1/

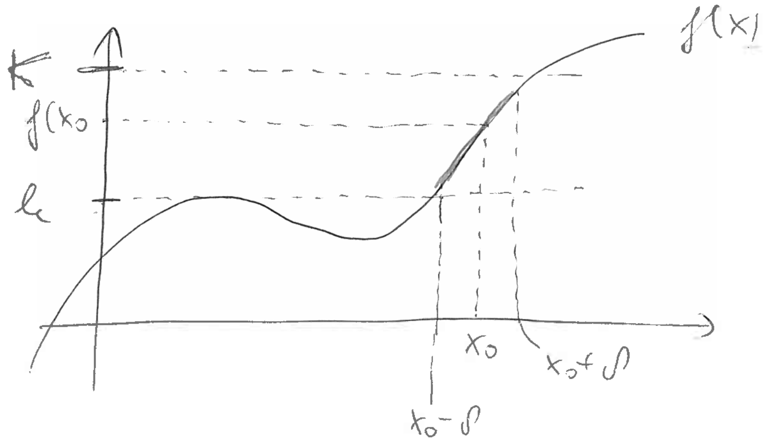
Pontonként folytonos függvények tulajdonsága

TÉTEL (korlátmegtartási-tulajdonság)

$f: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathring{E}$ (E belső pontja).

Ha f folytonos x_0-ban és $k < f(x_0) < K$, akkor

$\exists\ \delta > 0$, hogy $\forall\ x \in (\cancel{x_0} - \delta, \cancel{x_0} + \delta)$ esetén $k < f(x) < K$.



Biz x_0 belső pontja E-nek $\Rightarrow \exists\ \delta_0 > 0$, hogy $(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \subset E$

$\varepsilon := \min(K - f(\cancel{x_0}), f(\cancel{x_0}) - k) > 0 \Rightarrow \exists\ \delta_1$, hogy $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,

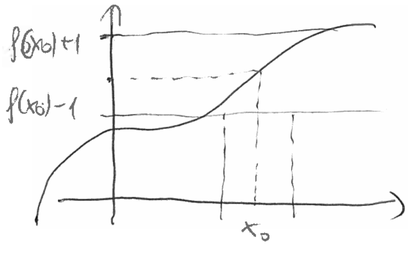
ha $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$. $\Rightarrow \delta := \min(\delta_0, \delta_1)$

jó!

TÉTEL $f: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 E belső pontja. Ha f folytonos x_0-ban, akkor $\exists\ K$ és $\delta > 0$, hogy $\forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ esetén $|f(x)| \leq K$.

(Az f függvény „lokálisan korlátos”)

Biz folytonosság definíciójában $\varepsilon := 1 \Rightarrow$ $K = \max\{|f(\cancel{x_0})+1|, |f(x_0)-1|\}$ jó.



✓

jó!

2)

TÉTEL (rendőrelv folytonos függvényekre)

Legyen x_0 az f és g függvények értelmezési tartományának belső pontja.

Ha f és g folytonos x_0-ban, $f(x_0) = g(x_0)$ és $\exists\ \delta_0 > 0$, hogy

h értelmezve van $\forall\ x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ esetén és ekkor

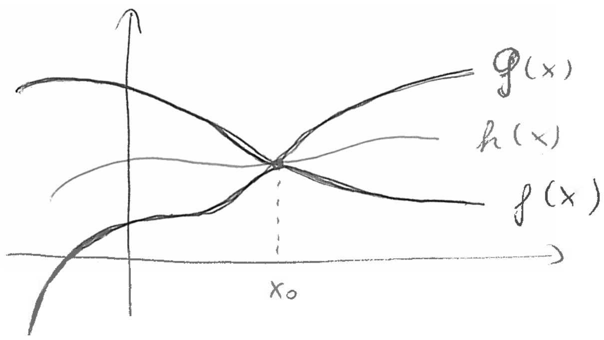
$$f(x) \le h(x) \le g(x)$$

$\Longrightarrow$ h is folytonos x_0-ban.

Biz: ! $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat, melyre $x_n \to x_0$ $\Rightarrow \exists\ N$, hogy $\forall n > N$

esetén $x_0 - \delta_0 < x_n < x_0 + \delta_0 \Longrightarrow f(x_n) \le h(x_n) \le g(x_n)$

$$f(x_n) \to f(x_0), \quad g(x_n) \to g(x_0)$$



de $f(x_0) = g(x_0) \Rightarrow h(x_n) \to f(x_0)$

○!

Műveleti szabályok

Tétel: Ha $f, g : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak $x_0 \in E$-ben, akkor

$f+g$, $\lambda \cdot f$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ tetsz.), $f \cdot g$ is folytonosak x_0-ban. Ha

$g(x) \neq 0$ $(x \in E)$, akkor $\frac{f}{g}$ is folytonos x_0-ban.

Biz: Átviteli elvvel (Heine-féle def-val):

f, g folytonos x_0-ban $\Rightarrow \forall\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$, $x_n \to x_0$ esetén

$$f(x_n) \to f(x_0) \text{ és } g(x_n) \to g(x_0)$$

$\Rightarrow$

- $f(x_n)+g(x_n) \to f(x_0)+g(x_0) = (f+g)(x_0)$ ✓
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda f(x_n) \to \lambda f(x_0) = (\lambda \cdot f)(x_0)$ ✓
- $f(x_n)\cdot g(x_n) \to f(x_0)\cdot g(x_0) = (f\cdot g)(x_0)$
- $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} \to \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\dfrac{f}{g}\right)(x_0)$ ✓

$\circ$!

Példa

① $f(x)=x^n$ folytonos $\forall$ $x_0 \in \mathbb{R}$-ban, $n \in \mathbb{N}$

mert $f(x) = x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n\text{-szer}} \to x_0 \cdot x_0 \cdots x_0 = x_0^n = f(x_0)$

② $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ folytonos $\forall$ $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$-ban,

mert $f_1(x)=1$ és $f_2(x)=x \neq 0$ folytonosak x_0-ban

és $f(x)=\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$

$\circ$!

TÉTEL (Összetett függvények folytonossága)

Legyenek $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: f(E) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvények.
Ha f folytonos $x_0 \in E$ pontban és g folytonos $y_0 = f(x_0)$-ban, akkor a $h = g \circ f$ függvény folytonos x_0-ban.

$$\left(\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(f(x_0)) = h(x_0) \right)$$

b/ <u>Biz</u> (gyakorlatilag kompletes definícióval)

- g folytonos $y_0 = f(x_0)$-ban, azaz $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta_1 > 0$, hogy ha $y \in B(y_0, \delta_1(\varepsilon)) \cap f(E)$, akkor $g(y) = B(g(y_0), \varepsilon)$.

- f folytonos x_0-ban, azaz $\delta_1(\varepsilon) > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, hogy

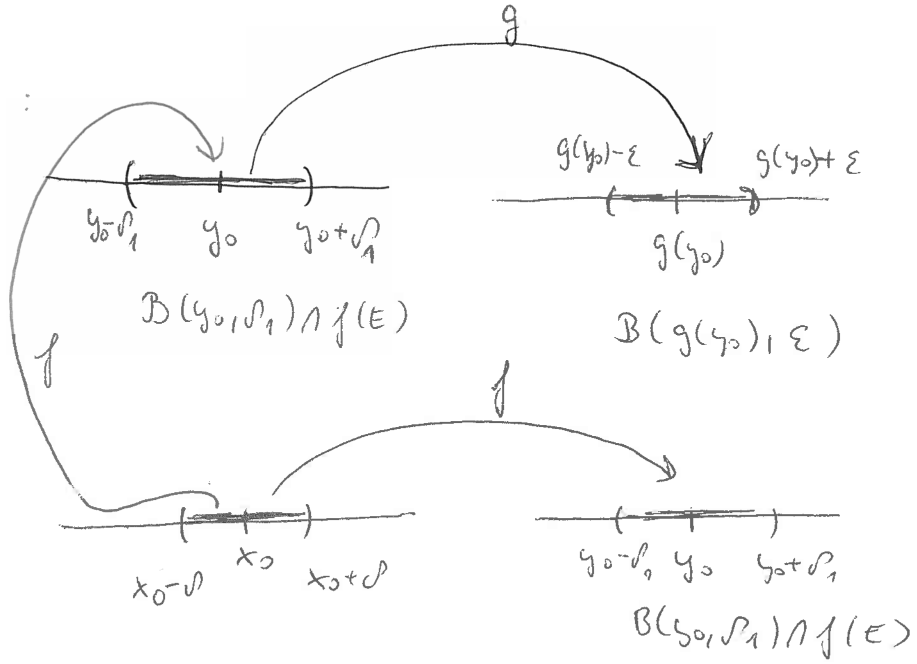
  így választjuk!

  ha $x \in B(x_0, \delta(\varepsilon)) \cap E$, akkor ~~$f(x) = y \in B(x_0, \delta_1(\varepsilon))$~~

  $f(x) = y \in B(y_0, \delta_1(\varepsilon))$

<u>vagyis</u>, g folytonos:

f folytonos



$\Rightarrow$ $\forall x \in B(x_0, \delta(\varepsilon)) \cap E$ esetén $f(x) = y \in B(y_0, \delta_1(\varepsilon))$

$\hookrightarrow$ $g(f(x)) \in B(\underbrace{g(f(x_0))}_{\equiv\, g(y_0)}, \varepsilon)$ (vagyis $g \circ f$ folytonos x_0-ban

$\circ$!

5/

Példa $f(x) = \sin e^{x^2}$ függvény folytonos $\forall x_0 \in \mathbb{R}$-ben,

mert $f_1(x) := x^2$, $f_2(x) := e^x$, $f_3(x) := \sin x$

függvények folytonosak x_0-ban és

$$f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$$

Megj. ① Műveleti szabályok $\Rightarrow$ $H \subset \mathbb{R}$ esetén $C(H)$ függvényosztály

zárt az összeadás, számmal való szorzás és függvényszorzás

műveletére $\Rightarrow$ $C(H)$ kommutatív algebrát alkot

$$\| $$

$$f \cdot g = g \cdot f \quad \forall f, g \in C(H)$$

egységelem: $h_0(x) := x^0 = 1 \quad \forall x \in H$

② $f : H \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 belső pontja H-nak

f folytonos x_0-ban $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$

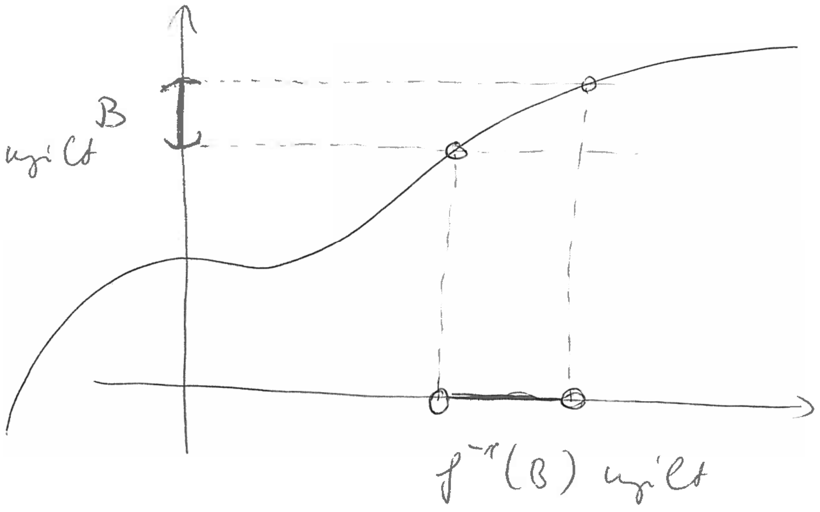
$\hookrightarrow$ $\lim\limits_{x \to x_0}$ művelet és f felcserélhető

③ A folytonosság topologikus megfelelője

$f : E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos E-n $(f \in C(E))$ $\Leftrightarrow$ $\forall$ $B \subset \mathbb{R}$ nyílt halmazra

$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}$ nyílt.

(Nyílt halmaz ősképe nyílt.)



Szakadási helyek osztályozása

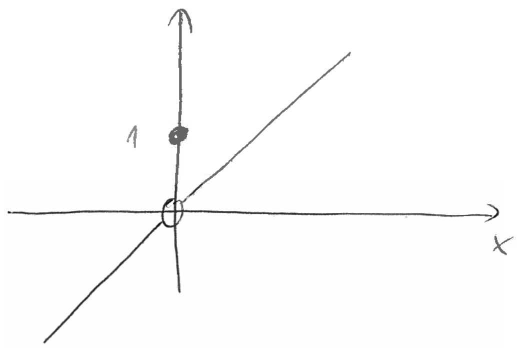
Def: Ha $f: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in E$ pontban nem folytonos, akkor azt mondjuk, hogy f-nek x_0-ban szakadása van, az x_0 pontot pedig f szakadási helyének hívjuk.

Hogyan lehet x_0 szakadási hely?

(1) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, de $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. Ekkor f-nek x_0-ban megszüntethető szakadása van.

Pl:

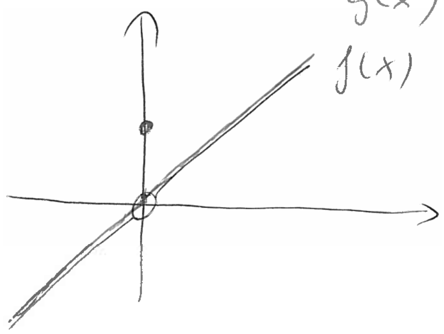
$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{R},\ x \neq 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$



megj. eliminálás oka:

$$g(x) := \begin{cases} f(x), \text{ ha } x \neq 0 \\ \lim\limits_{x \to 0} f(x), \text{ ha } x = 0 \end{cases}$$

$g(x)$: folytonos mindenütt (megszüntettük a szakadást)

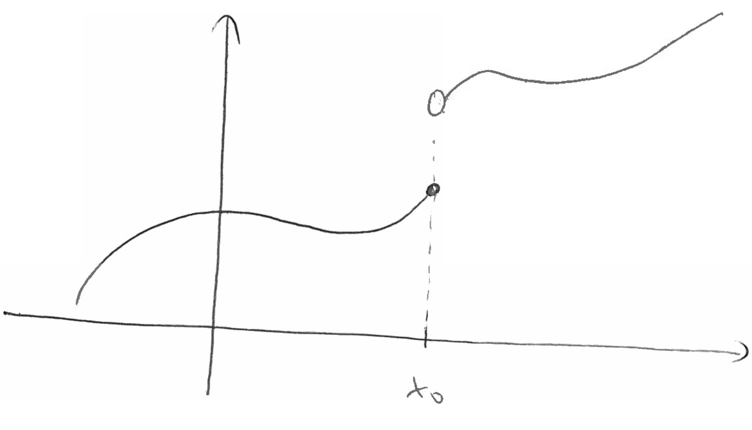
↳ 

② **Def.** $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ -nek $x_0 \in E'$ -ben ugrása van, ha

$\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ és $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, de $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Ekkor x_0: f ugró v ugráshelye

$|f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)|$: f ugrása x_0-ban.



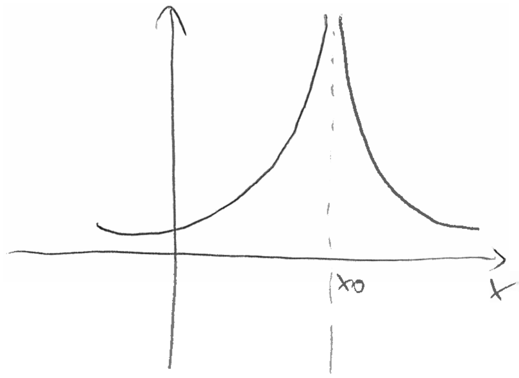
- megszüntethető szakadás
- ugrás

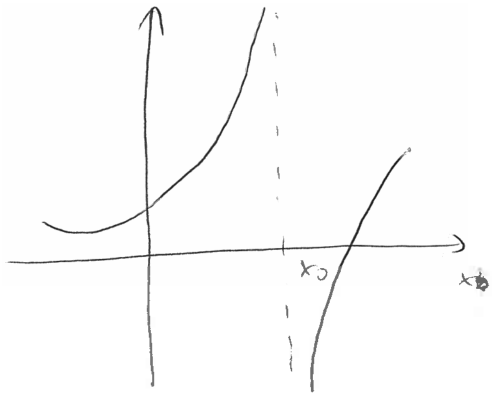
} első fajú szakadás

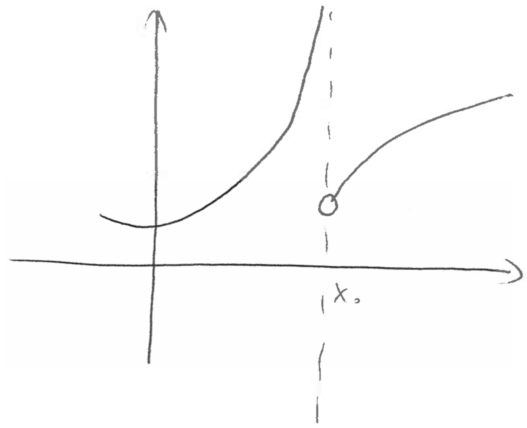
8/

(3) f-nek x_0-ban másodfajú szakadása van, ha x_0-ban nem elsőfajú szakadása van.

Pl.:







Megj.: Láttuk: Ha $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ monoton, akkor $\forall\, x\in(\alpha,\beta)$-ban $\exists$ jobb- és baloldali határértéke.

$\Downarrow$

monoton fv-nek $\nexists$ másodfajú szakadása

Mivel a monotonitás miatt $f(x)$ $f(x+0)$ és $f(x-0)$ közé esik $\Rightarrow$ vagy egyenlő velük, vagy közöttük van

$\Downarrow$

monoton fv-nek $\nexists$ megszüntethető szakadása

$\Longrightarrow$ (α,β) intervallumon értelmezett monoton függvények vagy folytonosak, vagy ugrásuk van.

!

<u>Megj</u>

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$ Dirichlet-fv

$\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$-ben <u>másodfajú szakadása van</u>, mert egyetlen pontjában sem létezik sem a bal-, sem a jobboldali határérték.

($\forall$ pont balról és jobbról is megközelíthető racionális ill. irracionális számokkal.)

<u>Példák</u> Osztályozzuk az alábbi függvények szakadási helyeit!

① $f(x) = \dfrac{\sin(1-x)}{x^2-1}$ $\leadsto$ mindenütt folytonos, ahol értelmezve van

$\hookrightarrow$ szakadási helyek: $x = 1$ és $x = -1$ (miután D_f határpontja)

• <u>$x = 1$</u>-ben:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} -\underbrace{\frac{\sin(1-x)}{1-x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\frac{1}{2}} = -1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2}$, mert folytonos 1-ben

1, mert $y := 1-x$-re

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(1-x)}{1-x} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

$\Rightarrow$ $\exists \lim\limits_{x \to 1} f(x)$, tehát $x = 1$-ben megszüntethető szakadás.

• $\underline{x=-1}$ -ben

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} \frac{1}{\underset{\searrow 0}{x+1}}\underbrace{\left(-\frac{\sin(1-x)}{1-x}\right)}_{\text{folytonos } -1\text{-ben}} = +\infty$$

$$-\frac{\sin 2}{2} < 0 \text{ véges}$$

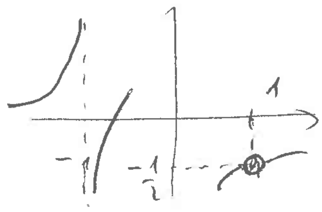
$x<-1 \Rightarrow x+1<0$

$$\frac{1}{x+1} \to -\infty$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} \frac{1}{\underset{\searrow 0}{x+1}}\underbrace{\left(-\frac{\sin(1-x)}{1-x}\right)} = -\infty$$

$$-\frac{\sin 2}{2} < 0 \text{ véges}$$

$x>-1 \Rightarrow x+1>0$



$\Rightarrow$ $x=-1$ -ben másodfajú szakadás

② $f(x) := \dfrac{\sin|2-x|}{x-2} = \dfrac{\sin|x-2|}{x-2}$ ~> szakadási hely: $x=2$ (torlódási pontja $\mathbb{R}$-nek)

$$\lim_{x\to 2+0} \frac{\sin|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2+0} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1 = f(2-0)$$

$x>2$

$$\lim_{x\to 2-0} \frac{\sin|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2-0} \frac{\sin(-(x-2))}{x-2} = \lim_{x\to 2-0} -\frac{\sin(x-2)}{x-2} = -1 = f(2-0)$$

$x<2$

$\Rightarrow x=2$ -ben ugrás: $|f(2-0)-f(2+0)| = |-1-1| = 2$

!

17/

Definiálhatjuk az egyoldali folytonosságot is:

Def. $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény x_0-ban balról folytonos, ha f-nek $E \cap (-\infty, x_0]$-ra való leszűkítése folytonos, azaz

(i) $\exists\, \delta_0 > 0$, hogy $(x_0-\delta_0, x_0] \subseteq E$ és

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta > 0$, hogy $\forall\, x$-re ú $x_0-\delta < x \le x_0$ esetén $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$.

(vagy (ii) $\forall\, (x_n)_{n\in \mathbb{N}}$, $x_n \to x_0$ sorozatra $x_n \le x_0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ és

$f(x_n) \to f(x_0)$)

$f: E \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény x_0-ban jobbról folytonos, ha f-nek $E \cap [x_0, \infty)$-re való leszűkítése folytonos, azaz

(i) $\exists\, \delta_0 > 0$, hogy $[x_0, x_0+\delta) \subseteq E$ és

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta > 0$, hogy $\forall\, x$: $x_0 \le x < x_0+\delta$-re

$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$

(vagy (ii): $\forall\, (x_n)_{n\in \mathbb{N}} \subset E$, $x_n \to x_0$ sorozatra $x_n \ge x_0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$

és $f(x_n) \to f(x_0)$)

Megj. Ha x_0 $E \cap [x_0, \infty)$ izolált pontja $\Rightarrow$ f jobbról folytonos x_0-ban.

Ha $x_0 \in [E \cap [x_0, \infty)]'$ $\Rightarrow$ f jobbról folytonos x_0-ban, ha

$f(x_0) = f(x_0+0)$

hasonlóan a balról folytonosra

12)

Intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

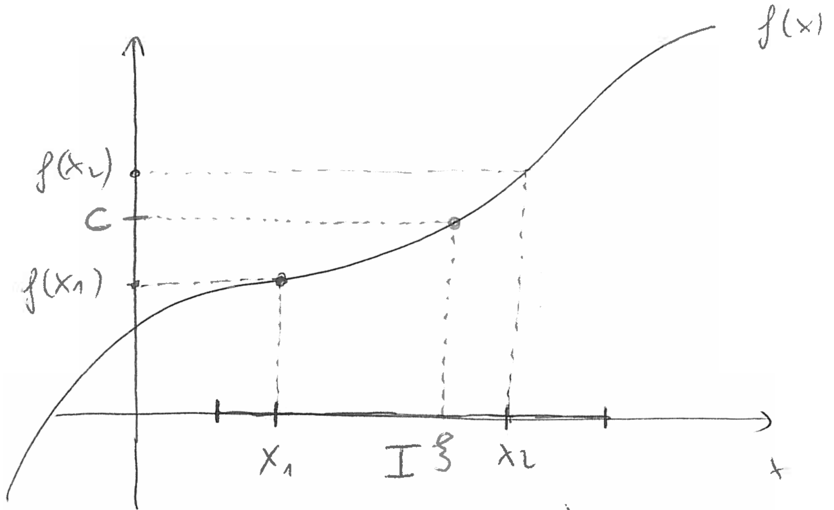
Def Az f függvény az I intervallumon (tetsz. intervallum: $I \in \{[a,b], [a,b), (a,b], (a,b)$ $a<b\}$)

Bolzano–Darboux tulajdonságú (közbülsőérték-tulajdonságú),

ha $I \subset D_f$ és $\forall\, x_1, x_2 \in I$, ~~esetén~~ $\exists$ $c \in \mathbb{R}$, hogy

$$f(x_1) < c < f(x_2) \quad \text{fennáll},$$

akkor $\exists$ ξ x_1 és x_2 között, melyre $f(\xi) = c$.



$f(\xi) = c$

TÉTEL: (Bolzano–Darboux-tétel)

Ha az f függvény folytonos az I intervallumon, akkor ott Bolzano–Darboux tulajdonságú.

Spec Ha f folytonos $I = [a,b]$-n, (folytonos (a,b)-ben és a-ban jobbról, b-ben balról folytonos)

akkor f felvesz minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket.

13)

Biz ! $x_1, x_2 \in I$ tetszőlegesek. Tfh $x_1 < x_2$ ($x_1 > x_2$ ugyanígy)

és legyen $c \in \mathbb{R}$ tetszőleges, melyre

$$f(x_1) < c < f(x_2)$$

$$H := \{x \in [x_1, x_2] : f(x) \leq c\}$$

- $H \neq \emptyset$, mert $x_1 \in H$ ($\Leftarrow f(x_1) < c$)
- H korlátos ($H \subseteq [x_1, x_2]$)

$\Downarrow$

$\exists\ \xi := \sup H \Rightarrow x_1 \leq \xi \leq x_2$

Áll: $\boxed{f(\xi) = c}$

- Ha $f(\xi) < c$, akkor $\exists\ \delta > 0$, hogy $\xi - \delta < x < \xi + \delta$ esetén $f(x) < c$ mindig teljesül ($\Leftarrow f$ folytonos, így folytonos változós-tulajdonságú)

Vagyis akkor pl: $\xi + \frac{\delta}{2} \in H$, vagyis ξ nem felső korlátja H-nak: ↯

- Ha $f(\xi) > c$, akkor $\exists\ \delta > 0$, hogy $\xi - \delta < x < \xi + \delta$ esetén $f(x) > c$ (folytonosváltozós tul.) $\Longrightarrow$ $\xi - \frac{\delta}{2}$ is korlát

$\Downarrow$

ξ nem legkisebb felső korlát: ↯

$\Rightarrow f(\xi) = c$

.!

14/

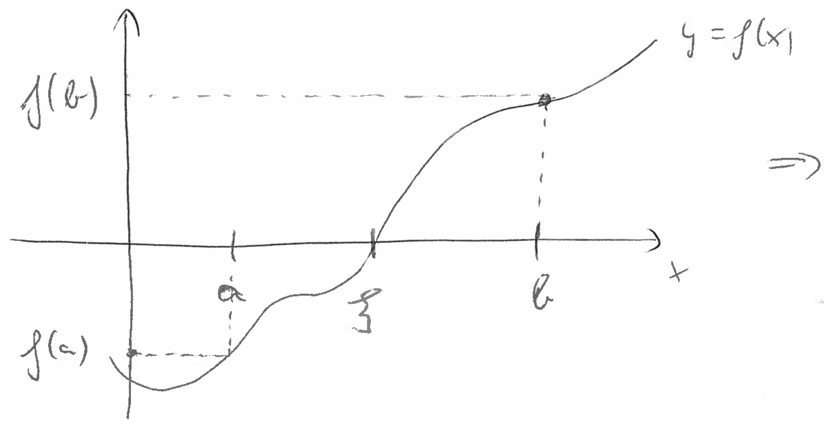
Köv (Bolzano-tétel)

tfh $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos ($f \in C[a,b]$) és

$f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$, melyre $f(\xi) = 0$.

Biz. $f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow f(a) < 0 < f(b) \Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$:

$f(\xi) = 0$?!



$\Rightarrow$ harmadolható gyökkeresése intervallum felezéssel

Példák

① Létezik-e valós megoldása a $\sin x - x + 1 = 0$ egyenletnek?

$f(x) := \sin x - x + 1$ folytonos fv $\mathbb{R}$-en $\Rightarrow$ B-D tulajdonságú

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \sin 0 - 0 + 1 = 1 \\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \underbrace{\sin \frac{3\pi}{2}}_{-1} - \frac{3\pi}{2} + 1 = -\frac{3\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) \cdot f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1 \cdot \left(-\frac{3\pi}{2}\right) < 0$$

$\Downarrow$ Bolzano-tétel

$\exists\, \xi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$, hogy

$f(\xi) = 0$

$\Rightarrow \exists$ legalább 1 gyök a $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ intervallumban.

∞

(2) Biz. be, hogy minden páratlan fokszámú polinomnak $\exists$ valós gyöke!

$$p(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \dots + a_1 x + a_0 \rightsquigarrow \text{folytonos } \forall x \in \mathbb{R}\text{-en}$$

- ha $a_{2n+1} > 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} p(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$
- ha $a_{2n+1} < 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} p(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = \infty$

$\Downarrow$ Bolzano–Darboux tulajdonság

$\exists\ \xi \in \mathbb{R}$, hogy $p(\xi) = 0$ $\circ$!

(3) Felveszi-e az $f(x) = \dfrac{x^3}{4} - \sin \pi x + 3$ függvény a $\frac{7}{3}$ értéket $[-2, 2]$-ben?

$g(x) := f(x) - \frac{7}{3} = \frac{x^3}{4} - \sin \pi x - \frac{1}{3}$ folytonos $\mathbb{R}$-en

$g(-2) = \frac{-8}{4} - 0 - \frac{1}{3} = -\frac{7}{3}$

$g(2) = \frac{8}{4} - 0 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow g(-2) \cdot g(2) < 0$

$\Downarrow$ Bolzano

$\exists\ \xi \in (-2, 2)$, melyre

$g(\xi) = f(\xi) - \frac{7}{3} = 0$

$\Downarrow$

$f(\xi) = \frac{7}{3}$ $\circ$!

16)

Korlátos zárt intervallumon folytonos függvények

Emlékeztető: ① Legyen $a<b$. Ekkor f függvény folytonos $[a,b]$-n, ha $\forall\, x\in(a,b)$ helyen folytonos, a-ban jobbról, b-ben pedig balról folytonos. <u>Jel:</u> $f\in C[a,b]$

② <u>Heine–Borel tétel</u> $K\subset\mathbb{R}$ kompakt $\Longleftrightarrow$ K korlátos és zárt.

$\hookrightarrow$ $[a,b]$ kompakt halmaz.

<u>TÉTEL:</u> Ha $f\in C[a,b]$, akkor f korlátos $[a,b]$-ben.

<u>Biz.</u> indirekt: tfh f nem korlátos $[a,b]$-ben, azaz

$\nexists\, K\in\mathbb{R}$, melyre $|f(x)|\leq K \quad \forall\, x\in[a,b]$.

$\Rightarrow$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$-hez $\exists\, x_n\in[a,b]$, hogy $|f(x_n)|>n$.

$\hookrightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos sorozat $\quad (x_n\in[a,b] \ \forall\, n\in\mathbb{N})$

$\Downarrow$ Bolzano–Weierstrass

$\exists\, (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergens részsorozat : $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} =: \alpha \in[a,b]$

f folytonos α-ban $\Rightarrow$ $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\alpha)$

$\Downarrow$

$(f(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$ korlátos sorozat : $\lightning$

mert $f(x_{n_k}) > n_k \quad \forall\, k\in\mathbb{N}$

$\bullet$!

17/ Megj: ⑭ a feltételek szükségesek:

- $f(x) = \frac{1}{x}$ folytonos $(0,1]$-ben, de nem korlátos $\Rightarrow$ muszáj zárt intervallum
- $f(x) = x^2$ folytonos $[0,\infty)$-ben, de nem korlátos $\Rightarrow$ muszáj korlátos intervallum

Def. $f: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H \subset E = D_f$.

Ha a H halmazhoz tartozó $f(H)$ halmaznak $\exists$ legnagyobb eleme, akkor azt f H-n felvett abszolút maximumának hívjuk. Jel. $\max f(H) \equiv \max\limits_{x\in H} f(x)$.

Ugyanez legkisebb elemmel $\Rightarrow$ H-n felvett abszolút minimum

Jel. $\min f(H) \equiv \min\limits_{x\in H} f(x)$.

abszolút max hely + abs. minimum hely $\equiv$ abszolút szélsőértékhelyek

TÉTEL (Weierstrass-tétel)

Ha $f \in C[a,b]$, akkor $\exists$ $\alpha \in [a,b]$ és $\beta \in [a,b]$, melyekre

$$f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta) \quad \forall x \in [a,b].$$

(Korlátos, zárt intervallumon folytonos függvénynek $\exists$ abszolút maximuma és abszolút minimuma)

Biz.

$M := \sup f([a,b])$ (mindig $\exists$)

↳ $\forall n \in \mathbb{N}^+$-ra $M - \frac{1}{n}$ nem felső korlátja $f([a,b])$-nek

$\Rightarrow \exists\, x_n \in [a,b]$, melyre $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$

↳ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat korlátos $\xRightarrow[\text{B-W}]{} \exists\, (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergens részsorozata:

$\alpha := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in [a,b]$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ccccc} M - \frac{1}{n_k} & < & f(x_{n_k}) & \le & M \\ \downarrow {\scriptstyle k\to\infty} & & \downarrow {\scriptstyle k\to\infty} & & \downarrow {\scriptstyle k\to\infty} \\ M & & f(\alpha) & & M \end{array}$$

a rendőrelv miatt $f(\alpha) = M$, vagyis f felveszi az abszolút maximumot.

Abszolút minimumra ugyanígy (HF).

Megj: korlátos, zárt intervallum feltétel nem enyhíthető:

- $f(x) = x$ folytonos, korlátos $(0,1)$-en, de nem veszi fel az abszolút szélsőértékeit
- $f(x) := -\frac{1}{1+x^2}$ korlátos, folytonos $[0,\infty)$-ben, de $\nexists$ maximuma

13.) Élesítések: (Weierstrass)

TÉTEL $f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H \subset E$ kompakt.

Ha f folytonos H-n, akkor $f(H)$ kompakt.

(Kompakt halmaz folytonos képe kompakt.)

Biz. $K := \{f(x) : x \in H\} = f(H)$

K kompaktságához elég belátni, hogy $\forall (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ sorozatnak $\exists$ olyan konvergens részsorozata, melynek határértéke K-ban van.

$y_n \in K$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $\exists$ $x_n \in H$, melyre $f(x_n) = y_n$.

H kompakt és $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ $\Rightarrow$ $\exists$ $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergens részsorozata, melyre $\alpha := \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} \in H$

f folytonos α-ban

$\hookrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\alpha) \in K$

$\Rightarrow K$ kompakt.

Köv 1) Kompakt halmazon értelmezett folytonos fv korlátos.

Köv 2) Ha $f \in C[a,b]$, akkor $f([a,b]) = \left[\min\limits_{x\in[a,b]} f(x), \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)\right]$

(Korlátos zárt intervallum folytonos függvény általi képe egy korlátos zárt intervallum.)

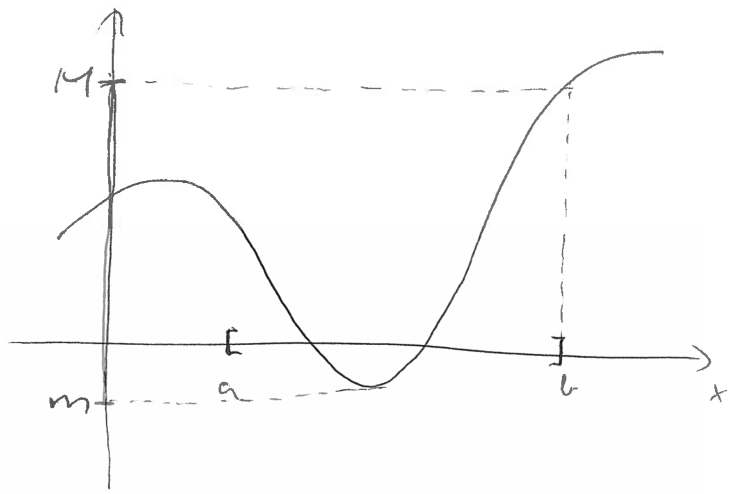
<u>Biz:</u> Weierstrass $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} M := \max f([a,b]) \\ m := \min f([a,b]) \end{array}\right\}$ léteznek

$f([a,b]) \subset [m,M]$

$\Downarrow$ f folytonos + B-D tulajdonság

f minden $[m,M]$-beli értéket felvesz $[a,b]$-n

$\hookrightarrow$ $f([a,b]) = [m,M]$



<u>Megj:</u> (1) A fenti tételek elégségesek, de nem szükségesek.

<u>Pl:</u> Dirichlet-fv:
- D_f nem kompakt
- a függvény sehol sem folytonos

de
- $\exists$ minimuma és maximuma
- $ÉK = \{0,1\}$ kompakt.

Egyenletes folytonosság

a folytonosság lokális (pontbeli) tulajdonság

$\Downarrow$

kell néha erősebb.

Emlékeztető: $f: H \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos H-n, ha minden pontjában folytonos, azaz

$\forall\, x \in H$-ra $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta > 0$, hogy $\forall\, y \in H$-ra, melyre

$|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

itt $\delta = \delta(\varepsilon, x)$

ebben van elrejtve a lokalitás

Van olyan eset, amikor δ x-től függetlenül választható:

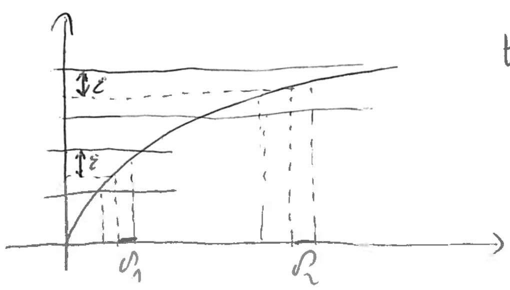
Def: $f: E \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f egyenletesen folytonos $H \subset E$-n, ha

$\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta > 0$, hogy $\forall\, x, y \in H$: $|x-y| < \delta$

$\Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

(Itt δ csak ε-tól függ!)

Példa ① $f(x) = \sqrt{x}$ egyenletesen folytonos $[0, \infty)$-n.



tudunk-e közös δ-t választani

$\forall\, \varepsilon > 0$ -hoz $\delta := \varepsilon^2$ -jó

$$\sqrt{x+\delta} - \sqrt{x} = \frac{\delta}{\sqrt{x+\delta} + \sqrt{x}} \le \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} = \sqrt{\delta} = \varepsilon$$

!

24/(2)

$f(x) = \frac{1}{x}$, $H = (0,1)$ -en nem egyenletes folytonos

$\forall\, a \in (0,1)$ -ben folytonos, $\forall\, \varepsilon > 0$ -ra

$$|f(x)-f(a)| = \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right| = \frac{|x-a|}{a\cdot x} < \varepsilon \quad , \text{ha}$$

$$|x-a| < \varepsilon \cdot a x$$

$$\parallel$$

$$\delta(a) \to 0 \text{ , ha } a \to 0$$

$\Rightarrow \nexists$ a-tól független közös δ . !

Megj: egyenletes folytonosság szűkebb, mint a folytonosság:

Ha f egyenletesen folytonos H-n $\Rightarrow$ f H $\forall$ pontjában folytonos

TÉTEL (Heine-tétel, egyenletes folytonosság tétele)

$f: E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H \subset E$ kompakt. Ha f folytonos H-n, akkor f egyenletesen folytonos H-n.

Biz: indirekt: tfh f nem ~~folyt~~ egyenletesen folytonos H-n:

$\exists\, \varepsilon_0 > 0$, melyhez $\forall\, \delta > 0$-hoz $\exists\, x, y \in H$, hogy $|x-y| < \delta$, de $|f(x)-f(y)| \geq \varepsilon_0$,

$\delta := \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $\exists\, \alpha_n, \beta_n \in H$, melyre $|\alpha_n - \beta_n| < \frac{1}{n}$, de $\boxed{|f(\alpha_n) - f(\beta_n)| \geq \varepsilon_0}$ (*)

$\Rightarrow (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ kompakt $\xRightarrow{B-W}$ $\exists\, (\alpha_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konv. részsorozat, melyre

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_{n_k} =: \alpha \in H .$$

$$\beta_{n_k} := (\beta_{n_k} - \alpha_{n_k}) + \alpha_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 + \alpha = \alpha$$

↑ n_k-t α_{n_k}-ból

↑ $|\beta_{n_k} - \alpha_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \to 0$

f folytonos H-ban $\Rightarrow$ $\alpha \in H$-ban is folytonos

$$f(\alpha_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(\alpha)$$

$$f(\beta_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(\alpha)$$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{k\to\infty} \left(f(\alpha_{n_k}) - f(\beta_{n_k}) \right) = 0$ de $(*)$ $|f(\alpha_n) - f(\beta_n)| \geq \varepsilon_0$

↯

Megj: H korlátossága és zártsága nem elhagyható:

- $f(x) = \frac{1}{x}$ folytonos $(0,1)$-ben, de nem egyenletesen folyt.
- $f(x) = x^2$ folytonos $(-\infty, \infty)$-ben, de nem egyenletesen folyt.

Példa: Egyenletesen folytonos-e $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ $[-5,1)$-en?

$[-5,1)$ nem zárt $\Rightarrow$ Heine közvetlenül nem használható

- $f(x)$ folytonos $[-5,1)$-ben
- $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x+1) = 2$ $\rightsquigarrow$ $x=1$-ben f-nek megszüntethető szakadása van

$\Rightarrow$ $g(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in [-5,1) \\ 2, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$ $\quad g: [-5,1] \to \mathbb{R}$ folytonos $[-5,1]$-en

$\overset{\text{Heine}}{\Longrightarrow}$ $g(x)$ egyenletesen folytonos $[-5,1]$-en $\Rightarrow$ $\forall$ részintervallumon is egy. folyt.

$\Rightarrow$ f egy. folyt. $[-5,1)$-en.

Megj: Ha H nem kompakt, Heine-tétel nem segít.

Def: f függvény Lipschitz-tulajdonságú (Lipschitzes) az A halmazon, ha $\exists\ K \geq 0$ (Lipschitz-konstans), hogy

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leq K|x_1-x_2| \quad , \forall\ x_1, x_2 \in A.$$

TÉTEL f Lipschitzes A-n $\Longrightarrow$ f egyenletesen folytonos A-n

Biz. $\forall\ x_1, x_2 \in A$, melyre $|x_1-x_2| < \frac{\varepsilon}{K}$ $\Longrightarrow$ $|f(x_1)-f(x_2)| \leq K\cdot|x_1-x_2|$

f Lipschitzes K konstanssal $\leq K\cdot\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$. !

Megj: megfordítás nem igaz:

$f(x)=\sqrt{x}$ nem Lipschitzes $[0,1]$-en:

$\forall\ K>0$ esetén $x_1:=0$, $0<x_2<\min\{1, \frac{1}{K^2}\}$

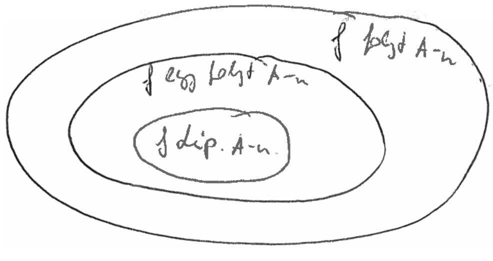
$$\Downarrow$$

$$x_2 > K^2\cdot x_2^2$$

és $|\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}| = \sqrt{x_2} > K\cdot x_2 = K|x_2-x_1|$

de $\sqrt{x}$ egyenletesen folytonos $[0,1]$-en.

Megj:



Az inverz függvény folytonossága

$H_1, H_2 \subset \mathbb{R}$ $\quad f: H_1 \to H_2$ kölcsönösen egyértelmű H_1 és H_2 között

$\Rightarrow$ f-nek $\exists$ inverze: $f^{-1}: H_2 \to H_1$

Ha f folytonos H_1-en, még nem biztos, hogy f^{-1} folytonos H_2-n.

TÉTEL: Ha $H_1 \subset \mathbb{R}$ kompakt és $f: H_1 \to H_2$ folytonos bijekció, akkor az f függvény $f^{-1}: H_2 \to H_1$ inverze is folytonos.

Biz: indirekt: tfh f_*^{-1} nem folytonos.

$\Rightarrow \exists$ $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H_2$ konvergens sorozat: $y^* := \lim\limits_{n\to\infty} y_n$,

melyre az $(f^{-1}(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat nem tart $x^* = f^{-1}(y^*)$-hoz.

↳ $\exists$ olyan $\delta > 0$, hogy $x_n := f^{-1}(y_n)$ sorozatnak ∞ sok tagja van $B(x^*, \delta)$ ~~…~~ környezeten kívül.

H_1 kompakt $\Rightarrow \exists$ $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset H_1$ konvergens részsorozata:

$$x_* := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in B(x^*, \delta)^c,$$

vagyis $|x_{n_k} - x^*| \geq \delta$, $|x_* - x^*| \geq \delta > 0 \Rightarrow x_* \neq x^*$

f folytonos x_*-ban: $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k} = f(x_*)$

De $\lim_{n\to\infty} y_n = y^* \Rightarrow \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = y^* = f(x^*)$

vagyis $x_* \neq x^*$, de $f(x_*) = f(x^*)$

$\hookrightarrow$ f nem injektív : $\lightning$

ⓐ !

Köv $\forall$ intervallumon értelmezett folytonos, injektív függvény szigorúan monoton.

TÉTEL Ha $f : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ folytonos és szigorúan monoton nő (csökken)
$\Rightarrow f^{-1} : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ folytonos és szig. monoton nő (csökken).

Biz. f^{-1} folytonosságát láttuk

! $f \nearrow$ szig. . Tfh $f^{-1} : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ nem szigorúan nő.

$\hookrightarrow \exists\ u_1, u_2 \in (\alpha,\beta)$, hogy $u_1 < u_2$ és $f^{-1}(u_1) \geq f^{-1}(u_2)$

$f \nearrow$ szig $\Rightarrow \exists!\ x_1, x_2 \in (a,b)$, hogy $f(x_1) = u_1$, $f(x_2) = u_2$

~~$\hookrightarrow f(x_1) = u_1 < f(x_2) = u_2$~~

ezekre $f^{-1}(f(x_1)) \geq f^{-1}(f(x_2)) \Rightarrow x_1 \geq x_2$, de $f(x_1) \geq f(x_2)$,

vagyis $u_1 \geq u_2$: $\lightning$ $(u_1 < u_2)$

hasonlóan $f \searrow$ szig-ra

ⓐ !

Monotonitás és folytonosság

Láttuk: f monoton (a,b)-ben $\Rightarrow$ $\forall\, x_0 \in (a,b)$-ben

f vagy folytonos vagy ugrása van.

(Monoton függvényeknek a szakadási helyei csak ugráshelyei lehetnek.)

TÉTEL: Ha f monoton (a,b)-ben, akkor (a,b)-ben f-nek legfeljebb megszámlálhatóan sok szakadási helye lehet.

Biz. Tfh $f \nearrow$ (a,b)-ben

Ha $\xi \in (a,b)$-ben f nem folytonos $\Rightarrow$ $f(\xi-0) < f(\xi+0)$

$\hookrightarrow$ $\exists\, r(\xi) \in \mathbb{Q}$, melyre

$f(\xi-0) < r(\xi) < f(\xi+0)$

ha $\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f(\xi_1+0) \le f(\xi_2-0)$

$\hookrightarrow$ f-nek ξ_1 és ξ_2 is szakadási helye $\Rightarrow r(\xi_1) < r(\xi_2)$

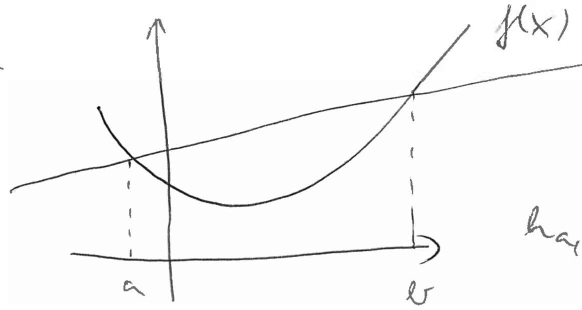
$\Rightarrow$ az ugráshelyek és a racionális számok egy részhalmaza között egy-egy értelmű megfeleltetés van $\Rightarrow$ legfeljebb megszámlálhatóan sok ugráshely lehet

Megj: Egy tetszőleges megszámlálható ~~A halmaz~~ $A \subset \mathbb{R}$ halmazhoz konstruálható olyan monoton f függvény, amelynek szakadási pontjai halmaza éppen A. !

28)

Konvexitás és folytonosság

emlék.:

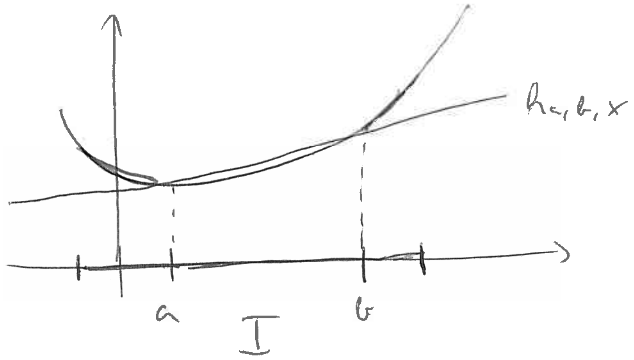


$y = h_{a,b}(x)$ húr egyenes

$$h_{a,b}(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Lemma: Ha f konvex I intervallumban, $a,b \in I$, $a<b$ és $x \in I \setminus [a,b]$, akkor $f(x) \geq h_{a,b}(x)$.

Biz.: házi:



TÉTEL: Ha f konvex a nyílt I intervallumban, akkor f folytonos I-n.

Biz.: ! $c \in I$, $a,b \in I$, melyre $a<c<b$

ha $x \in (c,b) \xRightarrow{\text{lemma}} h_{a,c}(x) \leq f(x) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ konvex}}}{\leq} h_{c,b}(x)$

rendőrelv $\hookrightarrow$ $\lim\limits_{x\to c} h_{a,c}(x) = \lim\limits_{x\to c} h_{c,b}(x) = f(c)$

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to c+0} f(x) = f(c)$ hasonlóan $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = f(c)$!