1/

Elemi függvények és inverzeik

I. Exponenciális és logaritmus függvények

Eml.

$$\exp(x) \equiv e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

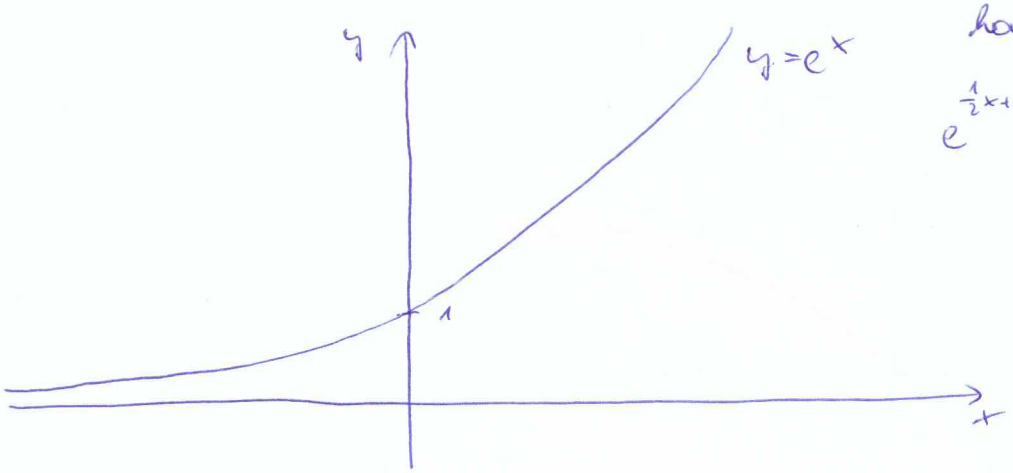
- e^x folytonos $\forall x \in \mathbb{R}$
- $e^x > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
- $e^x \geq 1$, ha $x \geq 0$ és $0 < e^x < 1$, ha $x < 0$
- $\lim\limits_{x\to\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$$\left(\lim_{x\to\infty} e^x \underset{\substack{\uparrow \\ e^x \text{ folytonos}}}{=} \lim_{n\to\infty} e^n \underset{\substack{\uparrow \\ e>1}}{=} +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \right)$$

- $e^{x+y} = e^x \cdot e^y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $e^x \nearrow$ mig

$$\left(\text{ha } x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \rightsquigarrow e^{x_2} = e^{x_2 - x_1 + x_1} = \underbrace{e^{x_2-x_1}}_{>1} \cdot e^{x_1} > e^{x_1} \right)$$

- Később igazoljuk, hogy $f(x) = e^x$ konvex is, de az un. középpontos konvexitás látható:



$$e^{\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y} = \sqrt{e^x e^y} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{AM-GM}}}{\leq} \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^y$$

+ Jensen-egy.

2)

$\Rightarrow$ az exponenciális függvények $\exists$ inverze $(0,+\infty)$-en

Def: A valós $f(x)=e^x$ függvény inverzfüggvényét logaritmus fv-nek hívjuk. Jel:

$$f^{-1}(x) = \ln x \equiv \log x$$

logaritmus naturalis

TÉTEL: (i) $\ln : (0,+\infty) \to (-\infty,\infty)$

szigorúan monoton nő, folytonos $\mathbb{R}$-en

(ii) $\ln 1 = 0$, $\lim\limits_{x\to 0+0} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = +\infty$

(iii) $e^{\ln x} = x$, ha $x>0$ és $\ln e^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

(iv) $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 \qquad x_1, x_2 > 0$

Biz (i) eddigi tételekből

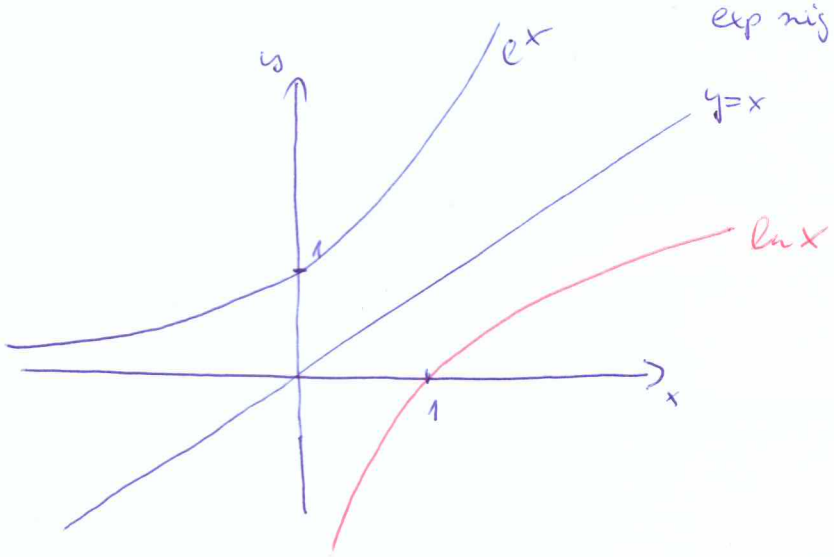
(ii), (iii) ln definíciójából

(iv) $\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 \underset{\text{exp szigorúan}}{\Longleftrightarrow} \exp(\ln(x_1 x_2)) = \exp(\ln x_1 + \ln x_2)$

$\overset{x_1 \cdot x_2}{\parallel}$

$\underset{\text{exp tul.}}{=} e^{\ln x_1} \cdot e^{\ln x_2} = x_1 \cdot x_2$

amennyiben!



3) Eml. hatványok értelmezése

- $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-szer}}$ $\quad n \in \mathbb{N}^+$
- $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ $\quad n \in \mathbb{N}^+$, $a^0 := 1$

$\Big\}$ a^n értelmes, ha $n \in \mathbb{Z}$ $(a \neq 0)$

- $a^{n/m} := \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$, $a^{-n/m} := \frac{1}{a^{n/m}}$ $\quad m \in \mathbb{N}^+, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ eddig értelmeztük a^q-t $\forall q \in \mathbb{Q}$ esetén $(a \neq 0)$

Def. Legyen $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. Az a szám b kitevőjű hatványát

az $\boxed{a^b := \exp(b \cdot \ln a)}$ képlettel értelmezzük.

Megj.
- $a^0 = e^{0 \cdot \ln a} = e^0 = 1$ ✓
- $a^1 = e^{1 \cdot \ln a} = e^{\ln a} = a$ ✓
- $a^n = e^{n \ln a} = (e^{\ln a})^n = a^n$ ✓
- $a^{n/m} = e^{n/m \ln a} = (e^{\ln a})^{n/m} = a^{n/m}$ ✓
- ha $a = e$ $\rightsquigarrow$ $e^b = e^{b \cdot \ln e} = e^{b \cdot \ln e} = e^b$ ✓

$\Rightarrow$ konzisztens az eddigiekkel.

Az exp fv tulajdonságait könnyen adódik:

4)

<u>TÉTEL:</u> $a, a_1, a_2 > 0$, $b, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ esetén

(i) $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $1^b = 1$

(ii) $a^{b_1} a^{b_2} = a^{b_1+b_2}$, $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$

(iii) $(a^{b_1})^{b_2} = a^{b_1 \cdot b_2} = (a^{b_2})^{b_1}$

(iV) $(a_1 \cdot a_2)^b = a_1^b \cdot a_2^b$, $\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^a = \frac{a_1^b}{a_2^b}$

<u>Biz.</u> (i) látható

(ii) $a^{b_1} a^{b_2} = \exp(b_1 \ln a) \exp(b_2 \ln a) = \exp((b_1+b_2)\ln a) =$

$= a^{b_1+b_2}$ ✓

$a^b \cdot a^{-b} = a^0 = 1$ ✓

(iii)

$c := a^{b_1} = \exp(b_1 \ln a)$

$\hookrightarrow \ln c = \ln(\exp(b_1 \ln a)) = b_1 \cdot \ln a$

$\Rightarrow (a^{b_1})^{b_2} = c^{b_2} = \exp(b_2 \ln c) = \exp(b_2 \cdot b_1 \cdot \ln a) = a^{b_1 \cdot b_2}$ ✓

(iV)

$(a_1 \cdot a_2)^b = \exp(b \ln(a_1 a_2)) = \exp(b(\ln a_1 + \ln a_2)) =$

$= \exp(b \ln a_1) \cdot \exp(b \cdot \ln a_2) = a_1^b \cdot a_2^b$!

5)

Def: $\alpha \in \mathbb{R}$, a $h_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ $(x>0)$

szükséssel értelmezett $h_\alpha : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$

folytonos az α kitevőjű hatványfüggvénynek hívjuk

mivel

$$h_\alpha(x) = x^\alpha = \exp(\alpha \ln x) \qquad x>0$$

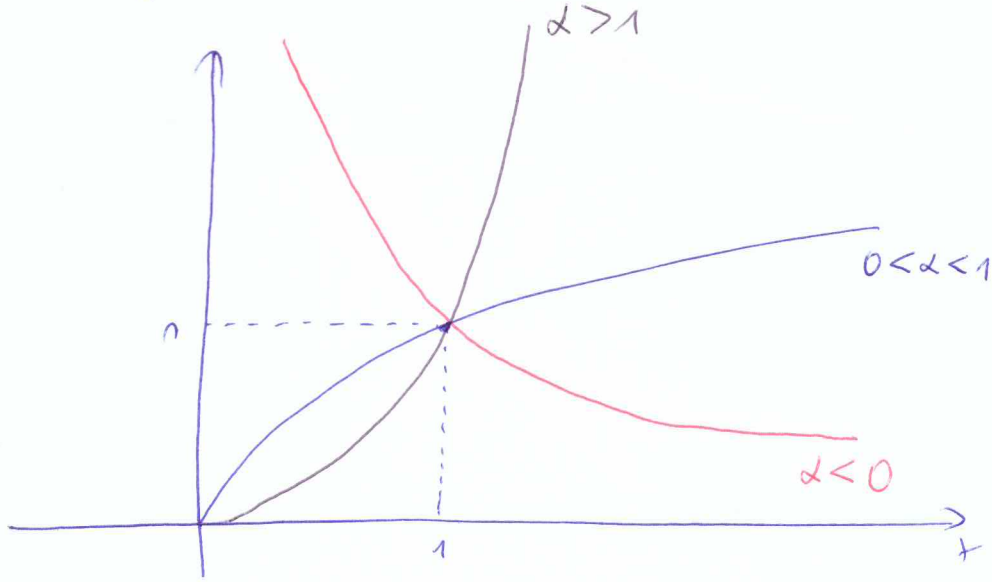
↳ • h_α folytonos, szigorúan monoton növekvő, ha $\alpha \neq 0$

$h_\alpha \nearrow$, ha $\alpha>0$ $\qquad$ $h_\alpha \searrow$, ha $\alpha<0$

• $h_0(x) = 1$

• $\lim\limits_{x\to 0+0} x^\alpha = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$, ha $\alpha>0$

• $\lim\limits_{x\to 0+0} x^\alpha = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha = 0$, ha $\alpha<0$



6)

<u>Def.</u> Legyen $a>0$. Az

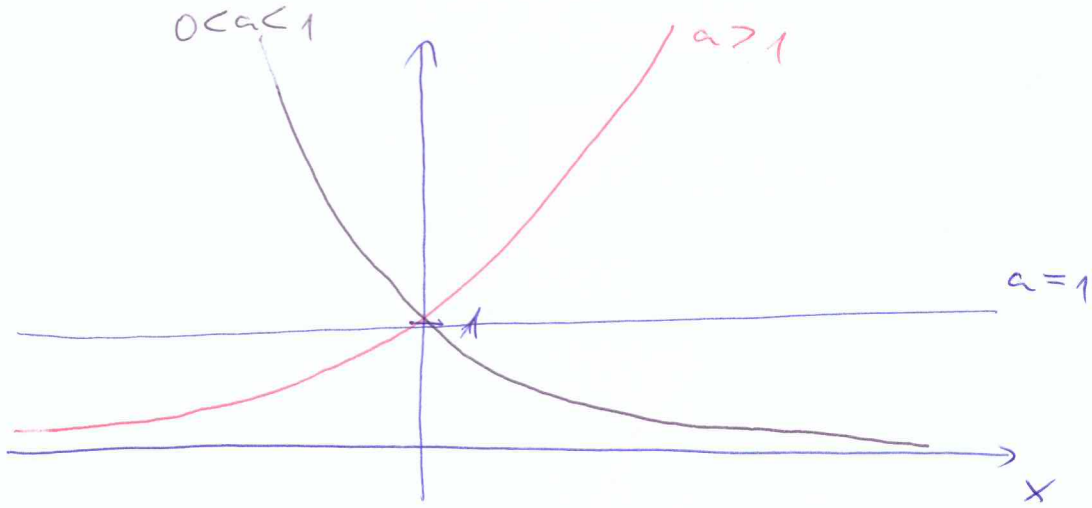
$$\exp_a(x) := a^x := \exp(x \ln a) \qquad x \in \mathbb{R}$$

utasítással értelmezett $\exp_a : (-\infty, \infty) \to (0, +\infty)$ függvényt

<u>a alapú exponenciális függvénynek</u> hívjuk.

<u>Köv.</u>

- $\exp_a$ folytonos
- $\exp_a \nearrow$ szig., ha $a > 1$
- $\exp_a \searrow$ szig., ha $0 < a < 1$
- $\exp_e = \exp$, $\exp_a(0) = a^0 = 1$, $\exp_a(1) = a^1 = a$ $(a>0)$
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $\quad a>0,\ x,y \in \mathbb{R}$



7)

Ka $a>0$, $a\neq 1$ $\Rightarrow$ $\exp_a$ rigorózní monotónní $\Rightarrow$ $\exists$ inverze

<u>Def:</u> Nechť $a>0$, $a\neq 1$. Ke $\exp_a$ existuje inverzní a zápis logaritmus přirozený neznámé. Jel: $\log_a$

$\hookrightarrow$ $\log_a : (0,\infty) \to (-\infty,\infty)$ rigorózní monotónní, přitom

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}} \quad (x>0)$$

Lze $\exp_a$ rigorózní monotónní, je nutné

$$\exp_a(\log_a(x)) = x = \exp_a\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right) \underset{\text{def}}{=}$$

$$= \exp\left(\ln a \frac{\ln x}{\ln a}\right) = \exp(\ln x) = x \quad \text{(monotónní)} \checkmark$$

Tvrzení ta logaritmických ech zápisu:

i) $\log_a : (0,+\infty) \to (-\infty,\infty)$ přitom
- rig $\nearrow$, ka $a>1$
- rig $\searrow$, ka $0<a<1$

(ii) $\log_e = \ln$, $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$

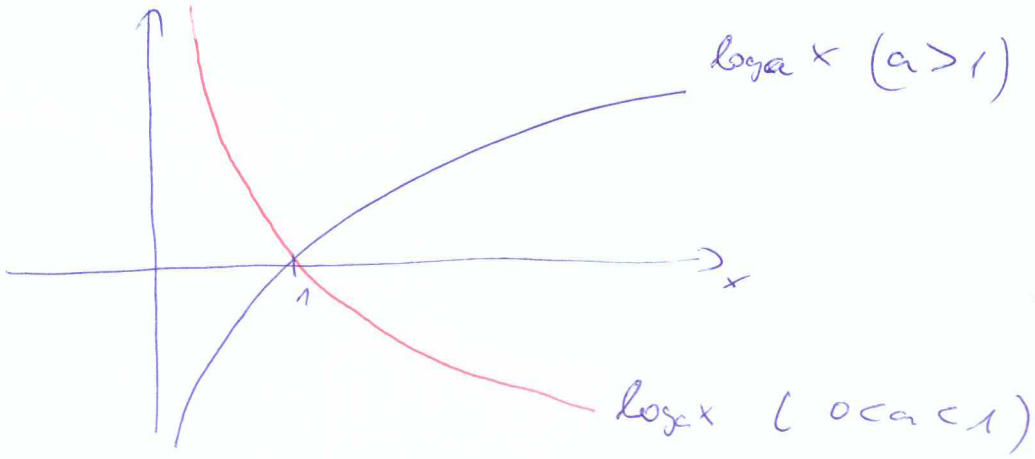
(iii) $a^{\log_a x} = x$ $(x>0)$, $\log_a a^x = x$ $\forall x\in\mathbb{R}$

(iv) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ $(x,y>0)$

(v) $\log_a(x^y) = y\log_a x$ $x>0$, $y\in\mathbb{R}$, $a>0$, $a\neq 1$

(vi) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ $a,b,x>0$, $a\neq 1$, $b\neq 1$

8)



1/

Differenciálszámítás

Def. Legyen f értelmezve x_0 környezetében. f <u>diffható</u> x_0-ban, ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad \exists \text{ és véges.}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x_0) \equiv \frac{df}{dx}(x_0) \qquad \text{derivált, differenciálhányados}$$

Def. Legyen f diffható x_0-ban. A graph f hozzáérő egyenesen $(x_0, f(x_0))$ pontbeli <u>érintőjén</u> az $\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}$ egyenest értjük.

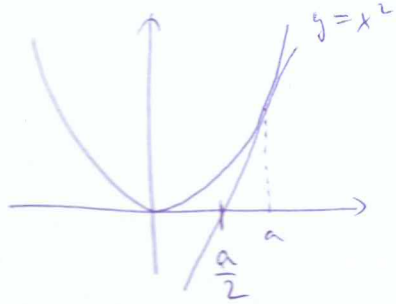
$$\Downarrow$$

$f'(x_0)$: x_0-beli érintő meredeksége

Pl. ① $f(x)=c \rightsquigarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{c-c}{x-x_0} = 0 \rightsquigarrow f'(x_0)=0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

② $f(x)=x \rightsquigarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{x-x_0}{x-x_0} = 1 \rightsquigarrow f'(x_0)=1 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

③ $f(x)=x^2 \rightsquigarrow f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} (x+x_0) = 2x_0$



(a, a^2)-beli érintő : $y = a^2 + 2a(x-a) = 2ax - a^2 =$
$= a(2x-a)$

TÉTEL: Ha f diffható x_0-ban $\Rightarrow$ f folytonos x_0-ban

Biz.:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right]=f'(x_0)\cdot 0=0$$

$\hookrightarrow$ f folytonos x_0-ban

Megj.: folytonosság szükséges, de nem elégséges feltétel:

pl.: $f(x)=|x|=\begin{cases} x, & \text{ha } x\geq 0\\ -x, & \text{ha } x<0\end{cases}$

$x_0=0$-ban: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\begin{cases}1, & \text{ha } x>0\\ -1, & \text{ha } x<0\end{cases}$

$\hookrightarrow$ $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$ és $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-1$

$\hookrightarrow$ f nem diffható 0-ban.

Megj.: ① $\exists$ fv, mely mindenütt folytonos, de sehol sem diffható

pl.: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 4x+\dots+\frac{1}{2^n}\sin 2^n x\right]$

② $\exists$ fv, mely x_0-ban diffható, de egyetlen más pontban nem is folytonos

Pl.:

2/

Př 1 $\quad f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ -x^2, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

$x_0 = 0$ – kde diff.ovatelná:

$$\left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \left| \frac{x^2}{x} \right| = |x| \to 0, \text{ ha } x \to 0$$

$\rightsquigarrow f'(0) = 0$, ale bohužel, bod 0-a hlavní není spojitost.

Def: (jednostranné derivace)

$$f'_-(a) = \lim_{x \to a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{levostranná derivace}$$

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{pravostranná derivace}$$

Obj: f derivovatelná v a-kde $\iff f'_-(a) = f'_+(a) = f'(a)$

- spojitosti nemá souvislost s diff.ovatelností
- konvexita $\Rightarrow$ jednostranné derivovatelnosti:

TÉZE: Ha f konvex (a,b)-ker, tak f zprava i zleva i diff.ovatelná $\forall x_0 \in (a,b)$-ve.

Dk. f konvex $\iff x \mapsto \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \nearrow (a,b) \setminus \{c\}$ -ker

! $d \in (a,c)$ pevné $\rightsquigarrow \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \leq \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad \forall x \in (c,b)$

vyjde $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \nearrow$ + zdola ohraničená (c,b)-m $\Rightarrow$

$\lim_{x \to c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ $\exists$ a vlastní

!

mocnina nyní

Lineáris polinommal való közelítés

TÉTEL f differentiálható a-ban $\iff$ f a-ban lokálisan jól közelíthető lineáris polinommal, azaz $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}$ (x-től independent), hogy

$$f(x) = \underbrace{\alpha(x-a) + f(a)}_{\ell(x)} + \varepsilon(x)\cdot(x-a)$$

ahol $\varepsilon(x) \to 0$, ha $x \to a$.

Ekkor $\alpha = f'(a)$.

Megj. ekkor $f(x) - \ell(x) \to 0$, ha $x \to a$ ($\equiv$ jól közelíthető lineárisan)

Biz. $\Rightarrow$: tfh f differentiálható a-ban,

$$\varepsilon(x) := \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) = \cancel{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

$\hookrightarrow$ $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a)$

és $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$ ✓

$\Leftarrow$: Tfh $f(x) = \alpha(x-a) + f(a) + \varepsilon(x)(x-a)$ és $\varepsilon(x) \to 0$ ha $x \to a$

$\Downarrow$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \alpha + \varepsilon(x) \longrightarrow \alpha, \text{ ha } x \to a$$

$\Downarrow$

f differentiálható a-ban és $f'(a) = \alpha$

!

3) Ez az egyenes a legjobb közelítő egyenes:

TÉTEL: Ha f diff.ható a-ban, akkor ha $c \neq f'(a)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)]}{f(x) - [f(a) + c(x-a)]} = 0$$

Biz.

$$\frac{f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a)]}{f(x) - [f(a) + c(x-a)]} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - c} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{f'(a) - f'(a)}{f'(a) - c} = 0 \quad !$$

$$\Downarrow$$

Alternatív def.

Def. f diff.ható a-ban, ha $\exists$ olyan x-től független α szám, melyre

$$f(x) = f(a) + \alpha(x-a) + \varepsilon(x)(x-a), \text{ ahol}$$

$$\varepsilon(x) \to 0, \text{ ha } x \to a.$$

Def. $a < b$. Azt mondjuk, hogy f diff.ható (a,b)-ben, ha diff.ható $\forall x_0 \in (a,b)$-ben. f diff.ható $[a,b]$-ben, ha f diff.ható (a,b)-ben és balról diff.ható b-ben, jobbról -"- a-ban.

$$\boxed{x \mapsto f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$ derivált fv.

Elemi fgvnek deriváltjai

① $f(x) = x^n$ diffhető $(-\infty, \infty)$-en és $\boxed{(x^n)' = n x^{n-1}}$ $\forall x$

$n \in \mathbb{Z}^+$

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2} a + \dots + x a^{n-2} + a^{n-1}) = n a^{n-1}$$

x^n pfl.

② $\sin x, \cos x$ diffhető $(-\infty, \infty)$-en és

$$\boxed{\begin{aligned} (\sin x)' &= \cos x \\ (\cos x)' &= -\sin x \end{aligned}}$$

- $x \neq a$

$$\frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cdot \cos \frac{x+a}{2}}{x - a} = \underbrace{\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}}_{\xrightarrow{x \to a} 1} \cdot \underbrace{\cos \frac{x+a}{2}}_{\xrightarrow{x \to a} \cos a} \to \cos a$$

- $x \neq a$

$$\frac{\cos x - \cos a}{x - a} = -\frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cdot \sin \frac{x+a}{2}}{x - a} = -\underbrace{\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}}_{\xrightarrow{x \to a} 1} \cdot \underbrace{\sin \frac{x+a}{2}}_{\xrightarrow{x \to a} \sin a} \to -\sin a$$

5)

③ $a>0,\ a\neq 1$ $\log_a x$ deriválható $\forall\, x>0$-ra

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}}$$

<u>Eml.</u> $\lim\limits_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h} = e^{1/x}$

$\hookrightarrow$ $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{1/h} \underset{\text{folyt.}}{=} \log_a e^{1/x} =$

$$= \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$$

<u>Spec.</u> $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Differenciálási szabályok

<u>TÉTEL:</u> f, g deriválható a-ban $\Rightarrow$ $c\cdot f$ $(c\in\mathbb{R})$, $f+g$, $f\cdot g$ deriválható a-ban

(i) $(cf)'(a) = c\cdot f'(a)$

(ii) $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$

(iii) $(f\cdot g)(a) = f'(a)\cdot g(a) + f(a)\cdot g'(a)$

Ha $g(a)\neq 0$ $\rightsquigarrow$ $\frac{1}{g}$ és $\frac{f}{g}$ is deriválható a-ban

(iv) $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\dfrac{g'(a)}{g^2(a)}$

(v) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

Biz: i) $F = cf$ $\qquad x \to a$

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a} = \frac{cf(x)-cf(a)}{x-a} = c\,\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to c\cdot f'(a)$$

ii) $F = f+g$

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \to f'(a)+g'(a)$$

iii) $F = f\cdot g$

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a} = \frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a} = \underbrace{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}_{\downarrow\ f'(a)}\cdot \underbrace{g(x)}_{\downarrow\ \cdot g(a)} + f(a)\underbrace{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}_{\downarrow\ g'(a)}$$

iv) $g(a) \neq 0$

$F := \frac{1}{g}$

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a} = \frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(a)}}{x-a} = \frac{g(a)-g(x)}{g(a)\cdot g(x)}\cdot\frac{1}{x-a} = -\frac{1}{g(x)\cdot g(a)}\,\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{1}{g^2(a)}\cdot g'(a)$$

v) $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)' = f'\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - f\,\frac{g'}{g^2} = \frac{f'g-f\cdot g'}{g^2}$$

Př 1 ① $$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

②

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

5)

TÉTEL (láncszabály – összetett fv deriválása)

Ha g diff.ható a-ban, f diff.ható $g(a)$-ban

$\rightsquigarrow$ $h = f \circ g$ diff.ható a-ban és

$$\boxed{h'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)}$$

megj. $\left.\begin{array}{l} y = g(x) \\ z = f(y) \end{array}\right\} \rightsquigarrow \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx}$

Biz. ∘ f diff.ható $g(a)$-ban

$$\Updownarrow$$

$$f(t) - f(g(a)) = f'(g(a))\,(t - g(a)) + \varepsilon_1(t)\,(t - g(a))$$

$\varepsilon_1(t) \to 0$, ha $t \to g(a)$

∘ g diff.ható a-ban:

$$g(x) - g(a) = g'(a)(x-a) + \varepsilon_2(x)(x-a), \quad \varepsilon_2(x) \to 0, \text{ ha } x \to a$$

$t = g(x)$ helyettesítés:

$$h(x) - h(a) = f(g(x)) - f(g(a)) = f'(g(a))\,[g(x) - g(a)] + \varepsilon_1(g(x))\,[g(x) - g(a)]$$

$$= f'(g(a))\,g'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a),$$

ahol $\varepsilon(x) = f'(g(a))\,\varepsilon_2(x) + \varepsilon_1(g(x))\,(g'(a) + \varepsilon_2(x))$

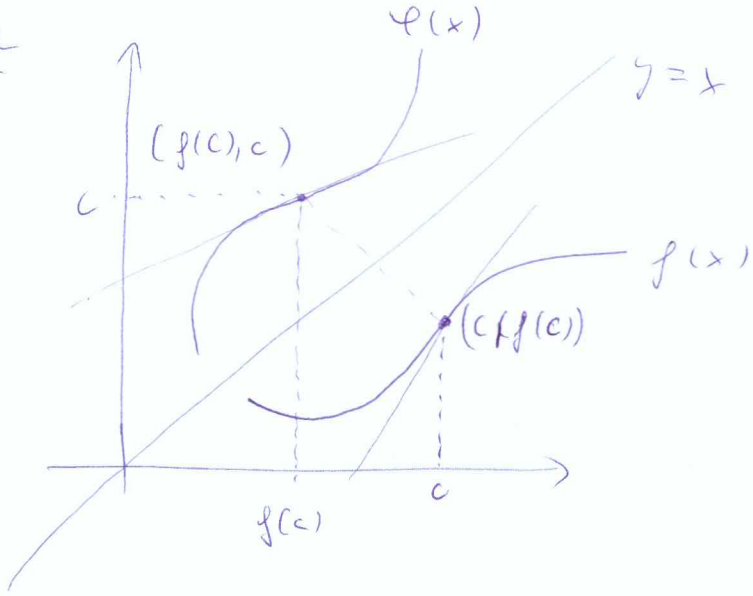
$x \to a$ esetén $g(x) \to g(a) \Rightarrow \varepsilon_1(g(x)) \to 0$
$+ \varepsilon_2(x) \to 0$ $\Big\} \Rightarrow \varepsilon(x) \to 0$ ha $x \to a$. !

TÉTEL (inverz függvény deriváltja)

f szigorúan monoton (a,b)-ben, f diff.ható $c \in (a,b)$-ben.
Ha $f'(c) \neq 0$, akkor f^{-1} is diff.ható $f(c)$-ben és

$$\boxed{(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}}$$

Biz



jel: $\varphi(x) := f^{-1}(x)$

$\Downarrow$

$\varphi(f(c)) = c$

$f(\varphi(y)) = y$

$\forall y \in J = f((a,b))$

$$F(x) := \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

$y \neq f(c)$

$$\frac{\varphi(y)-\varphi(f(c))}{y-f(c)} = \frac{\varphi(y)-c}{f(\varphi(y))-f(c)} = \frac{1}{F(\varphi(y))}$$

φ mig monoton $\Rightarrow y \neq f(c)$ esetén $\varphi(y) \neq c$

$$\varphi'(f(c)) = \lim_{y \to f(c)} \frac{\varphi(y)-\varphi(f(c))}{y-f(c)} = \lim_{y \to c} \frac{1}{F(y)} = \frac{1}{f'(c)}$$

!

6)

Megj. praktikusan:

$$f(f^{-1}(x)) = x \rightsquigarrow f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

$$\Downarrow$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Pl. ① láttuk: $(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$ $\quad a > 0,\ a \neq 1$

$$\log_a a^x = x \rightsquigarrow (\log_a a^x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{a^x} \cdot (a^x)' = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \cdot \ln a}$$

spec $\boxed{(e^x)' = e^x}$

② $\forall \alpha \in \mathbb{R} \rightsquigarrow x^\alpha$ diff.ható $\forall x > 0$-ra és $\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}}$

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

$$\hookrightarrow (x^\alpha)' = e^{\alpha \cdot \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$