Kalkulus 1
5. Feladatsor

2020/21. I.félév

I. Halmazok számossága

1. Legyen $\mathcal{A}$ egy adott halmazrendszer (elemei halmazok), $f \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$, és AfB pontosan akkor, ha $A \sim B$. Mutassuk meg, hogy f ekvivalenciareláció.

2. Bizonyítsuk be, hogy egy megszámlálható halmaz minden részhalmaza megszámlálható.

3. Bizonyítsuk be. hogy $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, azaz $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ megszámlálhatóan végtelen.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B nem üres halmazok, és van olyan $f : A \to B$ függvény, melynek értékkészlete B, akkor $\text{card}(A) \geq \text{card}(B)$.

5. Legyen A egy megszámlálható, B pedig egy végtelen halmaz. Bizonyítsuk be, hogy $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(B)$.

6. Legyen A egy nem megszámlálható, B pedig egy megszámlálható halmaz. Bizonyítsa be, hogy $A \setminus B$ számossága megegyezik A számosságával!

7. A végtelen sok pontot tartalmazó H halmaz elemei egyetlen síkon helyezkednek el úgy, hogy bármely kettő távolsága legalább 1. Mekkora H számossága?

8. A H halmaz elemeit az x és y betűkből álló véges és végtelen hosszúságú „szavak" alkotják. Mekkora H számossága? Mekkora H számossága, ha elhagyjuk mindazon szavakat, amelyek végtelen sok y-t tartalmaznak?

9. A H halmaz azokból az $a_1 = 1$, $a_2, a_3, \ldots$ végtelen valós számsorozatokból áll, amelyekben két egymás után következő elem hányadosa 2 vagy 1/2. Mekkora H számossága?

10. Lefedhető-e megszámlálhatóan sok egyenessel az $x^2 + y^2 = 1$ körvonalnak azon pontjai, melyekre $x > 0$ és $y > 0$?

11. A H halmazt azok a $[0, 1]$ intervallumbeli valós számok alkotják, amelyek végtelen tizedestört alakjában minden második tizedesjegy 0. Mekkora H számossága?

12. Létezik-e minden t pozitív valós számhoz olyan térbeli háromszög, melynek területe t, csúcsainak koordinátái pedig racionális számok?

II. Valós számok topológiája

1. Határozzuk meg az alábbi halmazok belső, torlódási, határ és izolált pontjait. Vizsgáljuk meg a halmazokat nyíltság, zártság, korlátosság és kompaktság szempontjából! Adjuk meg a lezártjukat és a belsejüket!

   (a) $H = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

   (b) $H = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$.

   (c) $H = (-2, -1) \cup [2, 5] \cup \{7\} \cup [8, \infty) \subset \mathbb{R}$.

   (d) $H = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

2. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}$ zárt és nem nyílt, míg $\mathbb{Q}$ nem nyílt és nem zárt $\mathbb{R}$-ben.

3. Legyen $H \subset \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy

   (a) H belső pontjainak halmaza nyílt.

   (b) H határpontjainak halmaza zárt.

   (c) H torlódási pontjainak halmaza zárt.

4. Egy $A \subset \mathbb{R}$ halmaz belsejét jelöljük A°-vel. Legyen $A, B \subset \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy

   (a) Ha $A \subseteq B$, akkor $A^\circ \subseteq B^\circ$.

   (b) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.

   (c) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$. Mutassunk példát, mikor nincs egyenlőség.

5. Egy $A \subset \mathbb{R}$ halmaz lezárását jelöljük $\overline{A}$-vel. Legyen $A, B \subset \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy

   (a) Ha $A \subseteq B$, akkor $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

   (b) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Mutassunk példát, mikor nincs egyenlőség.

   (c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

6. Egy $A \subset \mathbb{R}$ halmaz deriválthalmazát (torlódási pontjainak halmazát) jelöljük A'-vel. Legyen $A, B \subset \mathbb{R}$. Mutassuk meg, hogy

   (a) Ha $A \subseteq B$, akkor $A' \subseteq B'$.

   (b) $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$. Mutassunk példát, mikor nincs egyenlőség.

   (c) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

7. Adjunk meg a valós számok halmazában végtelen sok olyan nyílt halmazt, amelyek metszete nem nyílt.

8. Adjunk meg a valós számok halmazában végtelen sok olyan zárt halmazt, amelyek uniója nem zárt.

9. Definíció alapján bizonyítsuk be, hogy a

$$H = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$$

   halmaz kompakt.

10. Adjuk meg a $(0, 1)$ intervallumnak egy olyan nyílt lefedését, amiből nem választható ki $(0, 1)$-nek egy véges fedése.

11. Definiáljuk minden $n \in \mathbb{N}$ esetén valós számoknak a következő halmazát

$$H_n = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+k} : K = 0, 1, 2, \cdots\},$$

   és legyen

$$H = (\cup_{i=1}^{\infty} H_n) \cup \{0\}.$$

   Adjuk meg H torlódási pontjainak halmazát! Mutassuk meg, hogy H kompakt.

12. Lássuk el a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmazát a valós számokból örökölt metrikával, azaz bármely $p, q \in \mathbb{Q}$ esetén $d(p, q) = |p - q|$ és tekintsük a következő halmazt:

$$K = \{p \in \mathbb{Q} : 2 < p^2 < 3\} \subset \mathbb{Q}.$$

   Mutassuk meg, hogy K korlátos és zárt $\mathbb{Q}$-ban, de nem kompakt!