23/

Hatványsorok (Kalkulus 2-ben részletesebben)

<u>Def</u>: $a_n, z_0 \in \mathbb{R}$ v. $\mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$

Az
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots \qquad (*)$$
sort z_0 középpontú hatványsornak hívjuk.

a_n: együtthatók

Azon $z \in \mathbb{C}$ számok, melyekre $(*)$ numerikus sor konvergens, alkotják $(*)$ konvergenciatartományát (KT)

<u>Megj</u>: $z = z_0 \in KT \Rightarrow KT \neq \emptyset$

$$\boxed{\alpha := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

<u>Def</u>: Az
$$R := \begin{cases} 0, & \text{ha } \alpha = +\infty \\ +\infty, & \text{ha } \alpha = 0 \\ 1/\alpha, & \text{ha } 0 < \alpha < \infty \end{cases}, \quad R \in \overline{\mathbb{R}}$$
számot a $(*)$ hatványsor konvergenciasugarának hívjuk

24/

TÉTEL (Cauchy–Hadamard)

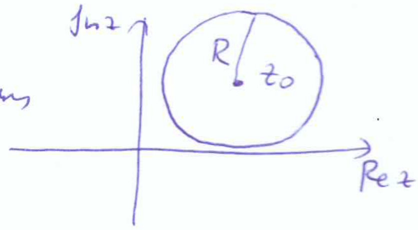
Legyen R a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ hatványsor konvergenciasugara.

Ekkor $|z-z_0|<R$ esetén a hatványsor abszolút konvergens,

$|z-z_0|>R$ esetén a hatványsor divergens.

Megj: $B(z_0,R):=\{z\in\mathbb{C} : |z-z_0|<R\}$ z_0 középpontú nyílt körlap $\mathbb{C}$-n

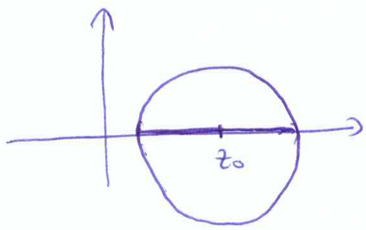
$B(z_0,R)\subset KT$ vagyis a körlapon belül a sor konvergens



A körlapon kívül a sor divergens.

A tétel nem mond semmit, a körvonalon ($|z-z_0|=R$).

Ha $z_0, a_n\in\mathbb{R}$ (valós hatványsorok)



$z\in\mathbb{R}$

$B(z_0,R)=(z_0-R, z_0+R)$

Biz: Tfh $|z-z_0|<R$. $\Longrightarrow$ $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<\infty$

$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{a_n(z-z_0)^n}_{b_n}$ sorra

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|b_n|} = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n||z-z_0|^n} = \underbrace{|z-z_0|}_{<R}\ \underbrace{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}_{=1/R} < R\cdot\frac{1}{R}=1$$

Cauchy-gyökkritérium $\Longrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ abszolút konv.

25/ Legyen $|z-z_0|>R$

$$\Rightarrow \overline{\lim}\sqrt[n]{|b_n|} = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n||z-z_0|^n} = \underbrace{|z-z_0|}_{\substack{\vee\\ R}}\ \underbrace{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}_{\substack{\shortparallel\\ \frac{1}{R}}} > 1$$

Cauchy-gyökkritérium $\longrightarrow$ $\sum_n a_n(z-z_0)^n$ divergens.

o!

Def: Tegyük fel, hogy $(*)$ konvergenciasugara pozitív $(R>0)$

$$z\in B(z_0,R)\ ,\quad f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \in \mathbb{C}$$

utasítással értelmezett függvényt $(*)$ hatványsor

összegfüggvényének hívjuk.

(vagy: f-t $B(z_0,R)$-ben z_0 körüli hatványsorba fejtettük)

Megj: Hatványsorral előállítható függvények $\equiv$ analitikus függvények

Pl: $\sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n = \dfrac{1}{1-(z-z_0)}$, ha $|z-z_0|<1$ vagyis $R=1$

Spec: $z_0=0 \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \dfrac{1}{1-z}$, ha $|z|<1$

TÉTEL Ha $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$ R_1 ill R_2 konvergenciasugárral, akkor $R:=\min\{R_1,R_2\}$-vel

$$f(z)+g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)(z-z_0)^n$$

$$f(z)\cdot g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\dots+a_nb_0)(z-z_0)^n$$

Cauchy-szorzat.

Biz: triviális (HF)

o!

Néhány elemi függvény

Tekintsük a következő alábbi hatványsorokat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{z^n}{n!}, \qquad z \in \mathbb{R} \text{ v. } \mathbb{C}$$

ahol $\varepsilon_n \in \{0, 1, -1\}$.

Mikor lesznek ezek a sorok abszolút konvergensek?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \varepsilon_n \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{|z|^n}{n!}}_{a_n}$$

d'Alembert-féle hányados kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{n!}{|z|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

$\Rightarrow$ vagyis a fenti sorok $\forall z \in \mathbb{C}$ esetén abszolút konvergensek!

Def. A fenti megállapítás után definiálhatjuk a következő függvényeket $\forall z \in \mathbb{C}$ esetén:

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$ exponenciális függvény

$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$ szinusz függvény

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$ koszinusz függvény

(szinusz és koszinusz függvény: trigonometrikus függvények)

$$\operatorname{sh}(z) \equiv \sinh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$ szinusz hiperbolikusz fv.

$$\operatorname{ch}(z) \equiv \cosh(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$ koszinusz hiperbolikusz fv.

(szinusz és koszinusz hiperbolikusz fv.: hiperbolikus függvények)

27/

Az exponenciális függvény néhány tulajdonsága

TÉTEL

$$\boxed{\exp(x+y) = \exp(x)\cdot\exp(y)}$$

(addíciós képlet)

Biz: $\exp(x)$ és $\exp(y)$ abszolút konvergensek $\xRightarrow{\text{Mertens-tétel}}$ a Cauchy-szorzatuk abszolút konvergens és megegyezik a szorzatukkal

↳

$$\exp(x)\cdot\exp(y) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!}\right) \underset{\text{Cauchy-szorzat}}{=}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k\cdot\frac{1}{(n-k)!}y^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k y^{n-k} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}}_{(x+y)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y)$$

○!

Áll: $\forall\ x\in\mathbb{R}$ esetén $\exp(x)>0$.

Biz: Ha $x\geq 0 \Rightarrow \exp(x)>0$ a definíció miatt.

Ha $x<0$, akkor a tétel alapján:

$$\exp(0) = 1 = \exp(x-x) = \exp(x)\cdot\exp(-x)$$

$$\Rightarrow \quad \exp(x) = \frac{1}{\underset{-x>0}{\exp(-x)}} > 0$$

○!

28/

A kiszámításból az is látszik, hogy

$$\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Áll: $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$ esetén $\exp(x_1) < \exp(x_2)$.

Biz.

$$\exp(x_2) = \exp((x_2 - x_1) + x_1) = \exp(x_2 - x_1) \cdot \exp(x_1) > 1 \cdot \exp(x_1) = \exp(x_1)$$

$x_2 - x_1 > 0$

Ha $a > 0 \rightsquigarrow \exp(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = 1 + \underbrace{a + \frac{a^2}{2!} + \ldots}_{>0} > 1$

!

Eml: Láttuk: $e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

$$\Rightarrow \boxed{\exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e}$$

Van-e szorosabb kapcsolat az exponenciális függvény és e között?

TÉTEL $\forall r \in \mathbb{Q}$ esetén $\exp(r) = e^r$.

Biz
- $\exp(0) = 1 = e^0$ ✓
- $\exp(1) = e$ ✓

- teljes indukció + addíciós képlet $\Rightarrow \exp(n) = e^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0 \Rightarrow \exp(k) = [\exp(-k)]^{-1} = (e^{-k})^{-1} = e^k$ ✓

$-k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow r \in \mathbb{Z}$-re $\exp(r) = e^r$ ✓

29/ Ha $r = \frac{k}{n}$ $k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

$\hookrightarrow$ $e^k = \exp(k) = \left(\exp\left(\frac{k}{n}\right)\right)^n$ (addíciós képlet)

$\sqrt[n]{\cdot}$ $\hookrightarrow$ $e^{\frac{k}{n}} = \exp\left(\frac{k}{n}\right)$ $\circ$!

látjuk majd: $\boxed{x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exp(x) = e^x}$

Hiperbolikus függvények néhány tulajdonsága

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad z \in \mathbb{C}$$

Köv $x \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x \Rightarrow \operatorname{ch}$ páros fv.

$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x \Rightarrow \operatorname{sh}$ páratlan fv.

TÉTEL $\forall z \in \mathbb{C}$-re

$$\boxed{\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}} \quad \text{és} \quad \boxed{\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\exp(z) = \operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z}$$

Biz

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh} z$$

$$\frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ ps} \\ 1, & \text{ha } n \text{ ptlan} \end{cases}$$

$\operatorname{ch} z$ hasonlóan $\circ$!

TÉTEL (Hiperbolikus függvények addiciós képletei)

$\forall\ x,y \in \mathbb{C}$ -re $\boxed{sh(x+y) = sh\,x \cdot ch\,y + ch\,x \cdot sh\,y}$

$\boxed{ch\,(x+y) = ch\,x \cdot ch\,y + sh\,x \cdot sh\,y}$

Köv $\boxed{ch^2x - sh^2x = 1}$ $\quad y := -x \quad + ch\,0 = 1$

Biz

pl:

$$sh\,x \cdot ch\,y + ch\,x \cdot sh\,y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} =$$

$$= \frac{e^x \cdot e^y - e^{-x} \cdot e^{-y}}{2} = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = sh\,(x+y).$$

A másik ugyanígy (HF)

!

Trigonometrikus függvények tulajdonságai

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in \mathbb{C}$$

Köv: $x \in \mathbb{R} \rightsquigarrow \sin(-x) = -\sin x$ szinusz fv páratlan

$\cos(-x) = \cos x$ koszinusz fv páros

($x \in \mathbb{C}$ -re is igaz)

TÉTEL (Euler-féle összefüggések)

a) $\exp(iz) = \cos z + i \sin z$

b) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ $\qquad \forall z \in \mathbb{C}$

c) $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

31/

Biz

a) $\cos z + i \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} =$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = \exp(iz)$$

$\uparrow$ $i^2 = -1$

b) $\hookrightarrow \exp(-iz) = \cos(-z) + i\sin(-z) = \cos z - i \sin z$

$\hookrightarrow \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \frac{\cos z + i \sin z + \cos z - i \sin z}{2} = \cos z$ ✓

c) $\frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \frac{\cos z + i \sin z - \cos z + i \sin z}{2i} = \sin z$ ✓

TÉTEL $\forall x \in \mathbb{C}$-re

$\boxed{\operatorname{sh}(ix) = i \sin x}$ $\boxed{\sin(ix) = i \operatorname{sh} x}$

$\boxed{\operatorname{ch}(ix) = \cos x}$ $\boxed{\cos(ix) = \operatorname{ch} x}$

Biz: Pl:

$$\operatorname{sh}(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} i \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$= i \sin x$ $\qquad i^{2n+1} = (i^2)^n \cdot i = (-1)^n \cdot i$

A többit ugyanígy (HF)

34/

TÉTEL (Addíciós formulák trigonometrikus függvényekre)

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

Biz pl:

$$\sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \cdot \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} + \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \cdot \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} =$$

$$= \frac{1}{4i}\Big[e^{ix}e^{iy} + e^{ix}e^{-iy} - e^{-ix}e^{iy} - e^{-ix}e^{-iy} + e^{ix}e^{iy} - e^{ix}e^{-iy} + e^{-ix}e^{iy} - e^{-ix}e^{-iy} \Big] =$$

$$= \frac{1}{4i}\Big[e^{i(x+y)} + \cancel{e^{i(x-y)}} - \cancel{e^{-i(x-y)}} - e^{-i(x+y)} + e^{i(x+y)} - \cancel{e^{i(x-y)}} + \cancel{e^{-i(x-y)}} - e^{-i(x+y)} \Big] = \frac{e^{i(x+y)} - e^{-i(x+y)}}{2i} = \sin(x+y)$$

Többi hasonló.

☺!

Köv $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos^2 z + \sin^2 z &= 1 \\ \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z &= 1 \end{aligned}}$$

Biz. $x = y = z \rightsquigarrow \sin 2z = 2\sin z \cdot \cos z$

$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$

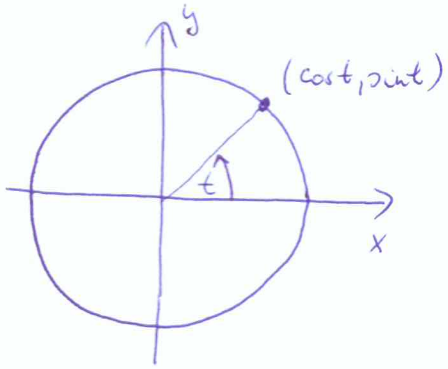
$$\left.\begin{aligned} x &:= z \\ y &:= -z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cos(z-z) = \cos 0 = 1 = \cos z \cdot \cos(-z) - \sin z \cdot \sin(-z) =$$
$$= \cos^2 z + \sin^2 z$$

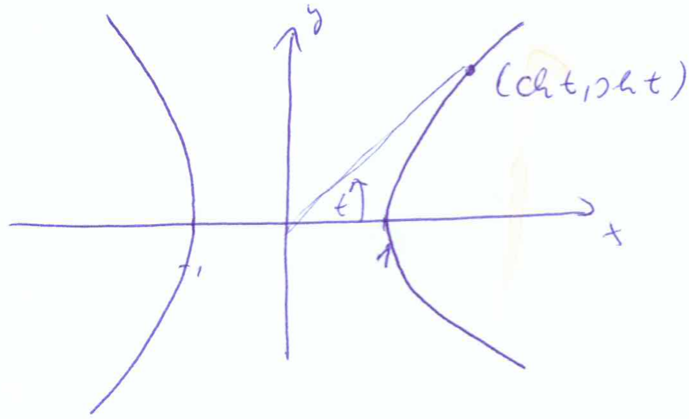
☺!

33/

Geometriai tartalom.

$t \in \mathbb{R} \quad \rightsquigarrow \quad \cos^2 t + \sin^2 = 1 \quad , \quad ch^2 t - sh^2 t = 1$





hiperbola

<u>Köv</u> $\forall\, x \in \mathbb{R}$

$$|e^{ix}| = 1$$

<u>Biz.</u> $|e^{ix}| = |\cos x + i \sin x| = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$. !

<u>Def.</u> $\forall x \in \mathbb{C}$

$tg\, x := \dfrac{\sin x}{\cos x}$ tangens fv, ha $\cos x \neq 0$

$ctg\, x := \dfrac{\cos x}{\sin x}$ kotangens fv, ha $\sin x \neq 0$

$th\, x \equiv \tanh x = \dfrac{sh\, x}{ch\, x}$ tangens hiperbolikus ~~$ch\, x \neq 0$~~ $ch\, x \neq 0$ $(ch\, x > 0)$ ha $x \in \mathbb{R}$

$cth\, x = \coth x = \dfrac{ch\, x}{sh\, x}$ kotangens hiperbolikus $sh\, x \neq 0$