1/

A differenciálszámítás alkalmazásai

① l'Hospital-szabály

" $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^{∞}, ∞^{0} " típusú határértékek kiszámítására
$\infty-\infty$, $0\cdot\infty$ alkalmazható

TÉTEL (l'Hospital-szabály)

Legyen f és g differenciálható α egy pontozott környezetében
($(\alpha-\delta,\alpha+\delta)\setminus\{\alpha\}$ -ban). Tfh, ~~hogy~~ ~~itt~~ itt $g\neq 0$ és $g'\neq 0$,
továbbá vagy $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=0$, vagy

$$\lim_{x\to\alpha} |g(x)|=\infty .$$

Ha

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\beta \text{, akkor } \lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta .$$

Itt α lehet $a \overset{\in\mathbb{R}}{}$, $a+0$, $a-0$, ∞ vagy $-\infty$ bármelyike,
β lehet $b\in\mathbb{R}$, ∞ vagy $-\infty$.

Biz Először abban a spec. esetben bizonyítunk, mikor
$\alpha=a\in\mathbb{R}$ és $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=f(a)=g(a)=0$

2/ Ekkor a Cauchy-féle középértéktétel miatt a pont egy környezetében $\forall x \neq a$-hoz $\exists$ $c \in (x, a)$, melyre

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ egy sorozat, melyre $x_n \to a$.

Ekkor $\exists$ $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat, mely $c_n \to a$ és

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}\text{-re}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \beta \quad + \text{átviteli elv} \checkmark$$

Ha általában tekintjük, azaz $f(\alpha)$ vagy $g(\alpha)$ nincs értelmezve, vagy $\neq 0$ vagy α nem véges

$\Downarrow$ tfh $\alpha \in \{a+0, a-0, \infty, -\infty\}$

trükk:

$\forall y \neq x$-re

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \cdot \frac{g(x)-g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} =$$

$$= \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)}$$

3)

$\Rightarrow \exists\ c \in (x,y)$ melyre

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \left(1 - \frac{g(y)}{g(x)}\right) + \frac{f(y)}{g(x)} \qquad (*)$$

Ha belátjuk, hogy $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ x_n \to \alpha,\ x_n \neq \alpha$ sorozathoz

$\exists\ (y_n)_{n\in\mathbb{N}},\ y_n \to \alpha,\ y_n \neq \alpha$ sorozat, melyre

$$(**) \qquad \frac{f(y_n)}{g(x_n)} \to 0 \quad \text{és} \quad \frac{g(y_n)}{g(x_n)} \to 0 \quad \text{, akkor}$$

az állítás a $(*)$ alapján készen vagyunk.

• T/h $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$, legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, melyre $x_n \to \alpha$ $x_n \neq \alpha$.

$\Rightarrow \forall\ k$-hoz $\exists\ n_k$, hogy $\left|\dfrac{f(x_{n_k})}{g(x_{n_k})}\right| < \dfrac{1}{k}$ és

$$\left|\frac{g(x_{n_k})}{g(x_k)}\right| < \frac{1}{k} \text{, hiszen}$$

$\forall$ rögzített k mellett

$$\frac{f(x_n)}{g(x_k)} \to 0 \quad \text{és} \quad \frac{g(x_n)}{g(x_k)} \to 0 \text{, ha } n \to \infty$$

$y_k := x_{n_k} \Rightarrow$ teljesülnek $(**)$-lelek ✓

4)

- Tfh $\lim\limits_{x\to\alpha} |g(x)| = \infty$, ekkor $\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ x_n \to \alpha,\ x_n \neq \alpha$

zorozatra $\lim\limits_{n\to\infty} |g(x_n)| = \infty$

$$\Downarrow$$

$\forall\, i \in \mathbb{N}$-hez $\exists\, N_i \in \mathbb{N}$, hogy

$$\left|\frac{f(x_i)}{g(x_m)}\right| < \frac{1}{i} \quad \text{és} \quad \left|\frac{g(x_i)}{g(x_m)}\right| < \frac{1}{i} \quad \text{ha } m \geq N_i$$

Feltehetjük, hogy $N_1 < N_2 < \ldots$

$y_k := x_i$, ha $N_i < k \leq N_{i+1}$ $\Rightarrow$ $(**)$ mód teljesül.

- Ha $\alpha = a$ véges, akkor $\alpha = a+0$, $\alpha = a-0$ -t már igazoltuk

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to a-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$$

vagyis $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$

o!

5/

Példák

(1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \underset{\frac{0}{0},\ \text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \underset{\frac{0}{0},\ \text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}$$

(2)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x}{\ln 4x} \underset{\frac{\infty}{\infty},\ \text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{5}{\frac{1}{4x}\cdot 4} = \lim_{x\to\infty} 5x = \infty$$

(3)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^n x}{x} \underset{\frac{\infty}{\infty}\ \text{l'H}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{n \ln^{n-1} x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{n \ln^{n-1} x}{x} \underset{\frac{\infty}{\infty}\ \text{l'H}}{=}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)\ln^{n-2} x \cdot \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)\ln^{n-2} x}{x} = \dots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{x} = 0$$

meg általában:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} = 0 \qquad \forall\ \alpha,\beta > 0}$$

(4)

$$\lim_{x\to 0+0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) \underset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to 0+0} \frac{x - \sin x}{x\cdot \sin x} \underset{\frac{0}{0},\ \text{l'H}}{=} \lim_{x\to 0+0} \frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} \underset{\frac{0}{0},\ \text{l'H}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = 0$$

(5)

$$\lim_{x\to 0} 2x\cdot \mathrm{ctg}\,3x \underset{\substack{\uparrow\\ 0\cdot\infty}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\mathrm{tg}\,3x} \underset{\substack{\uparrow\\ \frac{0}{0},\ l'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2}{\frac{3}{\cos^2 3x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\cos^2 3x = \frac{2}{3}$$

(6.)

$$\lim_{x\to 0+0} x^x \underset{\substack{\uparrow\\ „0^0"}}{=} \lim_{x\to 0+0} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0+0} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0+0} x\ln x} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0+0} x\ln x \underset{\substack{\uparrow\\ „0\cdot(-\infty)"}}{=} \lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{\substack{\uparrow\\ \frac{-\infty}{\infty}}}{=} \lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+0}(-x^2) = 0$$

(7) Nem mindig alkalmazható:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{sh}\,3x}{\mathrm{ch}\,5x} \underset{\substack{\uparrow\\ \frac{\infty}{\infty}\ l'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{3\,\mathrm{ch}\,3x}{5\,\mathrm{sh}\,5x} \underset{\substack{\uparrow\\ \frac{\infty}{\infty},\ l'H}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{9\,\mathrm{sh}\,3x}{25\,\mathrm{ch}\,5x} \underset{\substack{\uparrow\\ \frac{\infty}{\infty}}}{=} \ldots\ldots$$

Def alapján:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{sh}\,3x}{\mathrm{ch}\,5x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{2}}{\frac{e^{5x}+e^{-5x}}{2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{e^{5x}+e^{-5x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\overset{\to 0}{e^{-6x}}}{\underset{\downarrow\,\infty}{e^{2x}}+\underset{\downarrow\,0}{e^{-8x}}} = 0$$

7/

Magasabbrendű differenciálhányadosok

<u>Def.</u> Legyen f diffható a egy környezetében. Ha az f' deriváltfüggvénynek ∃ a deriváltja a-ban, akkor f' a-beli deriváltját f a-beli <u>második deriváltjának</u> hívjuk.

<u>jel.</u> $$f''(a) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}$$

akkor f kétszer deriválható a-ban.

egyéb jelölés: $\dfrac{d^2 f}{dx^2}(a)$

<u>hasonlóan</u>: indukcióval: f $(k-1)$-szer deriválható a-ban

↪ derivált: $f^{(k-1)}(a)$

ha $f^{(k-1)}$ deriválható $\Rightarrow$ $f^{(k)}(a) \equiv \dfrac{d^k f}{dx^k}(a)$

<u>TÉTEL:</u> Az a szám a p polinomnak akkor és csak akkor k-szoros gyöke, ha $p(a)=p'(a)=\ldots=p^{(k-1)}(a)=0$ és $p^{(k)}(a)\neq 0$

<u>Biz.</u> teljes indukció:

- $k=1$ $\rightsquigarrow$ $p(x)=(x-a)\,q(x)$ és $q(a)\neq 0$

↪ $p'(x)=q(x)+(x-a)\,q'(x)$ $\rightsquigarrow$ $p'(a)=q(a)\neq 0$ ✓

8/ • t/h $k-1$-ed ijen $(k>1)$

• k-ra

$p(x) = (x-a)^k q(x)$, ahol $q(a) \neq 0$

$p'(x) = k(x-a)^{k-1} q(x) + (x-a)^k q'(x) = (x-a)^{k-1} \cdot r(x)$

ahol $r(x) = k\, q(x) + (x-a)\, q'(x)$

$\hookrightarrow r(a) = k\, q(a) \neq 0$

$\hookrightarrow$ a p'-nek $(k-1)$-szeres gyöke $\Rightarrow$ (ind. feltevés) $p'(a) = p''(a) = \ldots = p^{(k-1)}(a) = 0$

és $p^{(k)}(a) \neq 0$

TÉTEL: f és g n-szer diff.ható a-ban $\Rightarrow$ $f+g$ és $f \cdot g$ is n-szer diff.ható a-ban

és

$$(f+g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a)$$

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(a)\, g^{(k)}(a)$$

Leibniz-szabály

Biz.: teljes indukcióval (HF)

Megj: • a^x akárhányszor diff.ható és $(a^x)^{(n)} = \cancel{\log}(\ln a)^n \cdot a^x$

• x^α -||- $(0,\infty)$-en és $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

• $\sin x$, $\cos x$ akárhányszor diff.ható és

$(\sin x)^{(2n)} = (-1)^n \sin x$ $\qquad$ $(\cos x)^{(2n)} = (-1)^n \cos x$

$(\sin x)^{(2n+1)} = (-1)^n \cos x$ $\qquad$ $(\cos x)^{(2n+1)} = (-1)^{n+1} \sin x$

Polinomapproximáció

approximáció ≡ közelítés

Def. Legyen f n-szer diffható x_0-ban. Ekkor a

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (f^{(0)} \equiv f)$$

polinomot az f-fv x_0-beli n-ed fokú Taylor-polinomja.

Megj. Ha $x_0 = 0$: Maclaurin-polinom

Megj.

$T_0(x) = f(x_0)$

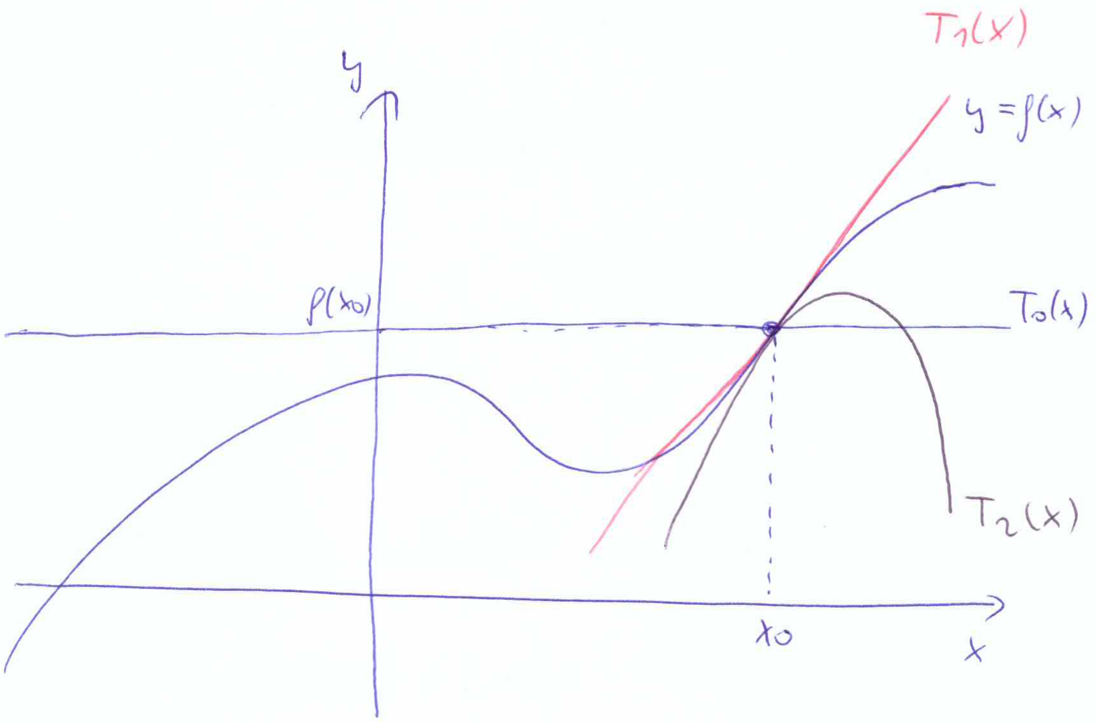
$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

érintőegyenes

$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$

parabola

⋮



10)

TÉTEL $T_n(x)$ az egyetlen legfeljebb n-ed fokú polinom, melyre

$$T_n(x_0)=f(x_0),\ T_n'(x_0)=f'(x_0),\ \ldots,\ T_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0).$$

Továbbá, ha egy legfeljebb n-ed fokú polinomra teljesül, hogy

$$p(x_0)=f(x_0),\ p'(x_0)=f'(x_0),\ \ldots,\ p^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0),$$

akkor $p=T_n$.

BIZ

$$T_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$\hookrightarrow T_n(x_0)=f(x_0)$ ✓

$$T_n'(x)=f'(x_0)+f''(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

$\hookrightarrow T_n'(x_0)=f'(x_0)$

⋮

s.í.t. ✓

Tegyük fel, hogy p-re teljesülnek a fenti feltételek!

$$q:=p-T_n \implies q(x_0)=q'(x_0)=\ldots=q^{(n)}(x_0)=0$$

T/h (indirekt) $q\not\equiv 0$.

Láttuk: Ha ‚a' p-nek k-szoros gyöke $\Leftrightarrow$ $p(a)=p'(a)=\ldots=p^{(k-1)}(a)=0$ és $p^{(k)}(a)\neq 0$

$\Rightarrow$ x_0 q-nak legalább $(n+1)$-szeres gyöke: $\lightning$, mert q legfeljebb n-ed fokú

$\Downarrow$

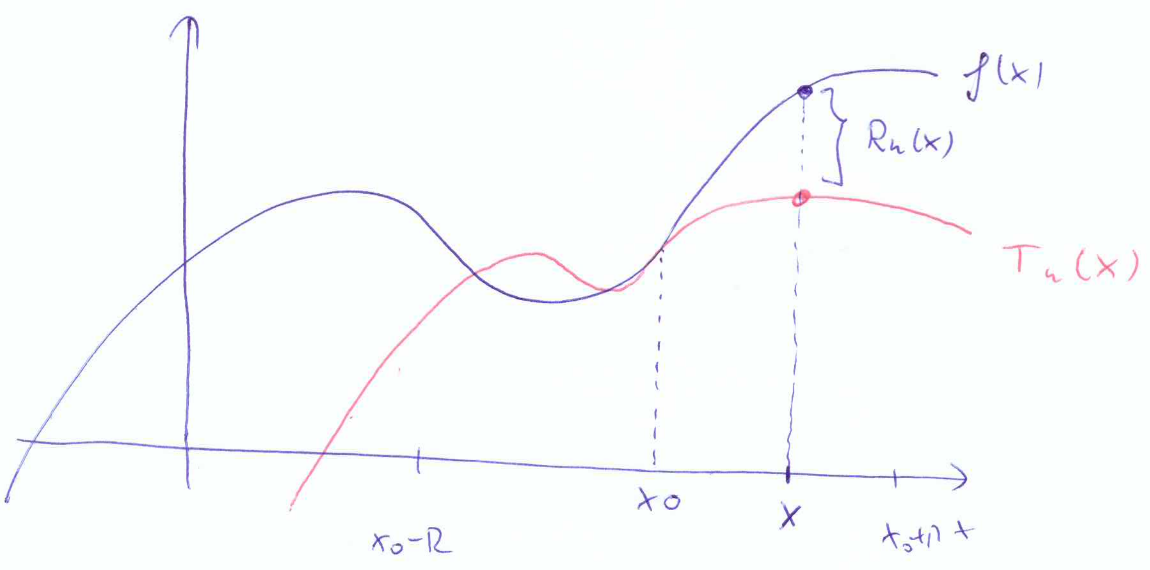
$q\not\equiv 0 \Rightarrow p_n = T_n$!

TÉTEL (Taylor-formula)

Legyen az f fv $(n+1)$-szer deriválható $B(x_0,R)=(x_0-R,x_0+R)$-ben.

Ekkor $\exists\ \xi$ x_0 és x között ($x\in B(x_0,R)$), melyre

$$f(x)=\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{T_n(x)\ \text{Taylorpolinom}}+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x):\ \text{Lagrange-féle maradéktag}}$$



12)

$R_n(x)$ méri a különbséget $T_n(x)$ és $f(x)$ között

<u>Biz</u> Tfh $x_0 < x$ ($x < x_0$ ugyanígy)

$t \in [x_0, x]$

<u>x rögzített</u>

$$R(t) := \left[f(t) + f'(t)(x-t) + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n \right] - f(x)$$

↳ $R(x) = 0$

$$R'(t) = \frac{dR}{dt} = f'(t) + \left[f''(t)(x-t) - f'(t) \right] + \left[\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2 - f''(t)(x-t) \right] + \ldots$$

$$\ldots + \left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \right] \underset{\text{teleszkóp összeg}}{=}$$

$$\Rightarrow \quad R'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

$$h(t) := (x-t)^{n+1} \xRightarrow[\text{középértéktétel}]{\text{Cauchy-féle}} \exists\, \xi \in (x_0, x):$$

$h(x) = 0$

$$\frac{R(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{\overset{0}{R(x)} - R(x_0)}{\underset{0}{h(x)} - h(x_0)} = \frac{R'(\xi)}{h'(\xi)} = \frac{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{-(n+1)(x-\xi)^n} =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

13)

$\Rightarrow$

$$R(x_0) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

!

TÉTEL Ha f akárhányszor diff.ható az I intervallumban és

$$\exists\ K : |f^{(n)}(x)| \leq K \quad \forall\ x \in I, n \in \mathbb{N}^+$$

$$\Rightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Biz.

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right| \leq \frac{K}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

és $\lim_{n\to\infty} \frac{|x-x_0|^n}{n!} = 0$

!

Példa Becsüljük meg $\sqrt[3]{29}$-et 10^{-3} pontossággal!

$$\sqrt[3]{29} = \sqrt[3]{27+2} = 3\left(1+\frac{2}{27}\right)^{1/3}$$

$f(x) := (1+x)^{\alpha}$ Írjuk fel az $x_0=0$-hoz tartozó n-ed fokú Taylor-polinomját!

$f(0) = 1$

$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \rightsquigarrow f'(0) = \alpha$

$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \rightsquigarrow f''(0) = \alpha(\alpha-1)$

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} \rightsquigarrow f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$

$$T_n(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

Megj. láttuk: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^+$

$$\boxed{\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}}$$

Ezzel:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k$$

15/

Taylor-formula ⇝

$$(1+x)^\alpha = T_n(x) + R_n(x) \quad , \text{ahol}$$

$$R_n(x) = \binom{\alpha}{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1} x^{n+1} \quad , \text{ahol}$$

vagy $0<\xi<x$ vagy $x<\xi<0$

$$\sqrt[3]{25} = 3\left(1+\frac{2}{27}\right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha = \frac{1}{3} \\ x = \frac{2}{27} \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt[3]{25} = 3\left(1+\frac{2}{81}-\frac{4}{81^2}+\dots+R_n\left(\frac{2}{27}\right)\right)$$

$$3\left|R_1\left(\tfrac{2}{27}\right)\right| < 3\cdot 2\cdot \frac{2}{81^2} < 0{,}002$$

$$3\left|R_2\left(\tfrac{2}{27}\right)\right| < \frac{3\cdot2\cdot2\cdot2\cdot5}{81^3} < 0{,}0003$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[3]{25} \approx 3\left(1+\frac{2}{81}-\frac{4}{81^2}\right) \approx 3{,}072$$

!

1/

Differenciálható függvények vizsgálata

TÉTEL: $f \in C[a,b]$, diffható (a,b)-ben

i) $f \nearrow$ $(f \searrow)$ $[a,b]$-ben $\Longleftrightarrow$ $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ $\forall x \in (a,b)$

ii) ugyanez szigorúan $\Longleftrightarrow$ –||– és $\nexists$ $[a,b]$-nek olyan részintervalluma, ahol $f' = 0$ azonosan.

Biz. • t/h $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a,b)$

$\Downarrow$ Lagrange

$\forall\ a \leq x_1 < x_2 \leq b$ $\exists\ c \in (x_1, x_2)$:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(c) \geq 0 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$$

$f \nearrow$

• ha $f \nearrow$ $[a,b]$-ben $\implies$ $\forall x \in (a,b)$-ben lokálisan növő

$\Downarrow$

$f'(x) \geq 0$

☺!

Pl. $f(x) = x e^{-x}$

$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = \underbrace{e^{-x}}_{>0}(1-x)$

$\implies$ • $f'(x) > 0 \iff x < 1 \implies (-\infty, 1)$ $f \nearrow$

• $f'(x) < 0 \iff x > 1 \implies (1, \infty)$ $f \searrow$

$\Downarrow$

$x = 1$-ben f-nek abszolút maximuma van

TÉTEL: Legyen f diff.ható x_0 pont környezetében.
Ha $f'(x_0)=0$ és f' lokálisan növekedő (lok. csökkenő) az x_0 helyen (f' x_0-ban előjelet vált), akkor az x_0 f-nek lokális minimumhelye (ill. maximumhelye). ✱

Biz: t.f.h. f' lokálisan nő x_0-ban

$$\Downarrow$$

$\exists\, \delta>0$: $f'(x)\le 0$ ha $x_0-\delta<x<x_0$

és $f'(x)\ge 0$, ha $x_0<x<x_0+\delta$.

$$\Downarrow$$

f monoton csökkenő $[x_0-\delta, x_0]$-ban

f monoton nő $[x_0, x_0+\delta]$-ban.

$\Rightarrow$ $x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow f(x)\ge f(x_0)$

$x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow f(x)\ge f(x_0)$ $\Rightarrow$ f-nek lok. minimuma van x_0-ban.

TÉTEL: Legyen f kétszer diff.ható x_0-ban. Ha $f'(x_0)=0$ és $f''(x_0)>0 \Rightarrow f$-nek x_0-ban szigorú lok. minimuma van.
Ha $f'(x_0)=0$ és $f''(x_0)<0 \Rightarrow f$-nek x_0-ban szig. lok. maximuma van.

Biz: T.f.h. $f''(x_0)>0 \Rightarrow f'$ szig. lok. nő x_0-ban $\overset{\text{előző tétel}}{\Longrightarrow}$ f-nek lok. minimuma

hasonlóan $f''(x_0)<0$

o!

2/ :

<u>Megj</u> Ha $f'(x_0)=0$ és $f''(x_0)=0$ $\Rightarrow$ nem tudunk mit mondani az első 2 deriváltból

pl $f(x)=x^3, x^4, -x^4$

$x_0=0$

$\Downarrow$

<u>TÉTEL</u>: i) Legyen az f fv $2k$-szor deriválható x_0-ban, $k\geq 1$.

Ha $f'(x_0)=\ldots=f^{(2k-1)}(x_0)=0$ és $f^{(2k)}(x_0)>0$

$\Rightarrow$ f-nek x_0-ban szig. lokális minimuma van.

Ha $f'(x_0)=\ldots=f^{(2k-1)}(x_0)=0$ és $f^{(2k)}(x_0)<0$

$\Rightarrow$ f-nek x_0-ban szig lok Maximuma van.

ii) Legyen f $2k+1$-szer diffható x_0-ban, $k\geq 1$.

Ha $f'(x_0)=\ldots=f^{(2k)}(x_0)=0$ és $f^{(2k+1)}(x_0)\neq 0$

$\Rightarrow$ f szigorúan monoton x_0 egy környezetében, tehát $\nexists$ x_0-ban lok. sz.!

<u>Biz.</u> i) <u>teljes indukció</u>

- $k=1$ $\Rightarrow$ láttuk
- Tfh igaz $k-1$-re!

$g:=f''$

$\hookrightarrow$ $g'(x_0)=\ldots=g^{(2k-3)}(x_0)=0$ és $g^{(2k-2)}(x_0)>0$

indukciós feltevés $\Rightarrow$ $g=f''$-nek szig. lok. minimuma van x_0-ban

$f''(x_0)=0$ $\Rightarrow$ $\exists$ $\delta>0$ hogy $f''(x)>0$, $\forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)\setminus\{x_0\}$

$\Longrightarrow$ f' szig $\nearrow$ $(x_0-\delta, x_0+\delta)$-ban $\Longrightarrow$ f'-nek lok. min. x_0-ban

$\Downarrow$ előző állítás (*)

f-nek lokális ~~maximuma~~ minimuma.

második bizonyítás:

ii) t/h $f'(x_0)=\ldots=f^{(2k)}(x_0)=0$, $f^{(2k+1)}(x_0)\neq 0$

$\Downarrow$ előző i)

f'-nek x_0 szigorú lokális szélsőértékhelye

$f'(x_0)=0 \Longrightarrow f'(x)>0 \quad \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$

vagy $f'(x)<0 \quad \forall x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$

$\Downarrow$

f szigorúan monoton $(x_0-\delta, x_0+\delta)$-ban

$\Downarrow$

x_0-ban $\nexists$ lok. szé.

Példa: $f(x)=x^n$ n-szer diffható

$f^{(k)}(x)=n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k}$ $\quad k=1,2,\ldots,n-1$

$f^{(n)}(x)=n!$

$x_0=0 \Rightarrow f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$

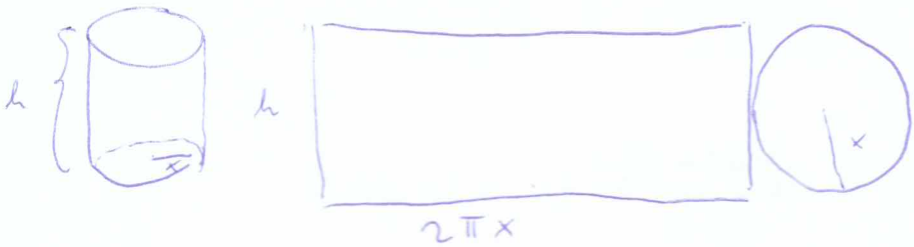
$f^{(n)}(0)=n!>0$

$\Rightarrow$ $x_0=0$-ban $f(x)$-nek minimuma van, ha n páros

—||— $\nexists$ szélsőértéke, ha n páratlan

3/.

Példa: Készítsünk felül nyitott 1 literes henger alakú edényt minimális anyagfelhasználással!



$$A = 2x\pi h + x^2\pi$$

$$x^2\pi h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{x^2\pi}$$

$$f(x) = A = \frac{2}{x} + x^2\pi \longrightarrow MIN, \text{ ha } x > 0$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + 2x\pi = 0 \Rightarrow x_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$$

$$f''(x) = \frac{4}{x^3} + 2\pi \Rightarrow f''(x_0) > 0$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}, \; h = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \qquad f_{min} = f\left(\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}\right) = 3\sqrt[3]{\pi} \quad !$$

TÉTEL Legyen f diffható az I intervallumon. Ekkor f akkor és csak akkor konvex (konkáv) I-ben, ha f' monoton növő (csökkenő) I-ben.

Biz: tfh $f' \nearrow$ I-ben, $a, b \in I$, $a < x < b$

$\xRightarrow{\text{Lagrange}}$ $\exists$ $u \in (a,x)$ és $v \in (x,b)$

$$f'(u) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{és} \quad f'(v) = \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

$u < v$ és $f' \nearrow \Rightarrow \quad f'(u) \le f'(v)$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \le \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

$$\hookrightarrow \quad f(x) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

$$\Downarrow$$

f konvex ✓

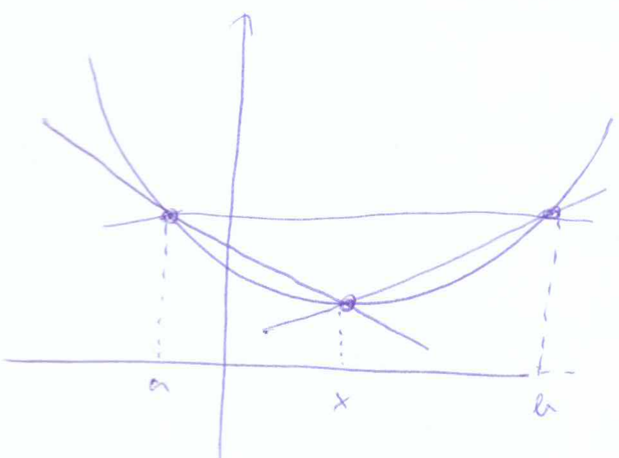
Tfh f konvex I-ben, $a, b \in I$, $a < b$

$\Downarrow$

Volt: $\quad F(x) := \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \nearrow \quad I \setminus \{a\}$

$$\hookrightarrow \quad F(x) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \forall\, x < b,\ x \ne a$$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} F(x) \quad \Rightarrow \quad f'(a) \le \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (*)$$



Hasonlóan: $\quad G(x) := \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}$

$$\nearrow \quad I \setminus \{b\}\text{-n}$$

$$\Rightarrow \quad G(x) \ge \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \forall\, x > a,\ x \ne b$$

$$\Downarrow$$

$$f'(b) = \lim_{x \to b} G(x)$$

$$\Rightarrow \quad f'(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (**)$$

$(*, **) \Rightarrow \quad f'(a) \le f'(b) \quad \forall\, a < b,\ a, b \in I \quad \Rightarrow f'(x) \nearrow$

[illegible]

⊙!

4).

Megj: $a < b \Rightarrow f(b) \geq f'(a)(b-a) + f(a)$

áll $f(a) \geq f'(b)(a-b) + f(b)$

$\Rightarrow \forall a, x \in I$: $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$

$\Rightarrow$ f grafikonja egy tetszőleges pontjába húzott érintője felett halad

megfordítás is igaz:

TÉTEL: Legyen f diff.ható I intervallumon. Az f fv akkor és csak akkor konvex (konkáv) I-ben, ha $\forall a \in I$ f grafikonja az a pontba húzott érintő felett (alatt) halad.

TÉTEL Ha f kétszer diff.ható I-ben, f akkor és csak akkor konvex (konkáv) I-ben, ha $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) $\forall x \in I$.

(Biz: fenti következménye)

Def: x_0 pont f fv inflexiós pontja, ha f-nek $\exists$ deriváltja x_0-ban és $\exists$ olyan $\delta > 0$, hogy f konvex $(a-\delta, a]$-ban és konkáv $[a, a+\delta)$-ban vagy fordítva.

Pl: $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ $x=0$-ban.

TÉTEL: Ha f kétszer diffható x_0-ban, és f-nek x_0-ban inflexiós pontja van $\Rightarrow f''(x_0)=0$.

Bz: Ha f konvex $(x_0-\delta, x_0]$-ban $\Rightarrow f'$ monoton $\nearrow$.
f konkáv $[x_0, x_0+\delta)$-ban $\Rightarrow f'$ $\searrow$

$\Rightarrow f'$-nek x_0-ban lokális maximuma van és $f''(x_0)=0$.

fordítva ugyanígy ...

o!

Ömegnue:

TÉTEL: Legyen f kétszer diffható x_0 ~~-ban~~ egy környezetében.
Annak, hogy f-nek x_0-ban inflexiós pontja legyen
i) szükséges feltétele, hogy $f''(x_0)=0$
ii) elégséges feltétele, hogy f'' előjelet váltva legyen 0 x_0-ban.

Köv: Ha f 3-szor diffható, f-nek x_0-ban inflexiós pontja van
$\Leftrightarrow f''(x_0)=0, \ f'''(x_0)\neq 0$.

TÉTEL: i) Legyen f $2k+1$-szer diffható x_0-ban, $k\geq 1$
$f''(x_0)=\ldots=f^{(2k)}(x_0)=0$ és $f^{(2k+1)}(x_0)\neq 0 \Rightarrow f$-nek x_0-ban inflexiós pontja

ii) $f''(x_0)=\ldots=f^{(2k-1)}(x_0)=0$ és $f^{(2k)}(x_0)\neq 0$
$\Rightarrow f$ az x_0 környékén ugyanúgy konvex v. konkáv, de
$\nexists$ infl. pontja.

5).

Teljes függvényvizsgálat

i) $D(f)$

ii) paritás, periodikusság

iii) tengelymetszetek, zérushelyek

iV) határértékek az értelmezési tartományt alkotó intervallumok végpontjaiban

V) $f'(x) \rightarrow$ monotonitás, szélsőértékek

Vi) $f''(x) \rightarrow$ konvexitás, inflexiós pontok

} kiolvasható

Vii) ábrázolás

---

(1) $\boxed{f(x) = \frac{x}{x^3+1}}$

i) $D_f = (-\infty,-1) \cup (-1,\infty)$

ii) nem ps/ptlan, nem periodikus

iii) $f(0)=0$ és $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

iV)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^3+1} = 0^+ \quad , \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^3+1} = 0+$$

$$\lim_{x\to-1-} \frac{x}{x^3+1} = \lim_{x\to-1-} \frac{x}{(x+1)\underbrace{(x^2-x+1)}_{\downarrow\, 1}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1+} \frac{x}{x^3+1} = -\infty \quad \Rightarrow \quad x=-1\text{-ben}$$

másodfajú szakadás

v)

$$f'(x) = \frac{1-2x^3}{(x^3+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

	$x<-1$	$-1<x<\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$x>\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
f'	$+$	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$\nearrow$	max $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$	$\searrow$

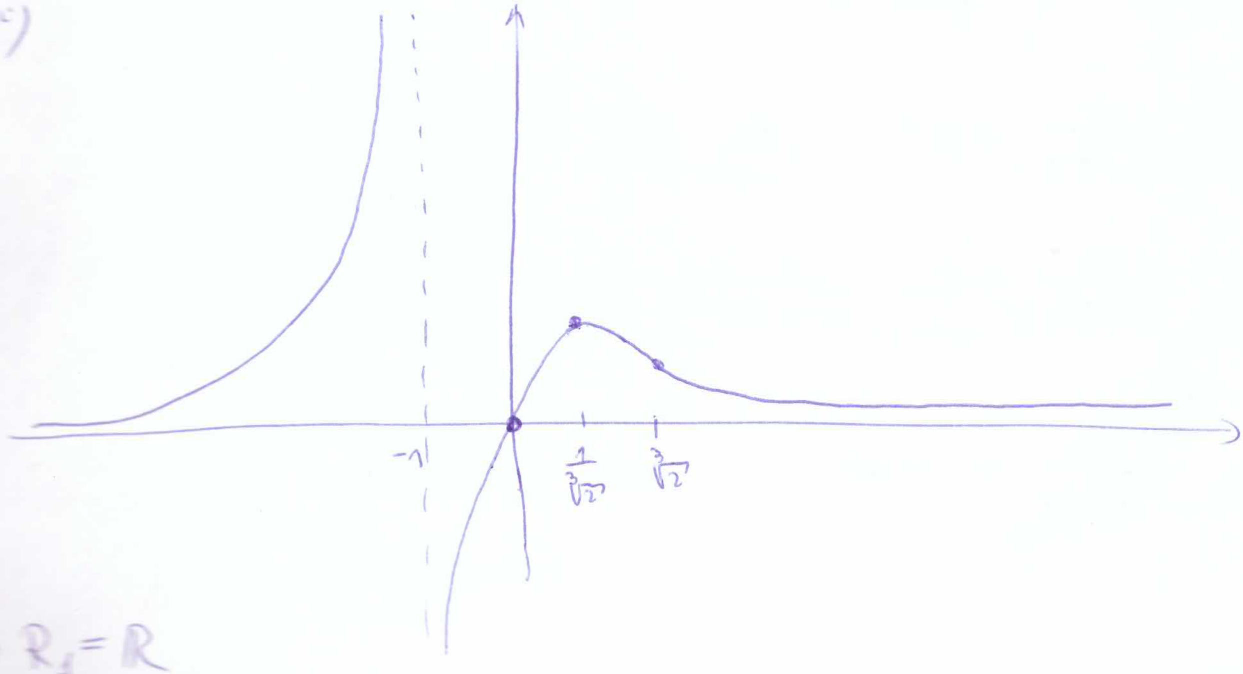
vi)

$$f''(x) = \frac{6x^2(x^3-2)}{(x^3+1)^3}$$

$$f''(x) = 0 \implies x_1 = 0$$
$$x_2 = \sqrt[3]{2}$$

	$x<-1$	$-1<x<0$	$x=0$	$0<x<\sqrt[3]{2}$	$x=\sqrt[3]{2}$	$x>\sqrt[3]{2}$
f''	$+$	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	$\cap$		$\cap$	infl. $\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$	$\cup$

vii)



$\Rightarrow R_f = \mathbb{R}$

6/.

(2) $\boxed{f(x) = e^{-x^2}}$

i) $D(f) = \mathbb{R}$

ii) $f(x) = e^{-x^2} = e^{-(-x)^2} = f(-x) \Rightarrow$ ps

iii) $f(0) = 1$ és $f(x) = 0 \Rightarrow \nexists$ mo.

iv) paritás, elég

$\Rightarrow$ $f(0) = 1$

$\lim_{x \to \infty} e^{-x^2} = 0+$

v) $f'(x) = -2x\, e^{-x^2}$

$f'(x) = 0 \iff x = 0$

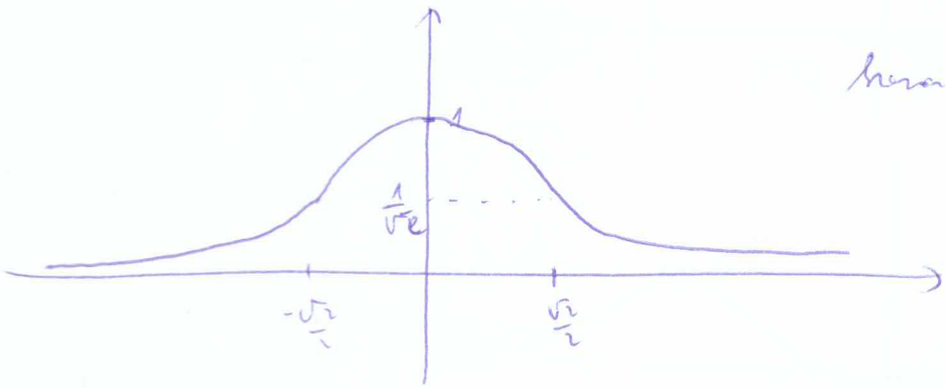
	$x=0$	$x>0$
f'	0	$-$
f	max 1	$\searrow$

vi) $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$

$f''(x) = 0 \iff x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

	$x=0$	$0<x<\sqrt{2}/2$	$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$x>\frac{\sqrt{2}}{2}$
f''	$-$	$-$	0	$+$
f		$\cap$	infl. $1/\sqrt{e}$	$\cup$

vii)



haranggörbe (Gauss-görbe)

(3.)

$$\boxed{f(x) = x^2 e^{-x}}$$

i) $D(f) = \mathbb{R}$

ii) nem ps/ptlan, nem periodikus

iii) $f(0) = 0$ és $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

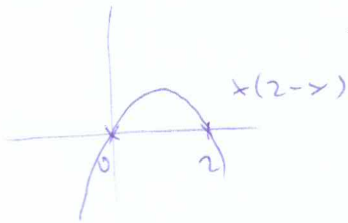
iv)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad (\text{l'Hospital})$$

$$\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0+$$

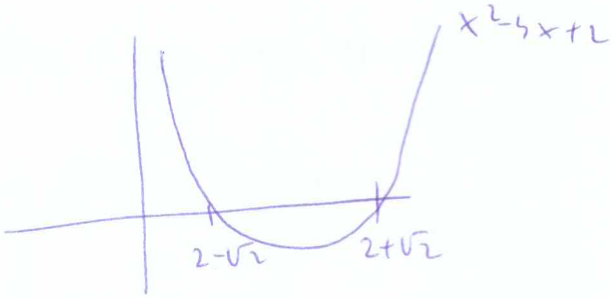
v)

$$f'(x) = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = x(2-x)\underbrace{e^{-x}}_{>0}$$

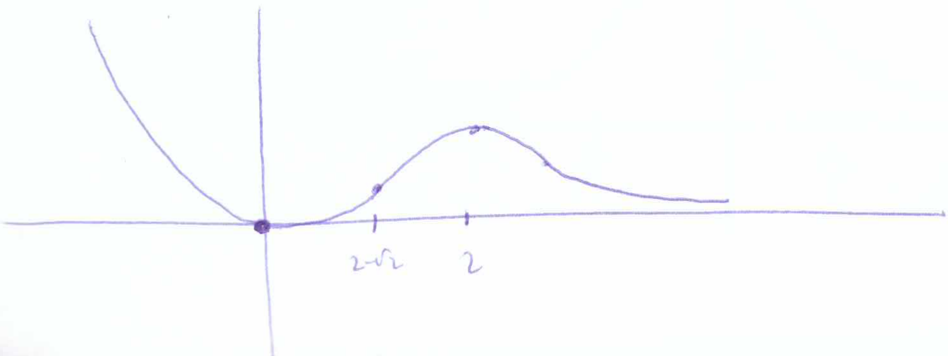


	$x<0$	$x=0$	$0<x<2$	$x=2$	$x>2$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	MIN 0	$\nearrow$	MAX $4e^{-2}$	$\searrow$

vi) $f''(x) = (x^2 - 4x + 2) e^{-x}$



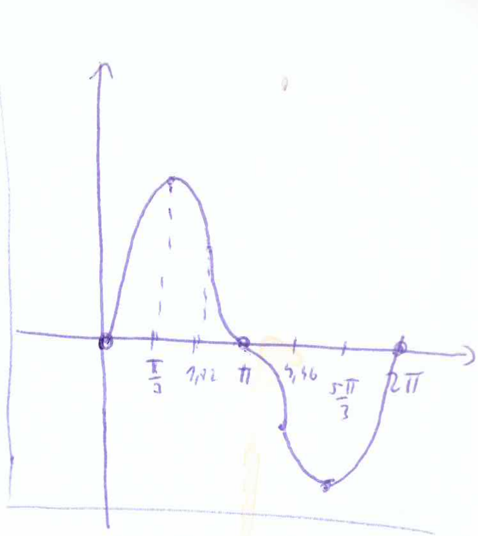
	$x<2-\sqrt{2}$	$x=2-\sqrt{2}$	$2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$	$x=2+\sqrt{2}$	$x>2+\sqrt{2}$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	infl	$\frown$	infl	$\smile$



$R(f) = [0, \infty)$

7) :

(5) $\boxed{f(x) = 2\sin x + \sin 2x}$



i) $D_f = \mathbb{R}$

ii) f ptlan + periodikus 2π-ként

↳ elég $[0, 2\pi]$-n nézni

iii) $f(0) = 0$, $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$

iv) $f(0) = f(2\pi) = 0$

v) $f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x = 2(\cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x))$

$\Downarrow$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = \pi/3$

$x_2 = \pi$

$x_3 = \frac{5\pi}{3}$

x	0	$(0, \pi/3)$	$\pi/3$	$(\pi/3, \pi)$	π	$(\pi, 5\pi/3)$	$5\pi/3$	$(\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$
f'	+	+	0	−	0	−	0	+
f		↗	MAX $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘		↘	MIN $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗

vi) $f''(x) = -2\sin x - 4\sin 2x$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, $x_2 = 1{,}82$, $x_3 = \pi$, $x_4 = 4{,}46$

	0	$(0, 1.82)$	1.82	$(1.82, \pi)$	π	$(\pi, 4.46)$	4.46	$(4.46, 2\pi]$
f''	0	−	0	+	0	−	0	+
f	infl	∩	infl $\frac{3\sqrt{15}}{8}$	∪	infl 0	∩	infl $-\frac{3\sqrt{15}}{8}$	∪