

Név: _____

Neptun kód:

--	--	--	--	--	--

1.	2.	3.	4.	5.	6*.	Σ

1. **(6+6 pont)** Konvergensek-e az alábbi numerikus sorok? Amennyiben igen, határozza meg az összegüket!

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\frac{\pi}{2} - 3^{n-2}}{5^n},$$

(b)

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4}.$$

2. **(8 pont)** Határozza meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + (-3)^n}{n^2} x^n$$

valós hatványsor konvergenciatartományát!

3. **(5+5 pont)** Határozza meg az alábbi határértékeket, amennyiben léteznek!

(a)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x), \quad a, b \in \mathbb{R}, \text{ rögzített},$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}.$$

4. (10 pont) Tekintsük az

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$$

függvényt! Hol van értelmezve? Vizsgálja meg a bal-, illetve jobboldali határértéket a szakadási helyeken!

5. (10 pont) Legyenek $f, g : H \rightarrow \mathbb{R}$ egyenletesen folytonos függvények H -n. Mutassuk meg, hogy $f + g$ is egyenletesen folytonos H -n.

6. (5+5 pont- BÓNUSZ)

(a) Van-e zérushelye az $f(x) = x^n - x^{n-1} - 1$ függvénynek az $I = [1, 2]$ intervallumon? ($n \in \mathbb{N}$ rögzített)

(b) Legyen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény és $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ tetszőlegesek. Mutassuk meg, hogy ekkor létezik $\xi \in [a, b]$, melyre

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}.$$