.

2. feladat

Oldjuk meg az $y' = \frac{x}{y}$ egyenletet az $y(1) = -2$ kezdeti érték feltétel mellett!

<u>Megoldás:</u>

Láthatóan $f(x) = x$ és $g(y) = \frac{1}{y}$, így a megoldást a következő integrál adja: $\int y\, dy = \int x\, dx + C$, melyből $\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C$.

Azaz a megoldások $y = \pm\sqrt{x^2 + 2C}$, (ilyenkor nyugodtan írjuk át a $2C$-t, mondjuk C_2-re, ha zavaró.)

2. feladat

Oldjuk meg az $y' = \frac{x}{y}$ egyenletet az $y(1) = -2$ kezdeti érték feltétel mellett!

<u>Megoldás:</u>

A megoldás $y = \pm\sqrt{x^2 + C_2}$ alakú, melyben meg kell határoznunk a C_2 értékét a kezdeti feltételnek megfelelően!

Vegyük észre, hogy a jobb oldali kifejezés értéke pozitív, ha az előjel $+$, és negatív, ha az előjel $-$. Így a megoldást az utóbbi esetben kell keresnünk!

$$y(1) = -\sqrt{1^2 + C_2} = -2 \;\rightarrow 1 + C_2 = 4 \;\rightarrow C_2 = 3.$$

2. feladat

Oldjuk meg az $y' = \frac{x}{y}$ egyenletet az $y(1) = -2$ kezdeti érték feltétel mellett!

<u>Megoldás:</u>

Így a kezdeti érték feltételt kielégítő megoldás az

$$\underline{\underline{y(x) = -\sqrt{x^2+3}}}.$$

3. feladat

Határozzuk meg az $y' = e^{x-y}$ differenciálegyenlet megoldását az $y(1) = 2$ kezdetiérték feltétel mellett!

<u>Megoldás:</u>

Mivel $y' = e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ így $f(x) = e^x$ és $g(x) = \frac{1}{e^y}$.

Tehát $\int e^y \, dy = \int e^x \, dx + C$, azaz $e^y = e^x + C$.

Így $y = \ln(e^x + C)$, melyből meghatározható a C paraméter a kezdeti érték feltétel alapján:

$$y(1) = \ln(e^1 + C) = 2 \;\rightarrow \mathrm{e} + \mathrm{C} = \mathrm{e}^2 \;\rightarrow \mathrm{C} = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}.$$

Azaz a megoldás: $\underline{\underline{y(x) = \ln(e^x + e^2 - e)}}$.

4. feladat

Határozzuk meg az $y' = \sqrt{\frac{y}{x}}$ egyenlet általános megoldását!

<u>Megoldás:</u>

Mivel $y' = \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ így $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ és $g(y) = \sqrt{y}$.

Tehát $\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx + C$, azaz $2\sqrt{y} = 2\sqrt{x} + C$.

Innen $\underline{\underline{y = \left(\sqrt{x} + \frac{C}{2}\right)}}^2$.

5. feladat (egy nehezebb kiegészítő feladat)

Határozzuk meg az $y' = (x^2 - 4)(3y + 2)$ egyenlet általános megoldását!

<u>Megoldás:</u>

Láthatóan $f(x) = x^2 - 4$ és $g(y) = 3y + 2$.

Így $\int \frac{1}{3y+2} dy = \int x^2 - 4\, dx + C \; \rightarrow \frac{\ln|3y+2|}{3} = \frac{x^3}{3} - 4x + C$.

Azaz $\ln|3y + 2| = x^3 - 12x + 3C \; \rightarrow |3y + 2| = e^{x^3 - 12x + C_2}$.

Bontsuk fel az abszolútértéket!

5. feladat (egy nehezebb kiegészítő feladat)

Határozzuk meg az $y' = (x^2 - 4)(3y + 2)$ egyenlet általános megoldását!

<u>Megoldás:</u>

$|3y + 2| = e^{x^3 - 12x + C_2}$

Bontsuk fel az abszolútértéket!

1. eset: $3y + 2 = e^{x^3 - 12x + c_2} \rightarrow y = \frac{e^{x^3 - 12x + c_2} - 2}{3}$
2. eset: $3y + 2 = -\, e^{x^3 - 12x + c_2} \rightarrow y = \frac{-e^{x^3 - 12x + c_2} - 2}{3}$

5. feladat (egy nehezebb kiegészítő feladat)

Határozzuk meg az $y' = (x^2 - 4)(3y + 2)$ egyenlet általános megoldását!

<u>Megoldás:</u>

Így a megoldás $y = \frac{-2 \pm e^{x^3 - 12x + c_2}}{3}$.

DE: vegyük észre, hogy a differenciálegyenletnek a megoldása az $y(x) = -\frac{2}{3}$ konstans szám is, hiszen ebben az esetben $g(y) = (3y + 2) = 0$, azaz $y' = f(x)g(y) = 0$, ami valóban igaz, ha $y(x) = -\frac{2}{3}$ konstans függvény. Tehát ez a feladat tartalmaz egy trükkös szinguláris megoldást is, melyet úgy kaphatunk ha a fenti általános megoldásban $c_2 \to -\infty$-hez. Nem valószínű, hogy lesz ilyen trükkösebb megoldás a vizsgákon, de jó ha tudunk róla, hogy némely esetben a g(y)=0 egyenlet önmagában is adhat megoldást.

Megjegyzés

A megoldások ellenőrzéséhez két felületet tudok javasolni, egyrészt használhatjuk a https://www.symbolab.com/solver/ordinary-differential-equation-calculator programot, mely megadja a végeredményeket. (Ha odatesszük az egyenlet mögé vesszővel elválasztva a kezdeti érték feladatot is, akkor meghatározza a C értékét is.)

Illetve ha fel tudjuk írni az elméleti rész alapján a két integrált, ami megadja a megoldást, akkor onnantól kezdve elegendő egy integrálszámító programot használni, melyhez én az https://www.integral-calculator.com/ oldalt tudom javasolni. Sajnos ez csak az esetek 95%-ban ad olyan megoldást, amit mi tanultunk, de azt hiszem hogy differenciál egyenletek esetében egyszerűek lesznek az integrálok, és ez a szoftver is hasonlót fog mondani, mint ahogy mi tanultuk.