15/

Példák

① Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+2}$ sor? Ha igen, mekkora hibát követünk el, ha az S összeget a 100. részletösszeggel, azaz S_{100}-zal becsüljük?

$$a_n := \frac{n+1}{n^2+2} > 0 \quad \rightsquigarrow \text{ alternáló sor}$$

- $\lim a_n = \lim \frac{n+1}{n^2+2} = \lim \frac{1+\frac{1}{n}}{n+\frac{2}{n}} = 0$
- A Leibniz-kritériumhoz ellenőrizni kell, hogy a_n monoton csökkenő-e?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+2}{(n+1)^2+2}}{\frac{n+1}{n^2+2}} = \frac{n+2}{n^2+2n+3} \cdot \frac{n^2+2}{n+1} = \frac{n^3+2n^2+2n+2}{n^3+3n^2+5n+3} < 1$$

vagyis $a_{n+1} < a_n \Rightarrow (a_n) \searrow 0$

$\Rightarrow$ A Leibniz-kritérium értelmében $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+2}$ konvergens.

$$S := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+2}$$

$$S_{100} = \sum_{n=1}^{100} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+2}$$

Az elkövetett hiba:

$$|H| = |S - S_{100}| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{tétel}}}{\leq} a_{101} = \frac{101+2}{101^2+2} \rightarrow \text{felső korlát a hibára!}$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}}}_{a_n > 0}$$ alternáló sor

$$\underbrace{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}}_{\to 1} = \sqrt[n]{2n} \le \underbrace{\sqrt[n]{2n+1}}_{= a_n} \le \sqrt[n]{2n+n} = \sqrt[n]{3n} = \sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$$

A rendőrelv értelmében $a_n \to 1 \neq 0 \Rightarrow$ nem teljesül a sor konvergenciájához szükséges feltétel

$\Downarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}}$$ divergens

(3) Hibabecslés pozitív tagú sorokra

Konv-e: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$? Ha igen, adjunk becslést az $S \approx S_{100}$ közelítés hibájára!

$$a_n := \frac{3^n}{(n+1)!} \rightsquigarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{3^n}{(n+1)!}} = \frac{3}{n+2} \longrightarrow 0 < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$$ konv, a hányados kritérium miatt.

$$H = |S - S_{100}| = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!} = \frac{3^{101}}{102!} + \frac{3^{102}}{103!} + \dots =$$

$$= \frac{3^{101}}{102!}\left(1 + \frac{3}{103} + \frac{3^2}{103\cdot 104} + \frac{3^3}{103\cdot 104\cdot 105} + \dots\right) <$$

$$< \frac{3^{101}}{102!}\left(1 + \frac{3}{103} + \left(\frac{3}{103}\right)^2 + \left(\frac{3}{103}\right)^3 + \dots\right) = \frac{3^{101}}{102!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{103}}.$$

17/

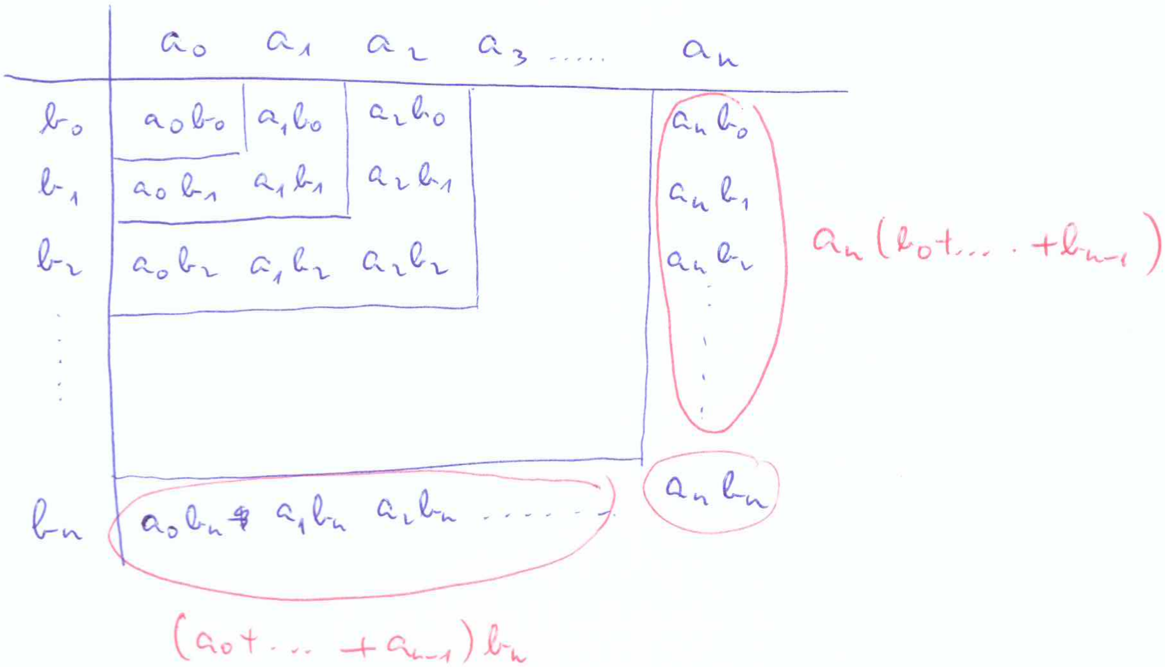
Sorok szorzata

Def: $\sum_n a_n$ és $\sum_n b_n$ sorok szorzatának nevezünk minden olyan sort, melynek tagjai $a_i b_j$ alakúak és minden ilyen szorzat pontosan egyszer fordul elő tagként.

Két speciális szorzat:

Def: A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sorok természetes v. téglányszorzatán a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sort értjük, ahol

$$c_n = (a_0 + \dots + a_{n-1}) b_n + a_n (b_0 + \dots + b_{n-1}) + a_n b_n .$$



TÉTEL: Ha $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = S_a$ és $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = S_b$ konvergensek, akkor a két sor természetes szorzata is konvergens és

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = S_a \cdot S_b .$$

Biz: trivi

18/

Biz (házi): Az n-edik részletösszegekre fennáll, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) \quad ?!$$

Def: A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ sorok Cauchy-szorzata a $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ sor,

ahol
$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

	a_0	a_1	a_2	$a_3 \dots$	a_{n-1}	a_n
b_0	$a_0 b_0$	$a_1 b_0$	$a_2 b_0$	$a_3 b_0$	$a_{n-1} b_0$	$a_n b_0$
b_1	$a_0 b_1$	$a_1 b_1$	$a_2 b_1$	$a_3 b_1$	$a_{n-1} b_1$	
b_2	$a_0 b_2$	$a_1 b_2$	$a_2 b_2$	$a_3 b_2$		
b_3	$a_0 b_3$	$a_1 b_3$	$a_2 b_3$	$a_3 b_3$		
$\vdots$						
b_{n-1}	$a_0 b_{n-1}$	$a_1 b_{n-1}$				
b_n	$a_0 b_n$					

$$= \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$$

TÉTEL (Mertens-tétel)

Egy abszolút konvergens és egy konvergens sor Cauchy-szorzata konvergens és konvergál a sorösszegek szorzatához.

Ha mindkét sor abszolút konvergens, akkor a ~~sz~~ Cauchy-szorzatuk is abszolút konvergens.

15)

Biz (Mertens-tétel)

! $\sum_n x_n$ abszolút konv $\longrightarrow S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ n-edik részletösszeg

$\sum_n y_n$ konvergens $\longrightarrow T_k := \sum_{k=0}^{n} y_k$

$S_n \to S$, $T_n \to T$

$\tau_n := T_n - T$

$\sigma_n := \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=0}^{k} x_l y_{k-l} \right)$ – a Cauchy-szorzat n-edik részletösszege

$$\hookrightarrow \sigma_n = \sum_{\substack{k,l \\ 0 \le k,l \\ k+l \le n}} x_k y_l = \sum_{k=0}^{n} x_k \underbrace{\sum_{l=0}^{n-k} y_l}_{T_{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} x_k T_{n-k} =$$

$\tau_{n-k} = T_{n-k} - T$

$$= \sum_{k=0}^{n} x_k (T + \tau_{n-k}) = T \underbrace{\sum_{k=0}^{n} x_k}_{S_n} + \sum_{k=0}^{n} x_k \tau_{n-k} = S_n T + \sum_{k=0}^{n} x_k \tau_{n-k}$$

Mivel $S_n T \to ST$, ezért a $\sigma_n \to ST$ igazolásához azt kell belátni, hogy

$$\gamma_n := \sum_{k=0}^{n} x_k \tau_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} x_{n-k} \tau_k \to 0$$

$K := \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ és $\varepsilon > 0$ tetszőleges.

$\tau_n = T_n - T \to 0 \implies \exists N \in \mathbb{N}$, hogy $\forall n > N$-re $|\tau_n| < \varepsilon$

20/ Ekkor $(N > n)$

$$|\gamma_n| \le \left|\sum_{k=0}^{N} x_{n-k}\tau_k\right| + \sum_{k=N+1}^{n} |x_{n-k}|\cdot|\tau_k| \le \left|\sum_{k=0}^{N} x_{n-k}\tau_k\right| + \varepsilon K$$

$\uparrow$

$|\tau_n| < \varepsilon \quad \forall n > N$

$K = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$

$x_n \to 0$ $\left(\sum_n x_n \text{ konv}\right)$

$\Rightarrow$ $\overline{\lim_{n\to\infty}} |\gamma_n| = 0$, vagyis $\lim_{n\to\infty} |\gamma_n| = 0 \Rightarrow \sigma_n \to ST$ ✓

A második állítás úgy kapható, hogy a fenti állítást alkalmazzuk $\sum_n |x_n|$ és $\sum_n |y_n|$ sorokra, így azt kapjuk, hogy ezek Cauchy-szorzata konvergens. Ez a szorzatsor majoránsa az eredetiek Cauchy-szorzatának $\Rightarrow$ ezek szorzata abszolút konvergens

!

<u>Megj.</u> ① A tétel feltételei közül az egyik sornak abszolút konvergensnek kell lennie.

② <u>Viszont</u>: Abel-tétel: Ha két konvergens sor Cauchy-szorzata konvergens, akkor a szorzatsor összege megegyezik az eredeti sorok összegének szorzatával.

21) <u>Példák:</u>

① Tudjuk, hogy ha $|x|<1$, akkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1+x+x^2+\ldots = \frac{1}{1-x}$$

ill.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = 1-x+x^2-x^3+\ldots = \frac{1}{1+x}$$

	1	$+\ x$	$+\ x^2$	$+\ x^3 + \ldots$
1	1	x	x^2	x^3
$+$				
$(-x)$	$-x$	$-x^2$	$-x^3$	
$+$				
x^2	x^2	x^3		
$+$				
$(-x^3)$	$-x^3$			
$+$				
$\vdots$				

A Cauchy-szorzat: $1+0+x^2+0+x^4+0+x^6+\ldots = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (x^2)^k =$

$$= \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1+x}$$

② Láttuk: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ és $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ konvergens (sőt abszolút konv) $\forall\, x,y \in \mathbb{R}$

Cauchy-szorzatuk:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k \cdot \frac{1}{(n-k)!}y^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!}}_{\binom{n}{k}} x^k y^{n-k}\right) =$$

$(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$ binomiális tétel

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(x+y)^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}\right)}$$

!

24

(3) Általában nem igaz, hogy két konvergens sor Cauchy-szorzata ~~...~~ konvergens:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \qquad \text{Leibniz-sorok} \Rightarrow \text{konvergensek}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}} \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\cdot\sqrt{n-k+1}}$$

$$\hookrightarrow |c_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \underset{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}}{\geq} \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(k+1)+(n-k+1)} = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{2}{n+2}}_{\text{független } k\text{-tól}} = \frac{2}{(n+2)}\cdot(n+1)$$

így $\quad |c_n| \geq 2\,\dfrac{n+1}{n+2} \to 2 \quad$ így $\quad c_n \not\to 0$

$\Rightarrow$ a szorzatsor nem konvergens (nem voltak abszolút konvergensek)

(4) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \qquad \text{divergens}$$.!

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(3^n + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \qquad \text{divergens}$$

HF: A Cauchy-szorzatuk konvergens!

Hatványsorok (Kalkulus 2-ben részletesebben)

Def: $a_n, z_0 \in \mathbb{R}$ v. $\mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$ $(*)$

sort z_0 középpontú hatványsornak hívjuk.

a_n: együtthatók

Azon $z \in \mathbb{C}$ számok, melyekre $(*)$ numerikus sor konvergens, alkotják $(*)$ konvergenciatartományát (KT)

Megj: $z = z_0 \in KT \Rightarrow KT \neq \emptyset$

$$\boxed{\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Def: A
$$R := \begin{cases} 0, & \text{ha } \alpha = +\infty \\ +\infty, & \text{ha } \alpha = 0 \\ 1/\alpha, & \text{ha } 0 < \alpha < \infty \end{cases}, \quad R \in \overline{\mathbb{R}}$$

számot a $(*)$ hatványsor konvergenciasugarának hívjuk

24/

TÉTEL (Cauchy-Hadamard)

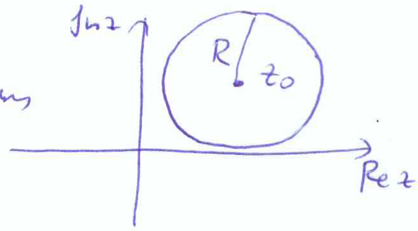
Legyen R a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ hatványsor konvergenciasugara.

Ekkor $|z-z_0|<R$ esetén a hatványsor abszolút konvergens,

$|z-z_0|>R$ esetén a hatványsor divergens.

Megj: $B(z_0,R):=\{z\in\mathbb{C} : |z-z_0|<R\}$ z_0 középpontú nyílt körlap $\mathbb{C}$-n

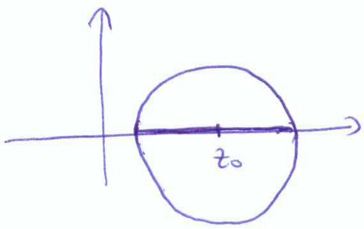
$B(z_0,R)\subset KT$ vagyis a körlapon belül a sor konvergens



A körlapon kívül a sor divergens.

A tétel nem mond semmit, a körvonalon ($|z-z_0|=R$).

Ha $z_0, a_n\in\mathbb{R}$ (valós hatványsorok)



$z\in\mathbb{R}$

$B(z_0,R)=(z_0-R,z_0+R)$

Biz: Tfh $|z-z_0|<R$. $\Longrightarrow$ $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<\infty$

$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n(z-z_0)^n}_{b_n}$ sorra

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|b_n|} = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n||z-z_0|^n} = \underbrace{|z-z_0|}_{<R}\,\underbrace{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}_{=1/R} < R\cdot\frac{1}{R}=1$$

Cauchy-gyökkritérium $\Longrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ abszolút konv.

25/ Legyen $|z-z_0|>R$

$$\Rightarrow \overline{\lim} \sqrt[n]{|b_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n||z-z_0|^n} = \underbrace{|z-z_0|}_{\substack{\vee \\ R}} \underbrace{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}_{\substack{\shortparallel \\ \frac{1}{R}}} > 1$$

$\xrightarrow{\text{Cauchy-gyökkritérium}}$ $\sum_n a_n(z-z_0)^n$ divergens.

o!

Def. Tegyük fel, hogy $(*)$ konvergenciasugara pozitív $(R>0)$

$$z \in B(z_0,R), \quad f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \in \mathbb{C}$$

utasítással értelmezett függvényt $(*)$ hatványsor összegfüggvényének hívjuk.

(vagy: f-et $B(z_0,R)$-ben z_0 körüli hatványsorba fejtettük)

Pl. $\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n = \frac{1}{1-(z-z_0)}$, ha $|z-z_0|<1$ vagyis $R=1$

Spec. $z_0=0 \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, ha $|z|<1$

TÉTEL Ha $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ R_1 ill R_2 konvergenciasugárral, akkor $R:=\min\{R_1,R_2\}$-vel

$$f(z)+g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-z_0)^n$$

$$f(z)\cdot g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\dots+a_nb_0)(z-z_0)^n$$

Cauchy-szorzat.

Biz. triviális (HF)

o!