1/ INT-DIFF

# Az integrálás és a differenciálás kapcsolata

**TÉTEL** (Newton–Leibniz formula)

Legyen $f$ integrálható $[a,b]$-ben ($f \in R[a,b]$).
Ha az $F$ függvény folytonos $[a,b]$-ben, diffható $(a,b)$-ben
és $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$

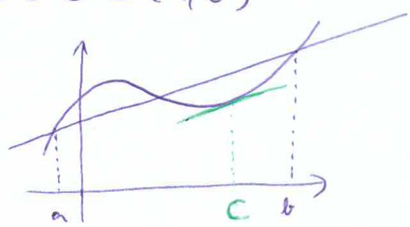
$$\Longrightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Biz: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ $[a,b]$ tetszőleges felosztása

eml.: Lagrange-féle középértéktétel:

$f \in C[a,b]$, $f$ diffható $(a,b)$-ben $\Longrightarrow \exists\, c \in (a,b)$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$




↳ alkalmazzuk a kis intervallumokra:

$\forall i,\ \exists\, c_i \in (x_{i-1}, x_i)$:

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

$$\hookrightarrow \sum_{i=1}^{n} \big(F(x_i) - F(x_{i-1})\big) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1})$$

$\Longrightarrow$ $\forall$ felosztáshoz léteznek olyan $c_i$ közbülső pontok, hogy $f$ ezen pontokkal vett közelítő összege $F(b)-F(a)$

$\Rightarrow$ $F(b)-F(a)$ $\forall$ felosztásra az alsó és a felső
közelítő összeg közé ~~esik~~ esik

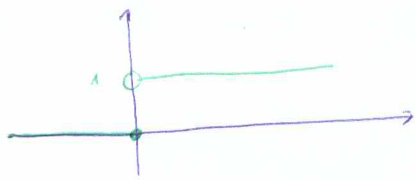
Mivel $f$ integrálható $\Rightarrow$ egyetlen ilyen szám van: $\int f$

$$\Rightarrow \quad F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

$\square$ !

**Megj:** Milyen függvényeknek $\exists$ primitív függvénye?

**Pl**
$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$$




T/h $F$ primitív fv $f$-nek. $\Rightarrow$ • $x<0$ esetén $F'(x)=0$

$$\Downarrow$$

$F(x)=c$, ha $x\le 0$

• $x>0$ esetén $F'(x)=1$ $\Rightarrow$ $F(x)=x+a$, ha $x\ge 0$

↳ $F'_-(0)=0$ és $F'_+(0)=1$ $\Rightarrow$ $F$ nem deriválható 0-ban: ↯

$\Rightarrow$ $f$-nek $\nexists$ primitív függvénye

**Pl)**

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} \quad , \text{ha } x\neq 0$$

$x=0$ -ban:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}\to 0$$

$\Rightarrow f'(0)=0$

$f$ mindenütt deriválható

$$g(x):=f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

$g$ nem folytonos 0-ban, mert $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ $\nexists$

$f$ mindenütt deriválható, de a derivált fv-e nem folytonos

$\Downarrow$

$g(x)$ nem folytonos, de $\exists$ primitív függvénye: $f$

$(f'=g)$

Folytonosság nem szükséges feltétele a primitív fv létezésének!

Elégséges-e?

Tegyük fel, hogy $f$ integrálható $[a,b]$-ben és $F$ az $f$ egy primitív fv-e ( $F'(x)=f(x)$ )

Tfh $F(a)=0$ (megtehető, mert különben $F(x)-F(a)$-t választjuk)

$\forall x \in [a,b]$ :

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x)-F(a) = F(x)$$

vagyis, ha $f$-nek $\exists$ primitív fv-e, akkor $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ is primitív fv.

<u>Def</u> $f \in \mathcal{R}[a,b]$

$$I(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad x \in [a,b]$$

$f$ integrálfüggvényének hívjuk.

$\Downarrow$

<u>TÉTEL</u>: Egy integrálható függvénynek akkor és csak akkor létezik primitív függvénye, ha az integrálfüggvénye primitív fv.

**TÉTEL** (az integrálfv tulajdonságai)

$f \in \mathcal{R}[a,b]$. Ekkor az $I(x)$ integrálfv

(i) $I(x)$ mindenütt folytonos, sőt Lipschitz-tulajdonságú $[a,b]$-ben

(ii) Ha $x_0 \in [a,b]$-ben folytonos, akkor ott diffható és $I'(x_0) = f(x_0)$.

(iii) Ha $f$ folytonos $[a,b]$-ben, akkor $I$ diffható $[a,b]$-ben és $I' = f$.

(Köv: $f$ folytonos $[a,b]$-ben, akkor itt $\exists$ primitív fv-e)

$\Downarrow$ elégséges feltétel.

---

Biz: (i) legyen $|f(x)| \le K \quad \forall x \in [a,b]$ ($f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f$ korl)

$a \le x < y \le b$ esetén

$$I(y) - I(x) = \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^y f(t)\,dt$$

mivel $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le K(b-a)$

$\hookrightarrow$

$$|I(y) - I(x)| \le K \cdot |y-x| \quad \rightsquigarrow \text{Lipschitz}$$

.!

(ii)

$$I(x)-I(x_0)=\int_a^x f(t)dt-\int_a^{x_0} f(t)dt=\int_{x_0}^x f(t)dt$$

$$\cancel{I} \quad \frac{I(x)-I(x_0)}{x-x_0}=\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt$$

$f$ folytonos $x_0$-ban $\Rightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$

$\underline{f(x_0)-\varepsilon<f(t)<f(x_0)+\varepsilon}$, ha $|t-x_0|<\delta$

- ha $x_0<x<x_0+\delta$

$\left( m\le f(x)\le M \quad \forall x\in[a,b] \rightsquigarrow m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a) \right)$

$$\hookrightarrow \quad (f(x_0)-\varepsilon)(x-x_0)\le\int_{x_0}^x f(t)dt\le(f(x_0)+\varepsilon)(x-x_0) \qquad : x-x_0>0$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_0)-\varepsilon\le\frac{I(x)-I(x_0)}{x-x_0}\le f(x_0)+\varepsilon$$

- ha $x_0-\delta<x<x_0$ : $(f(x_0)-\varepsilon)(x_0-x)\le\int_{x_0}^{x_0} f(t)dt\le(f(x_0)+\varepsilon)(x_0-x)$

$/:(x-x_0)<0$

ugyanígy

$$\Rightarrow \quad I'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{I(x)-I(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$$

✓

(iii) (ii)-ből következik

3!

Van-e szükséges feltétele a primitív fv létezésének?

(láttuk: a folytonosság nem az!)

**Def**: $f$ fv Darboux-tulajdonságú $I$ intervallumon, ha $\forall\, a, b \in I$, $a < b$ esetén $f$ $\forall$ $f(a)$ és $f(b)$ közti értéket felvesz $[a,b]$-ben.

**Megj**: Bolzano-Darboux tétel: korlátos zárt intervallumon folytonos fv. Darboux-tulajdonságú

**Darboux-tétel**: Ha $f$ diffható $[a,b]$-ben, akkor itt $f'$ minden $f'_+(a)$ és $f'_-(b)$ közötti értéket felvesz.
(A derivált fv Darboux-tulajdonságú.)

**Köv**: $f$-nek csak akkor lehet primitív fv-e, ha Darboux tulajdonságú (vagyis a Darboux-tul. a primitív f létezésének szükséges feltétele)

(ha $\exists\, F(x)$: $F'(x) = f(x) \overset{D-T}{\Longrightarrow} f(x)$ felvesz $\forall$ értéket $f(a)$ és $f(B)$ között)

**Megj**: Megmutatható, hogy $\forall$ derivált függvénynek $\exists$ folytonossági pontja (NEHÉZ) $\Longrightarrow$ primitív fv létezésének szükséges feltétele hogy legalább 1 pontban folytonos legyen

$\exists$ olyan $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ fv, mely $[0,1]$ $\forall$ részintervallumán felvesz $\forall$ 0 és 1 közötti számot $\Longrightarrow$ $f$ Darboux-tulajdonságú és nincs folytonossági pontja $\Longrightarrow$ nem lehet primitív fv-e

$\Rightarrow$ Darboux-tulajdonság $\equiv$ a primitív fv létezésének szükséges, de nem elégséges feltétele

---

$K[a,b] := \{ f: [a,b] \to \mathbb{R},\ f$ korlátos $[a,b]$-n $\}$

$\mathcal{R}[a,b] := \{ f: [a,b] \to \mathbb{R},\ f$ Riemann-int.ható $[a,b]$-n $\}$

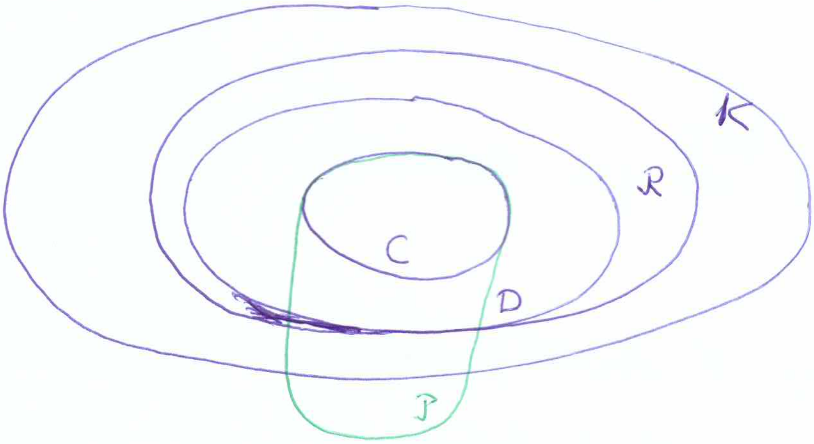
$C[a,b] := \{ f: [a,b] \to \mathbb{R},\ f$ folytonos $[a,b]$-n $\}$

$\mathcal{P}[a,b] := \{ f: [a,b] \to \mathbb{R},\ f$-nek $\exists$ primitív fv-e $[a,b]$-n $\}$

$\mathcal{D}[a,b] := \{ f \in \mathcal{R}[a,b]$, és $f$ integrálfv-e diffható $[a,b]$-n $\}$

TUDJUK:

- $C[a,b] \subset \mathcal{D}[a,b] \subset \mathcal{R}[a,b] \subset K[a,b]$
- $C[a,b] \subset \mathcal{P}[a,b]$
- $\mathcal{R}[a,b] \cap \mathcal{P}[a,b] \subset \mathcal{D}[a,b]$



5/ (INT-PE

Egyéb tartalmazások nem állnak fenn:

(1) $\cancel{\nexists}$ $f \in K[0,1] \not\Rightarrow f \in R[0,1]$ (korlátos, mely nem integrálható)

ellenpélda: Dirichlet-fv.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \text{ irrac} \\ 1 & , x \text{ rac} \end{cases}$$

$[a,b]$ $\forall$ $F$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ felosztásra, $\forall i = 1, \ldots, n$-re

$$m_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) = 0 \qquad M_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f(x) = 1$$

$$s_F = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0 \quad , \quad S_F = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot (x_i - x_{i-1}) = b - a$$

↳ semmilyen részintervallumban nem R-integrálható

(2) $f \in R[0,1] \not\Rightarrow f \in D[0,1]$

ellenpélda

$$f(x) := \begin{cases} 0 & , 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 1 & , \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

~~integrálható, de ∄ primitív fv (láttuk)~~

$$I(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \int_{\frac{1}{2}}^{x} dt = x - \frac{1}{2} & , \text{ha } x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

nem diff.ható $\frac{1}{2}$-ben

③ $f \in D[0,1] \not\Rightarrow f \in C[0,1]$

ellenpélda (előző példából):

$$f(x) := \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$f$ korlátos, 0 kivételével folytonos $\Rightarrow$ integrálható és $\exists$ primitív fv-e:

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

de $f$ nem folytonos!

⑤ $f \in D[0,1] \not\Rightarrow f \in P[0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

$$I(x) = \int_0^x f(x)\,dx = 0 \qquad I'(x) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

de $I(x)$ nem lesz primitív fv!

(5) $g \in J[0,1] \not\Rightarrow g \in K[0,1]$

<u>ellenpélda</u>

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$x \neq 0$

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$$

$x = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x^2} = 0$$

$f'(x)$ nem korlátos $[-1,1]$-ben!

$$\lim_{k \to \infty} \left| f'\left(\frac{1}{\sqrt{2k\pi}}\right) \right| = \infty$$

<u>tehát</u>: legyen
$$g(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$g(x)$ nem korlátos, de $\exists$ primitív fv-e:

$$G(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Ez jó példa olyan fv-re melynek $\exists$ primitív fv-e, de nem integrálható!

Megj: Van olyan korlátos fv is, melynek ∃ primitív fv-e de nem integrálható!

$(f \in K[0,1] \cap P[0,1] \not\Rightarrow f \in R[0,1])$

(Később mutatunk példát!)

Eml: $A \subset \mathbb{R}$ halmaz Lebesgue-szerint nullmértékű, ha $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\exists$ megszámlálhatóan sok nemelfajuló nyílt intervallum, melyek lefedik $A$-t és hosszaik összege $< \varepsilon$.

---

TÉTEL (Lebesgue-tétel)

Az $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fv akkor és csak akkor integrálható Riemann-szerint $[a,b]$-n, ha korlátos és a szakadási pontjainak halmaza Lebesgue-nullmértékű.

---

Biz: később (esetleg)

Megj (Eml: $f$ monoton $I$ nyílt intervallumon $\Rightarrow$ $I$-ben legfeljebb megszámlálhatóan sok szakadási helye lehet $\rightsquigarrow$ monoton korlátos függvények integrálhatók)

7/

Példa (Riemann-függvény)

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{, ha } x \text{ irracionális} \\ \frac{1}{q} & \text{, ha } x=\frac{p}{q} \text{ , } p,q\in\mathbb{Z} \text{ , } q>0 \text{ , } (p,q)=1 \end{cases}$$

a) $f$-nek $\forall$ helyen $\exists$ a határértéke és az 0

b) $f$ $\forall$ irracionális helyen folytonos

c) $f$ egyetlen rac. helyen nem folytonos

Biz a) $a\in\mathbb{R}$ tetsz, kell: $\forall \varepsilon>0$ $\exists \delta>0$ :

$$|f(x)-0|<\varepsilon \quad \text{, ha} \quad 0<|x-a|<\delta$$

vizsgáljuk sol $(-1,1)$-t!

$\varepsilon>0 \rightsquigarrow$ legyen $n>\frac{1}{\varepsilon}$ egész

$\hookrightarrow$ $|f(x)|<\frac{1}{n}$ , ha • $x$ irrac

• $x=\frac{p}{q}$ ; $(p,q)=1$ és $q>n$

$\Rightarrow$ $\underset{x\in(-1,1)}{|f(x)-0|\geq\frac{1}{n}} \iff x=0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \dots, \pm\frac{n-1}{n}$ (*)

$a\in(-1,1)$ , t/h ezek közül $a$-hoz a legközelebbi $\frac{p_1}{q_1}$

$\hookrightarrow$ $\delta:=\left|\frac{p_1}{q_1}-a\right|$ $\Rightarrow$ $(a-\delta,a+\delta)$-ban $\nexists$ nem (*) közül

$\Rightarrow$ $|f(x)-0|<\frac{1}{n}<\varepsilon$ , ha $0\leq|x-a|<\delta=\left|\frac{p_1}{q_1}-a\right|$

$\varepsilon$-hoz $\delta:=\left|\frac{p_1}{q_1}-a\right|$ jó $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ ✓

b) $a \notin \mathbb{Q} \Rightarrow f(a) = 0$ és láttuk $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 = f(a)$ !

c) $a \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(a) \neq 0$, de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \neq f(a)$ !

<u>Megj.</u> olyan fv $\nexists$, mely $\forall$ rac helyen folytonos és $\forall$ irrac helyen szakad!

$f$ Riemann-fv
- korlátos
- szakadási helyei megszámlálhatóak $\Rightarrow$ Lebesgue-nullmértékű

$\Downarrow$

$f$ Riemann-integrálható és $\int_a^b f(x)\,dx = 0$

(gyakorlat)