

Valós függvények globális tulajdonságai

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ valós fu ($D_f \subset \mathbb{R}$, $R_f \subset \mathbb{R}$)

Def. f páros, ha $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ & $f(x) = f(-x)$
• f páros
-||- $f(x) = -f(-x)$

Legy. • $f(x) = x^{2k}$ ps, $f(x) = x^{2k+1}$ plm

• páros fu grafja nimm. y-tengelyre $(x, y) \xrightarrow{\text{y-t. tengely}} (-x, y)$
plm fu grafja origóra nimm $(x, y) \xrightarrow{\text{origó}} (-x, -y)$

Def. f d-neműt periódikus, ha $\exists d \neq 0$, $\forall x \in D_f \Rightarrow x+d \in D_f$
 $x-d \in D_f$
& $f(x+d) = f(x)$

megj. ① $k \cdot d$ is periódus $\forall k \in \mathbb{Z}$

② Nem minden periódikus függvény $\exists$ legkisebb periódusa!

$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \text{ racionális} \\ 0, & \text{ha } x \text{ irracionális} \end{cases}$ Dirichlet-fu

periódusai a rac. neműt $\Rightarrow$ $\nexists$ legkisebb periódusa!

Def. f felülől (alsóól) korlátos, ha az $A \subset \mathbb{R}$ halmaza, ha
 $A \subset D_f$ & $\exists K \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) \leq K$ ($f(x) \geq K$) $\forall x \in A$.

f korlátos, ha alsóól & felülől is korlátos.

PE | ① $f(x) = \frac{1}{x}$ hat in $(0,1)$ -ben $\delta > 0$, de
 nem hat in $(0,1)$ -ben (szélső)

② $f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{ha } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

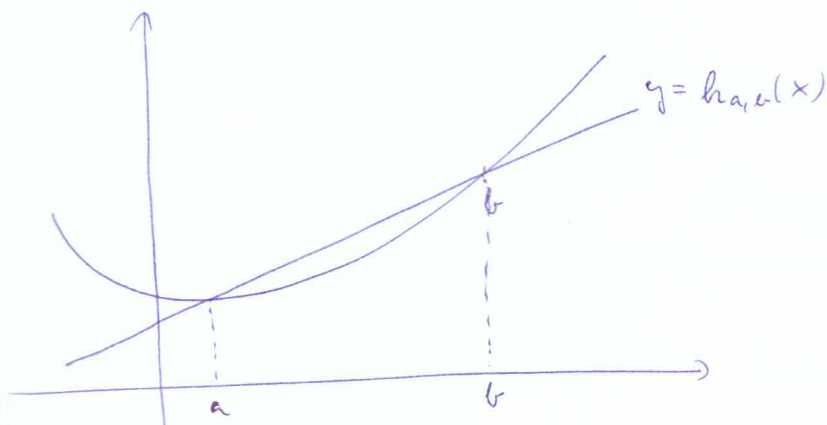
nem hat $\mathbb{R}$ -en, de hat $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ -n.

Def: f monoton növekvő (csökkenő) $A \subset \mathbb{R}$ -en, ha $A \subset D(f)$

$$x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2))$$

(egyszerű, jól megérteni) $\text{jel } f \uparrow (f \downarrow)$

Konvex és konkáv függvények



$(a, f(a))$ és $(b, f(b))$ közötti érintő egyenes: lív

lív egyenese:

$$h_{a,b}(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a)$$

Def. Ist f konvex an I Intervall, so $\forall a, b \in I$:
 $a < x < b \Rightarrow f(x) \leq h_{a,b}(x)$

$$a < x < b \xRightarrow{\text{konkav}} f(x) \geq h_{a,b}(x)$$

(Eigenschaften nicht notwendig)

Def. konvex $\equiv$ a hier a für alle x
 konkav $\equiv$ a hier a für alle x

f konvex I -ben $\Leftrightarrow -f$ konkav I -ben
 konkav konvex

Def. f konvex I -n $\Leftrightarrow \forall a, b \in I, t \in (0, 1)$

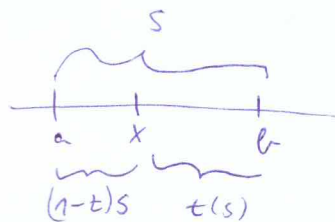
$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

Bew. ! $a < b, t \in (0, 1)$

$$x = ta + (1-t)b \in (a, b)$$

$\uparrow$

$$a = ta + (1-t)a < ta + (1-t)b = x < tb + (1-t)b = b$$



$$h_{a,b}(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (ta + (1-t)b - a) + f(a) =$$

$$= f(a) \left[\underbrace{\frac{-(t-1)a + (t-1)b}{b-a}}_t + 1 \right] + f(b) \underbrace{\frac{(t-1)a + (1-t)b}{b-a}}_{(1-t)}$$

$$= tf(a) + (1-t)f(b) \underset{f \text{ konvex}}{\geq} f(x) = f(ta + (1-t)b)$$

o)

TETEL (Jensen - Ungleichung)

$$f \text{ konvex } I\text{-u} \Leftrightarrow \forall a_1, a_2, \dots, a_n \in I, t_1, t_2, \dots, t_n > 0 \\ t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$$

$$f(t_1 a_1 + \dots + t_n a_n) \leq t_1 f(a_1) + \dots + t_n f(a_n)$$

TETEL: f konvex I -u $\Leftrightarrow \forall a \in I$

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad x \in I \setminus \{a\}$$

monoton wach $I \setminus \{a\}$ -u

Bew. T.H. f konvex I -u!

$$\bullet a, x, y \in I \quad a < x < y$$

$$\hookrightarrow f(x) \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a} (x - a) + f(a)$$

$\Downarrow$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \quad \checkmark$$

$$\bullet \text{ ~~} x < a < y \text{~~ }$$

$$\text{ ~~} f(a) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} (a - x) + f(x) \text{~~ }$$

~~$\Downarrow$~~

$$\text{ ~~} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \text{~~ }$$

et sollte ebenfalls hergeleitet werden!

3/ : f/h $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \uparrow \quad \forall a \in I$

$a, b \in I, a < x < b$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

||

$$f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} (x-a) + f(a) \Rightarrow \text{konvex} \quad \circ!$$

Példák:

① $f(x) = x^2$ konvex, mert pl $\frac{x^2-a^2}{x-a} = (x+a) \uparrow \quad \forall a \in \mathbb{R}$

Jensen-egyenlőség: $t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^2 \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}$$

$$\boxed{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}}$$

aritmetikai-átlag négyzetes-átlag

② $f(x) = \frac{1}{x}$ konvex $(0, \infty)$ -en : $\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x-a} = -\frac{1}{a \cdot x} \uparrow \quad (0, \infty) \setminus \{a\}$

Jensen-egyenlőség: $t_1 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$

$$\frac{1}{\frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n} + \dots + \frac{a_n}{n}} = \frac{n}{a_1 + \dots + a_n} \leq \frac{1}{n} \frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{n} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

$$\boxed{\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}}$$

harmonikus-átlag számtani-átlag