

# Kalkulus 1

## 3. Feladatsor

2020/21 I. félév

### I. Halmazok függvény általi képe, ősképe

1. Adjunk példát olyan  $f : X \rightarrow Y$  függvényre, valamint  $A, B \subset X$  részhalmazra, melyre  $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$ .
2. Mutassuk meg, hogy egy  $f : X \rightarrow Y$  függvényre az alábbi állítások ekvivalensek.
  - (a)  $f$  injektív.
  - (b)  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$  fennáll minden  $A, B \subset X$  esetén.
  - (c) Bármely,  $A, B \subset X$  diszjunkt esetén  $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ .
3. Legyen  $f : X \rightarrow Y$  egy függvény. Mutassuk meg, hogy minden  $A \subset X$  esetén  $A \subset f^{-1}(f(A))$ , valamint  $B \subset Y$  esetén  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ .
4. Mutassuk meg, hogy egy  $f : X \rightarrow Y$  függvény pontosan akkor szürjektív, ha minden  $B \subset Y$  esetén  $f(f^{-1}(B)) = B$ .
5. Legyen  $f : X \rightarrow Y$  egy függvény. Tekintsük a következő  $R$  relációt  $X$ -en:  $x_1 R x_2$  pontosan akkor, ha  $f(x_1) = f(x_2)$ . Mutassuk meg, hogy  $R$  ekvivalenciareláció.
6. Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2 - x - x^2$ , és  $A = \{0\}$ . Írja fel  $f(A)$  illetve  $f^{-1}(A)$  halmazokat! Milyen  $B \subset \mathbb{R}$  halmazokra lesz  $f(B)$  illetve  $f^{-1}(B)$  halmaz egyelemű?
7. Legyen  $f : X \rightarrow Y$  adott függvény és  $A, B \subset X$ ,  $C, D \subset Y$ . Mutassuk meg, hogy
  - (a)  $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$ . Mikor teljesül  $f(A) \setminus f(B) = f(A \setminus B)$  minden  $A, B \subset X$  esetén?
  - (b)  $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$ .
  - (c)  $A \subset f^{-1}(f(A))$ . Mikor áll fenn egyenlőség?

(d)  $f(f^{-1}(C)) \subset C$ . Mikor áll fenn egyenlőség?

8. Legyen  $f : X \rightarrow Y$  invertálható függvény. Mutassuk meg, hogy minden  $A \subset \mathcal{R}_F$  esetén az  $A$  halmaz  $f$  általi ősképe, azaz  $\{x \in X : f(x) \in A\}$  megegyezik az  $A$  halmaz  $f^{-1}$  inverz függvény általi képével, azaz a  $\{f^{-1}(y) \in X : y \in A\}$  halmazzal.
9. Legyen  $f : X \rightarrow Y$  egy függvény. Tegyük fel, hogy  $X_1, X_2 \subset X$  nem üres diszjunkt halmazok, melyekre  $X_1 \cup X_2 = X$ , és  $f|_{X_1}$  illetve  $f|_{X_2}$  ( $f$  megszorításai  $X_1$  illetve  $X_2$ -re) invertálhatóak. Mutassuk meg, hogy  $f$  pontosan akkor invertálható, ha  $f(X_1) \cap f(X_2) = \emptyset$ .

## II. Supremum, infimum

1. Korlátosak-e alulról illetve felülről az alábbi halmazok? Amennyiben igen, határozzuk meg infimumukat illetve supremumukat! Van-e a halmazoknak minimuma illetve maximuma?

(a)  $H = \{\frac{1}{n} + (-1)^n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ .

(b)  $H = \{\frac{(-1)^n}{n} + 1 : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ .

(c)  $H = \{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m} : m, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ .

(d)  $H = \{\frac{x^2+1}{3x^2+2} : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}$ .

(e)  $H = \{\frac{2x+3}{3x+1} : x \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}$ .

(f)  $H = \{\frac{x}{y} : 0 < x < 1, 0 < y < 1\} \subset \mathbb{R}$ .

(g)  $H = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, p^2 < q^2\} \subset \mathbb{R}$ .

(h)  $H = \{r \in \mathbb{Q}^+ : r^2 < 2\} \subset \mathbb{R}$ .

2. Legyen  $\omega \in \mathbb{R}$  egy pozitív irracionális szám. Legyen

$$A = \{m + n\omega : m + n\omega > 0, m, n \in \mathbb{Z}\}.$$

Mutassuk meg, hogy  $\inf A = 0$ .

3. Legyen  $A \subset \mathbb{R}$  egy nem üres felülről korlátos halmaz. Mutassuk meg, hogy a  $B = \{-a : a \in A\}$  halmaz alulról korlátos és  $\inf B = -\sup A$ .
4. Igazoljuk, hogy bármely  $A, B \subset \mathbb{R}$  nemüres, korlátos halmaz esetén

(a)  $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$ .

(b)  $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ .

(c) ha  $A \cap B \neq \emptyset$ , akkor  $\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$ .

(d) ha  $A \cap B \neq \emptyset$ , akkor  $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$ .

(e) ha  $A \subset B$ , akkor  $\inf A \geq \inf B$  és  $\sup A \leq \sup B$ .