Kalkulus 1,
10. Feladatsor

2020/21. 1. félév

Függvény határértéke

1. Bizonyítsuk be definíció alapján a következőket!

   (a) $\lim_{x\to 2} \frac{3x+1}{5x+4} = \frac{1}{2}$

   (b) $\lim_{x\to 4} \frac{x^{-}16}{x^2-4x} = 2$

   (c) $\lim_{x\to \infty} \frac{5x+1}{3x+9} = \frac{5}{3}$

   (d) $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = \infty$

2. Számoljuk ki a határértékeket!

   (a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+4x-5}{x^2-1}$

   (b) $\lim_{x\to-\infty}(\frac{x^3+3x^2}{x^2+1} - x)$

   (c) $\lim_{x\to 1}(\frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-2})$

   (d) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^5-1-5x}{x^2+x^5}$

   (e) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$

   (f) $\lim_{x\to 6} \frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$

   (g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$

   (h) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$

   (i) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3} + x)$

(j) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$

(k) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}}{\sin x}$

(l) $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x})$

(m) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

(n) $\lim_{x\to 1}\frac{\sin 7\pi x}{\sin 3\pi x}$

3. Előadáson bizonyítjuk, így használható (persze nem muszáj!):
Ha $\lim_{x\to x_0} f(x)=1$, $\lim_{x\to x_0}|g(x)|=\infty$, és $\lim_{x\to x_0} g(x)(f(x)-1)=b$, akkor

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=e^b.$$

Itt x_0 véges, vagy $\pm\infty$.

(a) $\lim_{x\to 0}(\frac{1+\tan x}{1+\sin x})^{\frac{1}{\sin x}}$

(b) $\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x}-x)^{1/x}$

(c) $\lim_{x\to\pi/2}\sin x^{\tan x}$

4. Legyen $H\subset\mathbb{R}$, $f,g:H\to\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$ legyen torlódási pontja H-nak. Bizonyítsuk be, hogy

(a) ha f határértéke létezik x_0-ban és g-nek nem, akkor $f+g$-nek sem létezik határértéke x_0-ban.

(b) ha f határértéke x_0-ban 0 és és g korlátos x_0 egy környezetében, akkor $f\cdot g$-nek 0 a határértéke x_0-ban.

5. Legyen

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=\begin{cases}0, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\\ 1, & \text{ha } x=0,\\ \frac{1}{n}, & \text{ha } x\in\mathbb{Q},\ x\neq 0 \text{ és } x=\frac{m}{n}\end{cases},$$

ahol $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$, és m és n relatív prímek, azaz f az előadáson megismert *Riemann-függvény.* Továbbá legyen

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g(x)=\begin{cases}f(x), & \text{ha } x \text{ irracionális},\\ \frac{1}{f(x)}, & \text{ha } x \text{ racionális.}\end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy g minden pont bármely környezetében nem korlátos.

Függvények folytonossága

1. Vizsgáljuk meg folytonosság szempontjából az alábbi függvényeket! (Szakadási helyek vizsgálata.)

   (a) $f(x) = \frac{3(1-x^2)+|1-x^2|}{2(1-x^2)-|1-x^2|}$

   (b) $f(x) = 3 + \frac{1}{1+3^{\frac{1}{1-x}}}$

   (c) $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$

   (d) $f(x) = \frac{x^2-9}{x^2(x-3)^2}$

   (e) $f(x) = 3^{\frac{1}{x+1}}$

2. Határozzuk meg, ha lehetséges, a paramétereket úgy, hogy a függvény mindenütt folytonos legyen!

   (a)
   $$f(x) = \begin{cases} ax^2+1 & \text{ha } x \geq 0, \\ -x & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

   (b)
   $$f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{ha } x \leq 0, \\ ax+b & \text{ha } 0 < x < 1, \\ \sqrt{x} & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$

   (c)
   $$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } |x| \leq 1, \\ x^2+ax+b & \text{ha } |x| > 1. \end{cases}$$

3. Adjuk meg az alábbi függvények lineáris aszimptotáit!

   (a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

   (b) $f(x) = \sqrt{x^2+3x-1}$

   (c) $f(x) = \frac{\sqrt{4x^4+1}}{|x|}$