1/

Trigonometrikus függvények és inverzeik

Áll. A cos függvénynek $(0,2)$-ben pontosan egy zérushelye van.

Biz.

emlékeztető: $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ha $x \in [0,2]$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{x^2}{3\cdot 4}\right) - \underbrace{\frac{x^6}{6!}\left(1 - \frac{x^2}{7\cdot 8}\right)}_{>0} - \dots <$$

pozitív tagokat vonunk le

$$< 1 - \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12}\right)$$

$\hookrightarrow \quad \cos 0 = 1 > 0 > -\frac{1}{3} = 1 - 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{2^2}{2}\left(1 - \frac{2^2}{12}\right) > \cos 2$

tehát $\cos 0 > 0$ és $\cos 2 < 0$.

$(\cos x)' = -\sin x$ és

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = x\left(1 - \frac{x^2}{2\cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6\cdot 7}\right) + \dots > 0,$$

ha $0 < x < \sqrt{6}$.

viszont $(\cos x)' = -\sin x < 0$ ha $x \in [0,2]$

$\Rightarrow$ $\cos x \downarrow$ szig. $[0,2]$-ben $+$ $\cos 0 > 0$, $\cos 2 < 0$

$\Rightarrow$ pontosan 1 gyöke van $(0,2)$-ben. !

2)

Def: π-vel jelöljük azt a valós számot, amelyre teljesül, hogy

$$0 < \frac{\pi}{2} < 2 \text{ és } \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

TÉTEL $\forall z \in \mathbb{C}$ számra $\sin(z+2\pi) = \sin z$ és $\cos(z+2\pi) = \cos z$.
2π az a legkisebb pozitív szám, melyre a fentiek teljesülnek $\forall z \in \mathbb{C}$ esetén.

Biz

$$\sin^2\frac{\pi}{2} + \cos^2\frac{\pi}{2} = \sin^2\frac{\pi}{2} + 0 = 1$$

Mivel a fent. [illegible] láttuk, hogy $\sin\frac{\pi}{2} > 0 \Rightarrow \boxed{\sin\frac{\pi}{2} = 1}$

Em: addíciós képletek:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$$

$$\hookrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} \mp x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cos x \mp \cos\frac{\pi}{2}\sin x = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} \mp x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos x \pm \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin x = \pm \sin x$$

$$\Rightarrow \sin(\pi + x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\cos(\pi + x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$$

$$\sin(2\pi + x) = \sin(\pi + (\pi + x)) = -\sin(\pi + x) = \sin x$$

$$\cos(2\pi + x) = \cos(\pi + (\pi + x)) = -\cos(\pi + x) = \cos x$$

3) indirekt: tfh $\exists$ $0 < p < 2\pi$, melyre $\sin(x+p) = \sin x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

- $x = 0 \rightsquigarrow \sin(0+p) = \sin p = \sin 0 = 0 \rightsquigarrow \boxed{\sin p = 0}$

- $\sin p = 2 \sin \frac{p}{2} \cos \frac{p}{2} = 0 \rightsquigarrow \sin \frac{p}{2} = 0$ vagy $\cos \frac{p}{2} = 0$

de láttuk, hogy $\sin x > 0$, ha $0 < x < \underbrace{\sqrt{6}}_{\vee\ \pi} \rightarrow \sin \frac{p}{2} > 0$

$\Rightarrow$ csak $\cos \frac{p}{2} = 0$ lehet, de ekkor $p = \pi$ kell, hogy teljesüljön.

$$\hookrightarrow \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$$
$$\parallel$$
$$\sin \frac{\pi}{2} = 1 \qquad : \lightning$$

o.!

Hasonlóan cos-ra.

Köv

$\sin x = 0 \iff x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = 0 \iff x = (k + \frac{1}{2})\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

TÉTEL:

(i) A koszinusz függvény szigorúan monoton nő a $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$-n szigorú monoton csökken a $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ intervallumon

(ii) A szinusz fv szig monoton nő a $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ intervallumon szig. monoton csökken a $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$ intervallumon,

ahol $k \in \mathbb{Z}$.

~~Bp~~ **Biz.** (i) $x, y \in [0, \pi]$, $x < y$.

Mivel $\cos y - \cos x = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

és $\sin x > 0$, ha $x \in (0, \pi)$ $\rightsquigarrow$ $\cos y - \cos x < 0$ $\rightsquigarrow$ $\cos x > \cos y$, ha $x < y$

$\Downarrow$

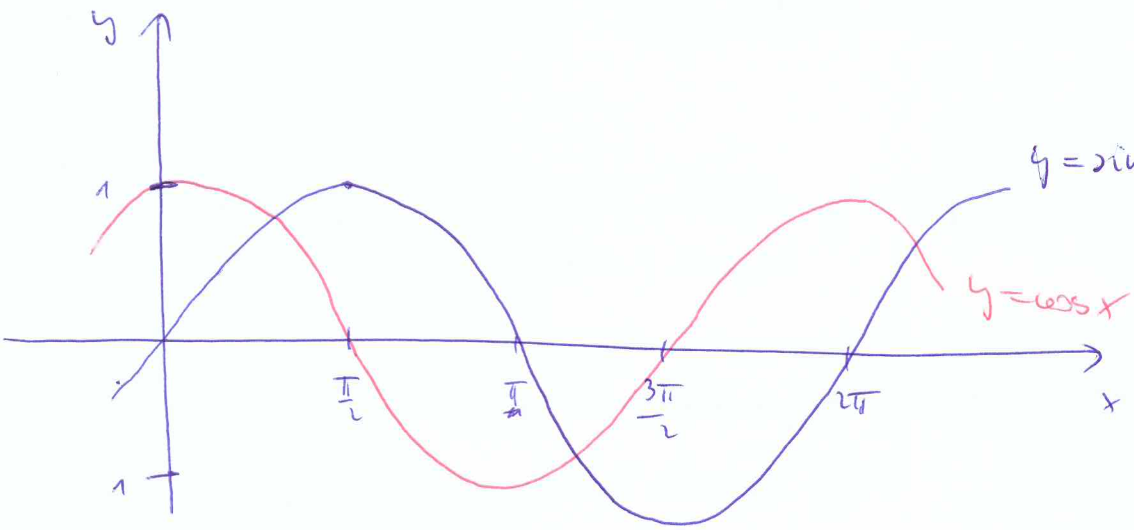
$\cos x \searrow$ míg $[0, \pi]$-n

$\cos(-x) = \cos x \rightsquigarrow$ páros $\Rightarrow$ $\cos x \nearrow$ míg $[-\pi, 0]$-n

+ periodikus

(ii) Mivel $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ $\rightsquigarrow$ (i)-ből következik

Ömegjelek.



Megj. $\cos n\pi = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ ps} \\ -1, & \text{ha } n \text{ ptlan} \end{cases} = (-1)^n$, $\sin (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2} = (-1)^n$

5)

Def.

$$tg\,x := \frac{\sin x}{\cos x} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{(k+\tfrac{1}{2})\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}\}$$ tangens fv

$$ctg\,x := \frac{\cos x}{\sin x} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$ kotangens-fv

Láttuk.

$$(tg\,x)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x$$

$$(ctg\,x)' = -\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + ctg^2 x)$$

A sin x és cos x függvény korábbi tulajdonságaiból adódnak:

① tg x és ctg páratlan fv

$$tg(-x) = -tg\,x \quad \forall x \in D_{tg}, \quad ctg(-x) = -ctg\,x \quad x \in D_{ctg}$$

②

$$tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -ctg\,x \qquad x \in D_{ctg}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -ctg\,x \qquad x \in D_{ctg}$$

③

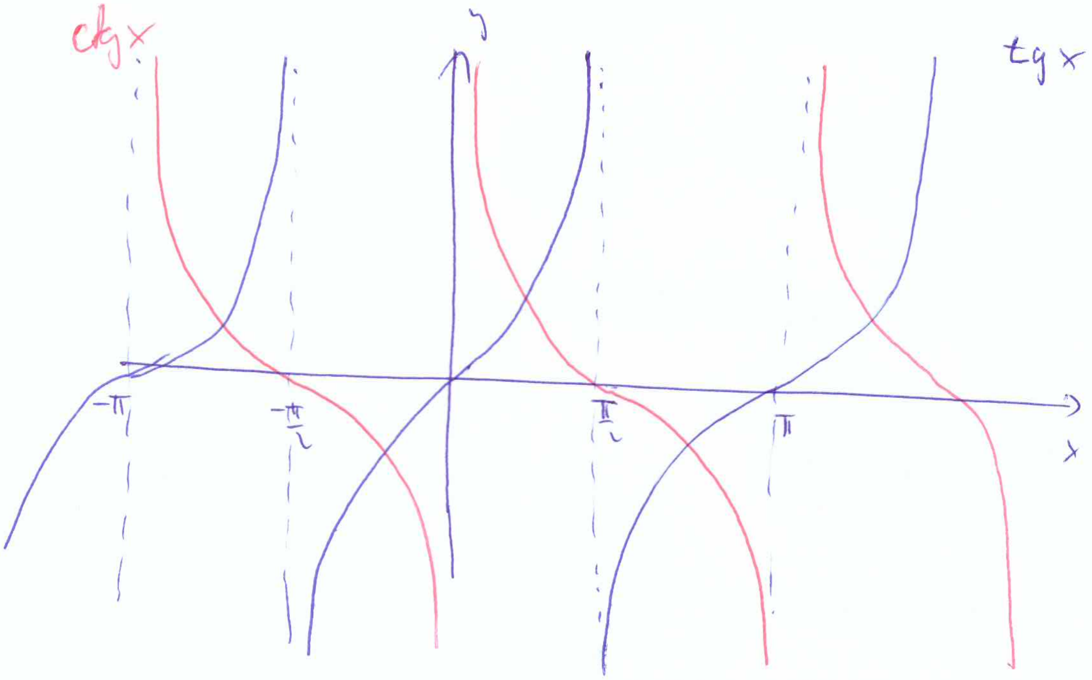
$$tg(x + k\pi) = tg\,x, \quad ctg(x + k\pi) = ctg\,x \qquad k \in \mathbb{Z}$$

(5) $tg\,x$ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-ben szigorúan $\uparrow$ és

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+0} tg\,x = -\infty, \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} tg\,x = +\infty$$

(7) $ctg\,x$ $(0, \pi)$-ben szig $\downarrow$ és

$$\lim_{x \to 0+} ctg\,x = +\infty, \quad \lim_{x \to \pi-0} ctg\,x = -\infty$$



A trigonometrikus függvények periodikusak $\Rightarrow$ az értékkészletük $\forall$ elemét
∞ sokszor veszik fel
($\leadsto$ nem injektívek)

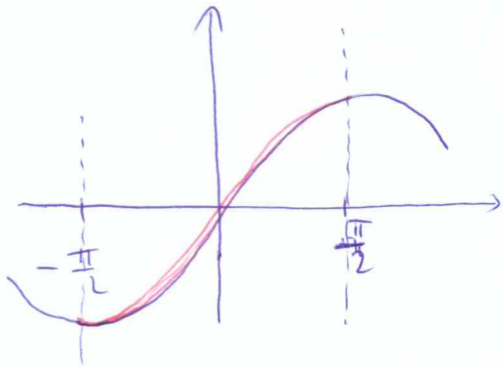
$\Downarrow$

nem invertálhatóak

Alkalmas leszűkítésük esetén invertálható!

A trigonometrikus függvények inverzei – Arkusz függvények

(1)

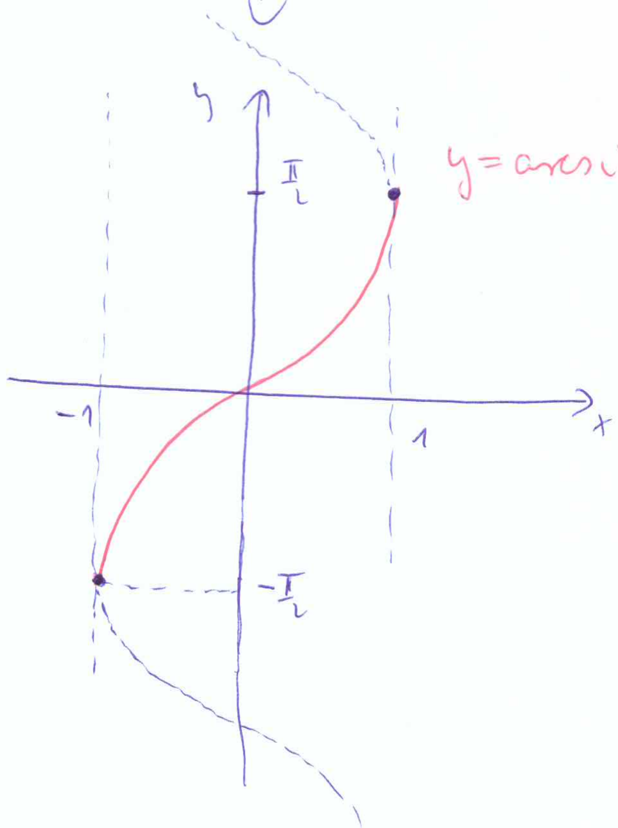


A szinusz fv $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$-ben szigorúan monoton nő

$\Downarrow$

Def. A szinusz fv $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ intervallumra való leszűkítésének inverzét arkusz szinusz függvénynek nevezik, jele $\arcsin x$

$\Downarrow$



- $D_{\arcsin} = [-1,1]$

  $R_{\arcsin} = [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

- $\sin(\arcsin x) = x$, ha $x \in [-1,1]$

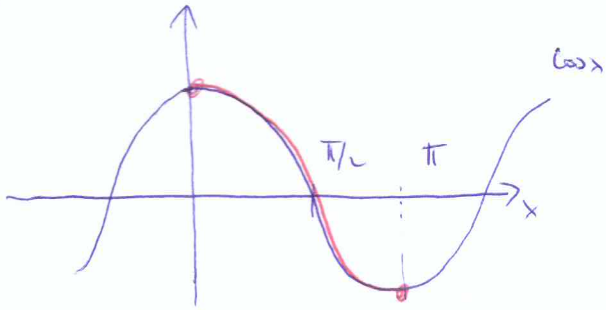
  $\arcsin(\sin x) = x$, ha $x \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

- $\arcsin x$ ↗ szig.

- $$\boxed{\arcsin'(x)} = (\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in (-1,1)}$$

8/(2)



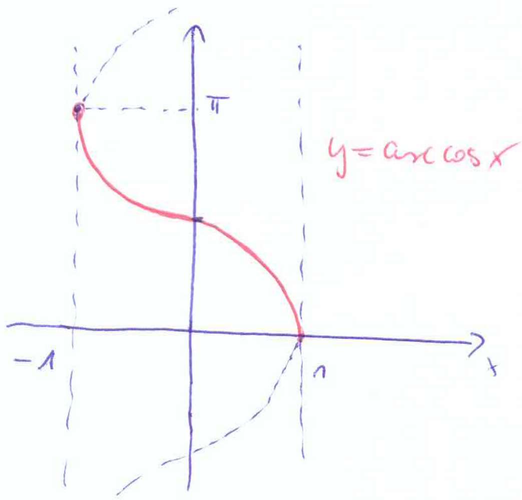
A koszinusz fv $[0,\pi]$-n szigorúan $\downarrow$

$\Downarrow$

invertálható

Def: A cos fv $[0,\pi]$ intervallumra való leszűkítésének inverzét arkusz koszinusz fv-nek nevezzük.

Jel: arccos



- $D_{\arccos} = [-1,1]$
  $R_{\arccos} = [0,\pi]$
- $\cos(\arccos x) = x \quad x \in [-1,1]$
  $\arccos(\cos x) = x \quad x \in [0,\pi]$
- $\arccos x \downarrow$ szig

-

$$\arccos' x = (\arccos x)' = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} =$$

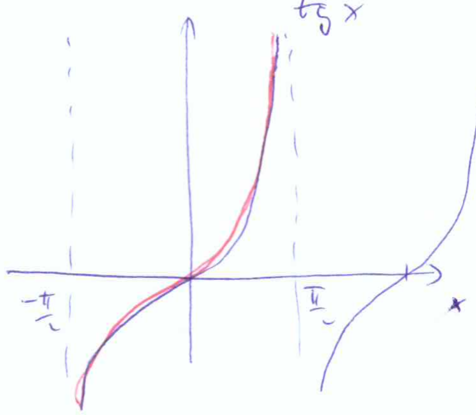
$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$x \in (-1,1)$

$$\boxed{\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x \qquad x \in [-1,1]}$$

9/

(3)



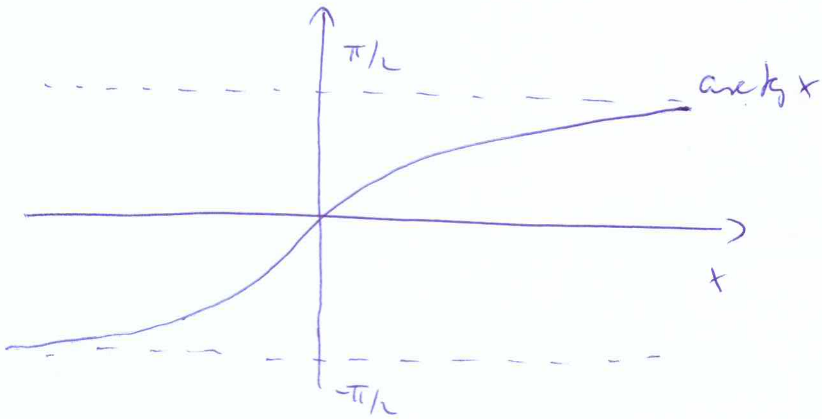
A tangens fv szig monoton $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-en

⇓

invertálható

Def. A tg fv $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-re vett leszűkítésének ~~inverzét~~ inverzét arkusztangens fv-nek nevezzük,

jel: arctg ≡ arctan



- $D_{arctg} = (-\infty, \infty)$
- $R_{arctg} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

- $\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}\, x) = x \quad x \in (-\infty, \infty)$, $\quad \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\, x) = x \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

- arctg x ↗ szig

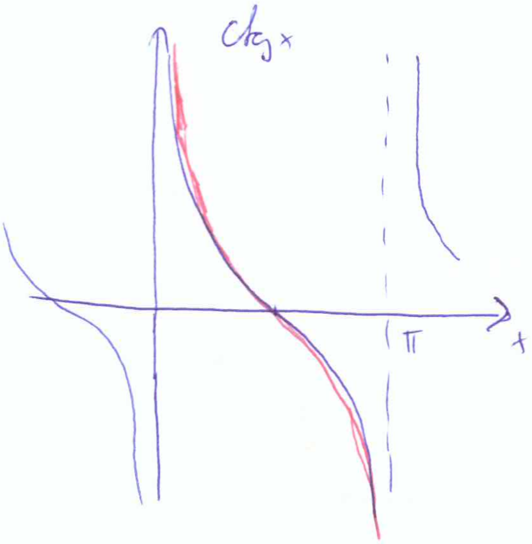
- $\mathrm{arctg}'\, x = (\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{tg}'(\mathrm{arctg}\, x)} = \dfrac{1}{1 + \mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}\, x)} = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\uparrow$

$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x$

10)

(5)



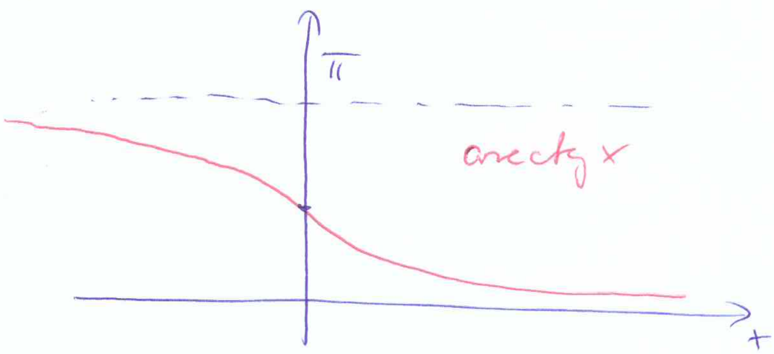
A kotangens fv szig ↓ $(0,\pi)$-n

⇓

<u>Def.</u> A ctg fv $(0,\pi)$-re vett megszorításának inverzét arkusz kotangens fv-nek nevezzük.

Jel: arcctg = arccotan

∘



- $D_{arcctg} = (-\infty,\infty)$, $R_{arcctg} = (0,\pi)$

- $ctg(arcctg\, x) = x \qquad x \in (-\infty,\infty)$

  $arcctg(ctg\, x) = x \qquad x \in (0,\pi)$

- $(arcctg\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2} \qquad x \in \mathbb{R}$

$$\boxed{arcctg\, x = \frac{\pi}{2} - arctg\, x \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

11)

Hiperbolikus függvények és inverzeik – Area függvények

Értelmezés:

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \qquad x \in \mathbb{R}$$

$\hookrightarrow$ • $\operatorname{ch} x \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$; $\operatorname{sh} x > 0$, ha $x > 0$

• $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x \rightsquigarrow$ páros fv ; $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x \rightsquigarrow$ ptlan fv

$\hookrightarrow \operatorname{sh} x = -\operatorname{sh}(-x) < 0$, ha $x < 0$

$\Rightarrow$ Mivel $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \operatorname{sh} x \nearrow$ szig $\mathbb{R}$-en

Mivel $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x > 0$, ha $x > 0 \Rightarrow \operatorname{ch} x \nearrow$ szig $[0, \infty)$-en

< 0, ha $x < 0 \Rightarrow \operatorname{ch} x \searrow$ szig $(-\infty, 0]$-n

$$\boxed{\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}} \quad , \quad \boxed{\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Köv

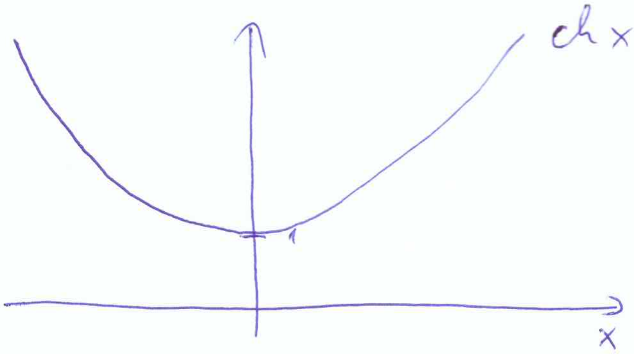
$$\lim_{x \to \infty} \operatorname{ch} x = \lim_{x \to -\infty} \operatorname{ch} x = \infty$$

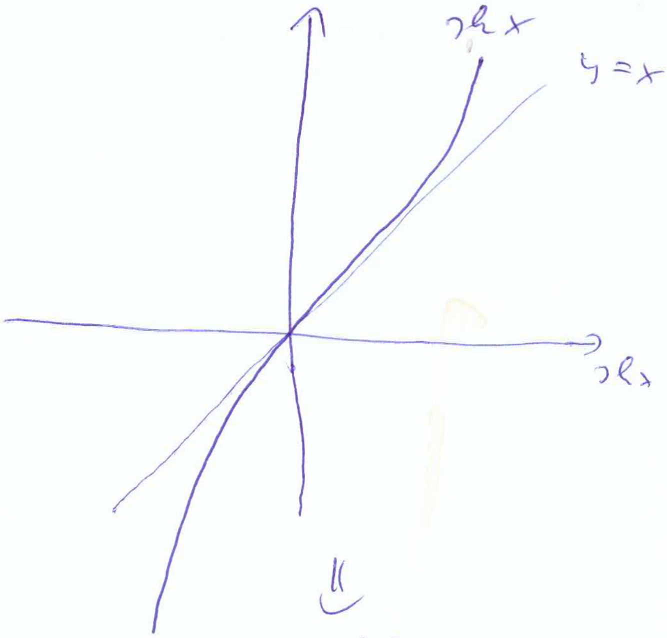
$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{sh} x = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to \infty} \operatorname{sh} x = +\infty$$

$\Downarrow$

$$R_{\operatorname{sh}} = \mathbb{R} \quad , \quad R_{\operatorname{ch} x} = [1, \infty)$$

12/





$\Downarrow$

ch x szig ↗ $[0,\infty)$-n

$\Downarrow$

injektív $\mathbb{R}$-en

<u>Def</u>: A ch függvény $[0,\infty)$-re való leszűkítésének inverzét <u>area koszinusz hiperbolikusz</u> fv-nek nevezzük. Jel: arch

A sh függvény inverzét <u>area szinusz hiperbolikusz</u> fv-nek nevezzük. Jel: arsh

① $D_{arsh} = \mathbb{R}$, $R_{arsh} = \mathbb{R}$, $D_{arch} = [1,\infty)$, $R_{arch} = [0,\infty)$

② $sh(arsh\, x) = x$, $arsh(sh\, x) = x$ $\quad x \in \mathbb{R}$

$arch(ch\, x) = x$, $x \in \mathbb{R}$; $ch(arch\, x) = x$ $\quad x \in [1,\infty)$

③

$$sh(arsh\, x) = x \implies sh'(arsh\, x) \cdot (arsh\, x)' = 1$$

$$\hookrightarrow (arsh\, x)' = \frac{1}{sh'(arsh\, x)} = \frac{1}{ch(arsh\, x)}$$

de $ch^2 x - sh^2 x = 1 \implies ch\, x = \sqrt{1 + sh^2 x}$, így

13/

$$(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{arsh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad , \text{ha} \quad x > 1$$

megjegyzés:

$$\operatorname{ch}(\operatorname{arch} x) = x \quad , \text{ha} \quad x \in [1,\infty)$$

$$\hookrightarrow \quad \operatorname{ch}'(\operatorname{arch} x) \cdot (\operatorname{arch} x)' = 1$$

$$\hookrightarrow \quad (\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}'(\operatorname{arch} x)} = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{arch} x)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{arch} x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\hookrightarrow \operatorname{sh} x = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}$$

TÉTEL:

$$\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \quad , \text{ha} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad , \text{ha} \quad x \geq 1$$

Biz.

$$x = \operatorname{sh}(\operatorname{arsh} x) = \frac{e^{\operatorname{arsh} x} - e^{-\operatorname{arsh} x}}{2} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$t := e^{\operatorname{arsh} x} \quad \rightsquigarrow \quad x = \frac{t - \frac{1}{t}}{2} \qquad (t > 0)$$

$$\Rightarrow \quad t^2 - 2tx - 1 = 0$$

diszkrimináns:

$$D = 4x^2 + 4$$

14/

$$t_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$$

Mivel $t = e^{\operatorname{arsh} x} > 0 \implies t = x + \sqrt{x^2+1} = e^{\operatorname{arsh} x}$

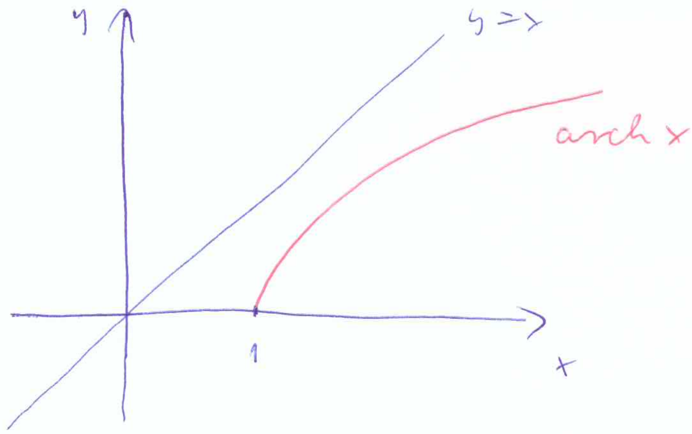
$$\Downarrow$$

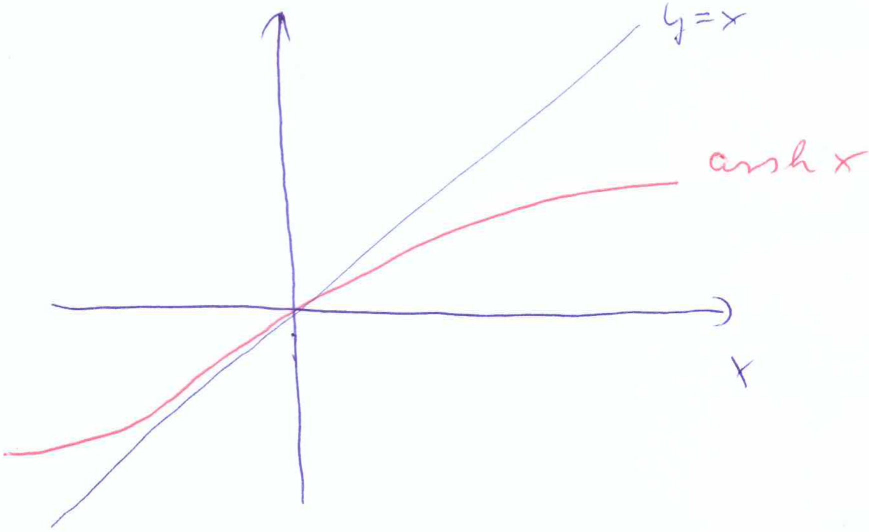
$$\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

A másik kifejezés ugyanígy adódik

$$x = \operatorname{ch}(\operatorname{arch} x) = \frac{e^{\operatorname{arch} x} + e^{-\operatorname{arch} x}}{2} \qquad x \geq 1 \text{ -ből}$$

(HF) ☺





15)

Def:

$$\text{th}\,x = \frac{\text{sh}\,x}{\text{ch}\,x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \qquad x \in \mathbb{R} \qquad \text{tangens hiperbolikus}$$

$$\text{cth}\,x = \frac{\text{ch}\,x}{\text{sh}\,x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \qquad x \in \mathbb{R},\ x \neq 0 \qquad \text{kotangens hiperbolikus}$$

Az eddigiek alapján nyilvánvaló, hogy:

(1) $D_{th} = \mathbb{R}$, $R_{th} = (-1,1)$

$D_{cth} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $R_{cth} = (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$

(2) th x folytonos és szig ↗

cth x ~~folyto~~ szig ↘ $(-\infty,0)$-n

szig ↗ $(0,\infty)$-n

(3) th x páratlan, cth x páratlan

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \text{th}\,x = -\lim\limits_{x\to-\infty} \text{th}\,x = 1$

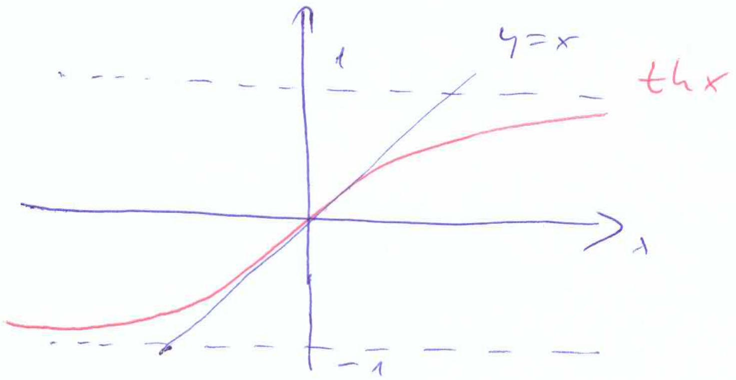
$\lim\limits_{x\to-\infty} \text{cth}\,x = -1$, $\lim\limits_{x\to0-0} \text{cth}\,x = -\infty$

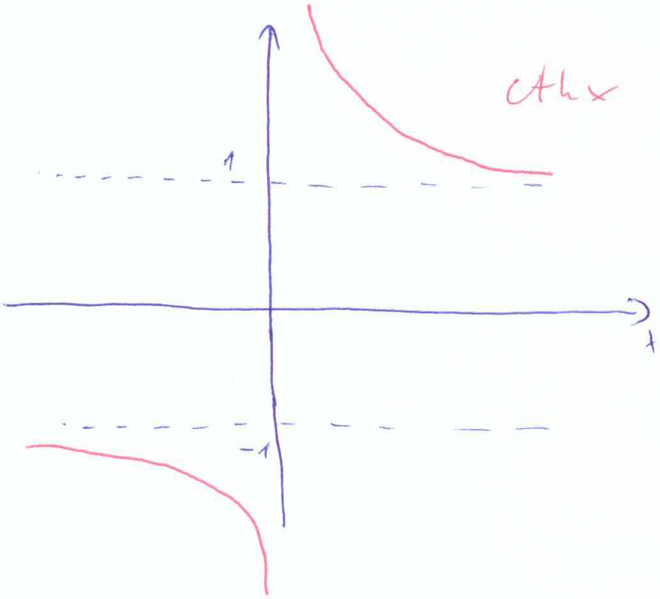
$\lim\limits_{x\to\infty} \text{cth}\,x = 1$, $\lim\limits_{x\to0+0} \text{cth}\,x = +\infty$

(5) $(\text{th}\,x)' = \dfrac{1}{\text{ch}^2 x} \qquad x \in \mathbb{R}$

$(\text{cth}\,x)' = -\dfrac{1}{\text{sh}^2 x} \qquad x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$

16)





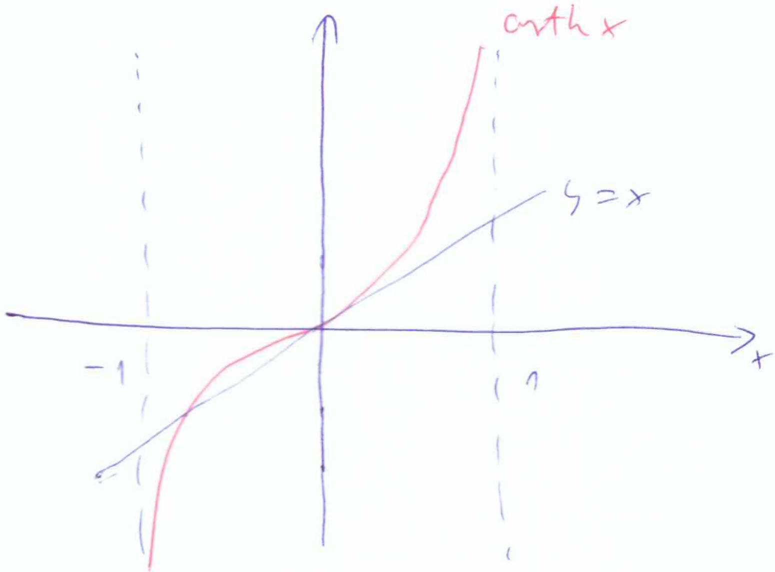
th szigorúan nő $\mathbb{R}$-en $\rightsquigarrow$ invertálható

$\Downarrow$

Def. A th függvény inverzét area tangens hiperbolikusnak hívjuk. Jel: arth

- $D_{\operatorname{arth}} = (-1,1)$, $R_{\operatorname{arth}} = \mathbb{R}$
- arth $\nearrow$ szig
- $(\operatorname{arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$ $\quad x \in (-1,1)$ $\quad$ (HF)
- $\operatorname{arth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ $\quad x \in (-1,1)$ $\quad$ (HF)

17)



A cth szigorúan monoton az értelmezési tartományán $\Rightarrow$ invertálható

inverz: area kotangens hiperbolikusz jel: arcth

- $D_{arcth} = (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$

  $R_{arcth} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- páratlan

- $(\text{arcth}\, x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$, ha $|x| > 1$