

1/

Eml. (d'Alembert-jéle hányadoskritérium - 1. verzió)

$$\sum_n a_n \text{ num. sor } (a_n \in \mathbb{R} \text{ v. } \mathbb{C}), a_n \neq 0$$

(i) Ha $\exists q \in (0, 1)$ és $N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n \geq N$ esetén

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q \Rightarrow \sum_n a_n \text{ abszolút konvergens}$$

(ii) Ha $\exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \quad \forall n \geq N$ esetén

$$\Rightarrow \sum_n a_n \text{ divergens.}$$

ÁTFOGALMAZÁS:

TÉTEL (d'Alembert-jéle hányadoskritérium - 2. verzió)

$$\sum_n a_n \text{ num. sor } (a_n \in \mathbb{R} \text{ v. } \mathbb{C}), a_n \neq 0$$

(i) Ha $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \sum_n a_n \text{ abszolút konvergens}$

(ii) Ha $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \Rightarrow \sum_n a_n \text{ divergens}$

Figyelem! Ha $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ vagy $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$, akkor

a tétel nem mond semmit.

(Később látni fogjuk, hogy ezekben az esetekben a sor lehet konvergens vagy divergens is.)

2/ Bir (d'Alambert)

Mintén a Cauchy-féle gyökértételrel lehetne, így

elég megmutatni, hogy (1.) $\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

$\Rightarrow$ (2.) $\overline{\lim}_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|}$.

(1.) Ha valamilyen q -ra $\overline{\lim}_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q \Rightarrow \exists N$, hogy

$n \geq N$ esetén $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q$.

vagyis

$$|a_{n+1}| < q |a_n|$$

$$|a_{n+2}| < q |a_{n+1}| < q^2 |a_n|$$

$\vdots$

ha $n > N$ $|a_n| < q^{n-N} |a_N|$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < q^{\frac{n-N}{n}} \sqrt[n]{|a_N|} = q \cdot \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{q^N}} \quad \text{ha } n > N$$

$$\hookrightarrow \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} q \sqrt[n]{\frac{|a_N|}{q^N}} = q \cdot 1 = q$$

Mivel $\overline{\lim}_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < q$ tetszőleges q -ra $\Rightarrow \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|a_n|} \leq \overline{\lim}_n \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

(2.) hasonlóan bizonyítható (HF)



3/

Mege ① Példák, mikor a gyök-ill. hányadoskritérium nem informatív:

• $\sum_n \frac{1}{n}$ divergens

de $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} < 1$, ha $n > 2 \Rightarrow$ gyökritérium nem használható

• $\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1 \quad \forall n$, de hányadoskritérium nem használható

• $\sum_n \frac{1}{n^2}$ konvergens

de $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 \rightarrow 1$, de gyökritérium nem használható

• $\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1$, de hányadoskrit. nem használható

② A gyökritérium "erősebb", mint a hányadoskritérium

Pé: $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$ sorra

$$\left. \begin{array}{l} a_{2k+1} = \frac{1}{2^k} \quad \text{ha } k > 1 \\ a_{2k} = \frac{1}{3^k} \end{array} \right\} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

~~hányados~~ ^{gyök} kritérium: $\lim \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \Rightarrow$ a sor konvergens

hányados kritérium: $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty > 1$ $\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \text{nem használható} \\ \text{és} \\ \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1 \end{array} \right.$

4/ Beispiel

$$(1) \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2) 3^{n+1}}{n!} \right| \text{ konvergenz, wert}$$

Leibnizkriterium:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+3) 3^{n+2}}{(n+1)!}}{\frac{(n+2) 3^{n+1}}{n!}} = \frac{(n+3) 3^{n+2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(n+2) 3^{n+1}} = \frac{n+3}{n+2} \cdot \frac{3}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

$$(2) \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| \text{ konvergenz } \forall x \in \mathbb{R} \text{ setzen, wert}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} \rightarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

↑
1

merkt: $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \right)$

$$(3) \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \right| \text{ konvergenz, wert Leibnizkriterium}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{\left(2 + \frac{2}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)} \rightarrow \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{4} < 1$$

5/

$$\textcircled{4} \quad \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot a^n}{n^n} \quad a \in \mathbb{R}}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)! \cdot a^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n! \cdot a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot a}{(n+1)} \cdot \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{a}{e} \end{aligned}$$

Leibnizkriterium

- $\Rightarrow$
- falls $a < e \Rightarrow \sum_n a_n$ konvergiert
 - falls $a > e \Rightarrow \sum_n a_n$ divergiert

Falls $a = e$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Leibniz: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \nearrow e$ wegen $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n$

da $a_n > 0 \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cdot e^n}{n^n}$ divergiert

(konver. nheriges fltet k
wenig teilsatz)

6/ Egy jól rendezhető tétel monoton esikkenő, pozitív tagú sorokra:

TÉTEL (Cauchy-féle kondenzációs vagy nithikói tétel)

Tfj $(a_n) \downarrow$ és $a_n > 0$. Ekkor

$$\sum_n a_n \text{ konvergens} \Leftrightarrow \sum_n 2^n a_{2^n} \text{ konvergens}$$

Biz: $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$, $\sigma_n := \sum_{k=1}^n 2^k a_{2^k}$ (k-dik részletösszeg)

$$S_{2^n} = a_1 + \sum_{k=1}^n \sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} a_j \quad , \text{ vagyis a hárterhes módon}$$

szóportositjuk a véges összeget S_{2^n} -t:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_8 + \dots + a_{2^{n-1}} + \dots + a_{2^n} \\ \underbrace{\hspace{1cm}} & \underbrace{\hspace{1cm}} & \underbrace{\hspace{1cm}} & & \underbrace{\hspace{1cm}} & & \underbrace{\hspace{1cm}} \\ & \vee & \vee & & \vee & & \vee \\ (a_n) \downarrow \Rightarrow & a_4 + a_4 & a_8 + a_8 + a_8 + a_8 & & a_{2^n} + \dots + a_{2^n} \end{array}$$

azért

$$S_{2^n} \geq a_1 + \sum_{k=1}^n \sum_{j=2^{k-1}+1}^{2^k} a_{2^k} = a_1 + \sum_{k=1}^n 2^{k-1} a_{2^k} = a_1 + \frac{1}{2} \sigma_n$$

7/

$\Rightarrow$: Tíh $\sum_n a_n$ konv $\Rightarrow (S_n)$ konvergens $\Rightarrow (S_n)$ korlátos

de láttuk, hogy

$$a_1 + \frac{1}{2} \sigma_n \leq S_{2n} \text{ igaz}$$

(σ_n) korlátos feliról + (σ_n) monoton nő $\Rightarrow (\sigma_n)$ konv.

$$\Rightarrow \sum_n 2^n a_{2^n} \text{ konv.}$$

$\Leftarrow$:

$$S_{2^n-1} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} a_j \quad \text{ígyis most a következő módon}$$

szeparálhatunk:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & \dots & + & a_7 & + & a_8 & + & \dots & + & a_{15} & + & \dots \\ & & \underbrace{}_{\wedge} & & \underbrace{}_{\wedge} & & \underbrace{}_{\wedge} & & & & & & & & & & & & \\ (a_n) \downarrow & \Rightarrow & a_2 + a_2 & & a_4 + \dots + a_4 & & a_8 + \dots + a_8 & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

ígyis

$$\begin{aligned} S_{2^n-1} &\leq \sum_{k=1}^n \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} a_j = \sum_{k=1}^n 2^{k-1} a_{2^{k-1}} = \\ &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k a_{2^k} = a_1 + \sigma_{n-1} \end{aligned}$$

Mé (σ_n) konvergens, akkor korlátos is $\Rightarrow (S_{2^n-1})$ is korlátos

+ monotonitás $\Rightarrow (S_{2^n-1})$ konvergens

de (S_n) monoton, így $\exists$ határértéke és az megegyezik (S_{2^n-1}) limitével, tehát véges $\Rightarrow (S_n)$ konv.

8/

Legyen A tétel nem azt állítja, hogy negatív a határ sor összege, csak azt, hogy egyenlő konvergencia vagy egyenlő divergencia!

(Ez igaz mondjuk, hogy $\sum_n a_n$ és $\sum_n 2^n a_{2^n}$ sorok ekvikonvergens.)

Példák

$$\textcircled{1} \left| \sum_n \frac{1}{n^x} \text{ sorok konvergenciája} \right|$$

$$\sum_n \frac{1}{n^x} \text{ -al ekvikonvergens sor: } \sum_n 2^n \frac{1}{(2^n)^x} = \sum_n (2^{1-x})^n$$

geometriai sor $q = 2^{1-x}$ képletével.

$$\Rightarrow \bullet \text{ ha } |q| = 2^{1-x} < 1, \text{ vagyis } x > 1 \Rightarrow \sum_n \frac{1}{n^x} \text{ konvergens}$$

$$\bullet \text{ ha } |q| = 2^{1-x} \geq 1, \text{ vagyis } x \leq 1 \Rightarrow \sum_n \frac{1}{n^x} \text{ divergens}$$

$$\textcircled{2} \left| \sum_n \frac{1}{n \log n} \text{ sor} \right|$$

$$\text{ekvikonvergens sor: } \sum_n 2^n \frac{1}{2^n \log 2^n} = \sum_n \frac{1}{n} \text{ divergens}$$

$\Rightarrow$ az eredeti sor is divergens!

3)

$$\textcircled{3} \quad \sum_n \frac{1}{n(\log_2 n)^p}, \quad p > 0$$

elvi konvergencia:

$$\sum_n 2^n \frac{1}{2^n (\log_2 2^n)^p} = \sum_n \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{konvergens, ha } p > 1 \\ \text{divergens, ha } 0 < p \leq 1 \end{cases}$$

vagyis $\sum_n \frac{1}{n(\log_2 n)^p} \begin{cases} \rightarrow \text{konvergens, ha } p > 1 \\ \rightarrow \text{divergens, ha } 0 < p \leq 1 \end{cases}$

Lemma (Abel-jelle summációs formula)

Legyen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ill $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ két valódi vagy komplex számsor.

$$S_n := \sum_{k=1}^n x_k. \quad \text{Ekkor}$$

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^n (\lambda_k - \lambda_{k+1}) S_k + \lambda_{n+1} S_n$$

Biz teljes indukcióval.

Ha $n=1$, akkor a jobb oldal:

$$\sum_{k=1}^1 (\lambda_k - \lambda_{k+1}) S_k + \lambda_{n+1} S_n = (\lambda_1 - \lambda_2) S_1 + \lambda_2 S_1 = \lambda_1 S_1 = \lambda_1 x_1 \quad \checkmark$$

10/ Tfk n -re jenkell, azaz $\sum_{k=1}^n \lambda_k X_k = \sum_{k=1}^n (\lambda_k - \lambda_{k+1}) S_k + \lambda_{n+1} S_n$

Ehhez $n+1$ -re:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k X_k &= \sum_{k=1}^n \lambda_k X_k + \lambda_{n+1} X_{n+1} \stackrel{\text{ind. feltevés}}{=} \sum_{k=1}^n (\lambda_k - \lambda_{k+1}) S_k + \lambda_{n+1} S_n + \lambda_{n+1} X_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n (\lambda_k - \lambda_{k+1}) S_k + \lambda_{n+1} \underbrace{(S_n + X_{n+1})}_{S_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} (\lambda_k - \lambda_{k+1}) S_k + \lambda_{n+1} S_{n+1} \end{aligned}$$

!

TÉTEL (Dirichlet-féle kritérium)

Legyen $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ egy valódi monoton nullsorozat (azaz $\lambda_n \rightarrow 0$),

$\sum_n x_n$ egy olyan komplex tagú sor, melynek részletei korlátos sorozatot alkotnak. (Vagyis $\exists S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ -re

$|S_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$). Ekkor $\sum_n \lambda_n x_n$ sor konvergens.

Biz. Tfk $\lambda_n \geq 0$, $\lambda_n \searrow 0$.

$$S_n := \sum_{k=1}^n x_k, \quad \sigma_n := \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \quad \text{az t/fk } |S_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A felelő lemma (Abel-féle summáció) miatt

$$|\sigma_m - \sigma_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m \lambda_k x_k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^m (\lambda_k - \lambda_{k+1}) S_k + \lambda_{m+1} S_m - \lambda_{n+1} S_n \right|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^m (\lambda_k - \lambda_{k+1}) |S_k| + \lambda_{m+1} |S_m| + \lambda_{n+1} |S_n| \quad (\leq)$$

Δ -eggy. $\uparrow$

$$(\lambda_k \geq \lambda_{k+1})$$

$$11) \leq \left(\sum_{k=n+1}^m (\lambda_k - \lambda_{k+1}) + \lambda_{m+1} + \lambda_{n+1} \right) \cdot K = 2 \lambda_{n+1} \cdot K$$

$\uparrow$ $|S_n| \leq K$
 $\uparrow$ telenkőp ömög

Mivel $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nullsorozat, $2 \lambda_{n+1} \cdot K$ tetszőlegesen kicsi, ha

n elég nagy $\Rightarrow (S_n)$ Cauchy-sorozat $\Rightarrow (S_n)$ konvergens ✓

Ha $\lambda_n \leq 0$, negatív bázisvektörök: $\lambda_n' = -\lambda_n$ $\left. \begin{array}{l} \text{relatív} \\ \text{és } \lambda_n \neq 0 \end{array} \right\} x_n' = -x_n$!

Példá: $\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} \text{ konvergens.} \right]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n \cdot \frac{1}{n} \rightsquigarrow \text{legyen } \lambda_n = \frac{1}{n}$$

$x_n = \sin n$

$\Rightarrow \lambda_n \searrow 0$ így a Dirichlet-tétel miatt elég megmutatni,

hogy $S_n := \sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n$ sorozat korlátos.

all: $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}} \quad \begin{array}{l} x \neq 2k\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{array}$

12/ lehet bizonyítani teljes indukcióval vagy rebb pl:

$$\boxed{2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\beta - \alpha) - \cos(\alpha + \beta)} \quad \begin{array}{l} \text{HF} \\ \text{(Euler-formula)} \end{array}$$

$$\hookrightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \cdot (\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx) =$$

$\uparrow$
 $\alpha := \frac{x}{2}$
 $\beta = x, 2x, \dots, nx$

$$= \cos\left(x - \frac{x}{2}\right) - \cos\left(x + \frac{x}{2}\right) + \cos\left(2x - \frac{x}{2}\right) - \cos\left(2x + \frac{x}{2}\right) + \dots + \cos\left(nx - \frac{x}{2}\right) - \cos\left(nx + \frac{x}{2}\right)$$

$$= \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} + \dots + \cos \frac{(2n-1)x}{2} - \cos \frac{(2n+1)x}{2}$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2} x$$

$\uparrow$
teljesítés

$$\hookrightarrow \text{leontka: } \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow |S_n| = |\sin 1 + \sin 2 + \dots + \sin n| = \left| \frac{\cos \frac{1}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}} \right| \leq \frac{2}{2 \sin \frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sin \frac{1}{2}} =: K$$

$\Rightarrow (S_n)$ hatékony korlát

$\Downarrow$ Dirichlet

$\sum_n \sin n \cdot \frac{1}{n}$ konvergens

o !

13/ Def. • belátás, hogy $\sum_n \frac{\sin n}{n}$ feltételek konvergencia.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi-1}{2} \quad (\text{pl. sz. Fourier-sorok})$$

Def. legyen $a_n \geq 0$. Ekkor $\sum_n (-1)^n a_n$ sor alternáló vagy váltakozó előjelű sorok hívjuk.

TÉTEL (Leibniz - jele kritérium.)

legyen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton csökkenő nullsorozat ($a_n \searrow 0$).

Ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ sor konvergens és az $S = \sum_n (-1)^{n+1} a_n$

összeget a részek összege legfeljebb $|S - S_n| \leq a_{n+1}$ hibával közelíthet.

Biz. $\sum_n (-1)^{n+1} a_n$ Dirichlet-tétel:

$$|S_n| = |-1 + 1 - 1 + 1 - \dots \pm (1)| \leq 1$$

$$|\cancel{+1} + \cancel{+1} - \cancel{+1} + \dots + (-1)^n| \leq 1 \quad \text{hiszen részek összege}$$

$$+ a_n \searrow 0 \Rightarrow \sum_n (-1)^{n+1} a_n \text{ konvergens } \checkmark$$

$$(a_n) \searrow \Rightarrow S_{2n+1} = S_{2n-1} + \underbrace{a_{2n} - a_{2n+1}}_{\geq 0} \geq S_{2n-1}$$

$$S_{2n+2} = S_{2n} - \underbrace{a_{2n+1} + a_{2n+2}}_{\leq 0} \leq S_{2n}$$

$$\text{és} \quad S_{2n+2} = S_{2n+1} + a_{2n+2} \geq S_{2n+1}$$

14/ megj: $S_1 \leq S_3 \leq \dots \leq S_{2n+1} \leq S_{2n} \leq S_{2n-2} \leq \dots \leq S_4 \leq S_2$

megj $(S_{2n+1}) \uparrow$ + felülről korlátos $\Rightarrow$ konvergens

$(S_{2n}) \downarrow$ + alulról korlátos $\Rightarrow$ konvergens

$\Rightarrow S_{2n} - S_{2n+1} = a_{2n+1} \rightarrow 0 \Rightarrow$ bekezdést meggyújt

$\Downarrow$
megj a sor valóban
konv.

$$S_n \leq S \leq S_{n+1}$$

megj $S_{n+1} \leq S \leq S_n$

mivel aztán: $|S - S_n| \leq |S_{n+1} - S_n| = a_{n+1} \quad \circ !$

Pl $\sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ alternáló harmonikus sor konvergens, mert $\frac{1}{n} \searrow 0$!

TETEL (Abel-jéle kritérium)

$(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ korlátos monoton való sorozat.

$\sum_n x_n$ konvergens komplex legi sor

$\Rightarrow \sum_n \lambda_n x_n$ konvergens.

Biz. Tfk $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda \Rightarrow \lambda_n - \lambda$ monoton sorozat $\Rightarrow (\lambda_n - \lambda) \rightarrow 0$

Pönchlet $\Rightarrow \sum_n (\lambda_n - \lambda) x_n$ konvergens, de $\sum_n \lambda_n x_n = \lambda \underbrace{\sum_n x_n}_{\text{konvergens}}$!