1/

Valós függvények határértéke

Azt szeretnénk vizsgálni, hogy egy adott pont környezetében hogyan viselkedik a függvény.

Def. (Cauchy-féle definíció)

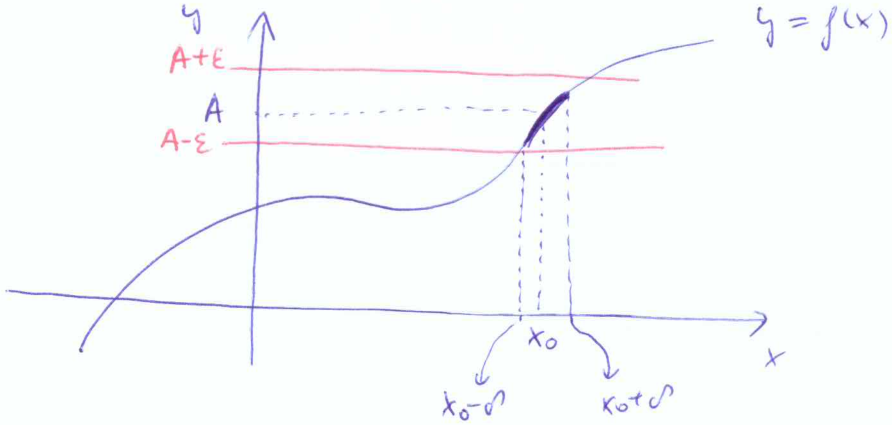
Az $f: D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $x_0 \in \mathbb{R}$ pontban a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha

(i) x_0 a D_f torlódási pontja ($x_0 \in D_f'$)

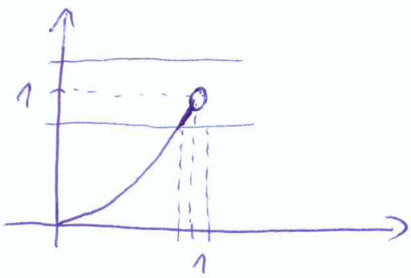
(ii) $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, hogy

$$x \in D_f \text{ és } 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \text{ esetén } |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Jel: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.



Megj: ① x_0 nem feltétlenül eleme D_f-nek



$f: (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_0$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$ $\quad 1 \notin D_f$

2)

② <u>Környezetes átfogalmazás:</u>

$f: D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek $x_0 \in D_f'$-ben a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists \delta > 0$, hogy

$$\forall \; x \in \mathring{B}(x_0, \delta) \cap D_f \text{ esetén } f(x) \in B(A, \varepsilon)$$

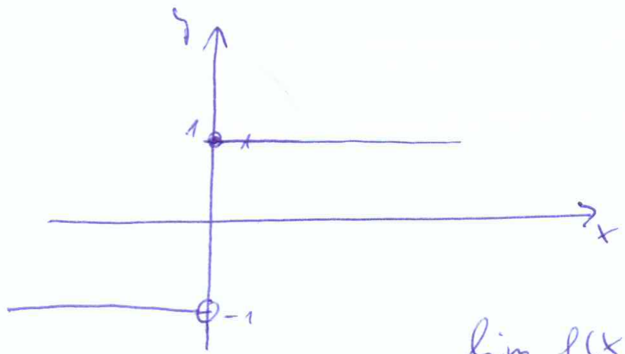
③ Mikor nincs határérték?

$f: D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$-nek $x_0 \in \mathbb{R}$-ben ~~nem~~ <u>nem létezik határértéke</u>,

ha 1) $x_0 \notin D_f'$ <u>vagy</u>

2) $x_0 \in D_f'$ és $\forall A \in \mathbb{R}$ esetén $\exists \varepsilon > 0$, hogy $\forall \delta > 0$-hoz $\exists$ $x \in D_f$, $x \in \mathring{B}(x_0, \delta)$, de $f(x) \notin B(A, \varepsilon)$.

<u>pl.</u>



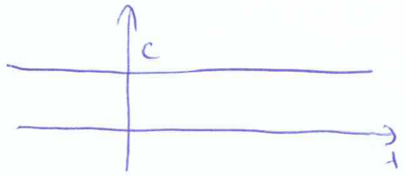
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) \not\exists$$

3/ Példák

① $f(x)=c$ $\quad x\in\mathbb{R}$ $\quad\Rightarrow\quad \forall x_0\in\mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=c$.



mert $\forall\, \varepsilon>0$ $\forall\, \delta>0$ esetén

ha $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-c|=|c-c|=0<\varepsilon$.

② $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{8-2x^2}{x+2}=8$, mert $(-2\notin D_f)$ $\forall\, \varepsilon>0$-ra

$$|f(x)-A| = \left|\frac{8-2x^2}{x+2}-8\right| = \left|\frac{2(4-x^2)}{x+2}-8\right| = \left|2(2-x)-8\right| =$$

$$= |-2x-4| = 2\cdot|x+2| < \varepsilon \quad \text{, ha} \quad |x+2|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Rightarrow \delta(\varepsilon):=\frac{\varepsilon}{2} \quad .!$$

③ $\lim\limits_{x\to -3}\sqrt{1-5x}=4$, mert $\forall\, \varepsilon>0$-ra

$$|f(x)-A| = |\sqrt{1-5x}-4| = \left|\frac{1-5x-16}{\sqrt{1-5x}+4}\right| = \frac{5|x+3|}{\underbrace{\sqrt{1-5x}}_{\geq 0}+4} \leq \frac{5|x+3|}{4} < \varepsilon \text{,}$$

ha $|x+3|<\dfrac{4\varepsilon}{5}$ $\Rightarrow$

$$\delta(\varepsilon):=\frac{4\varepsilon}{5} \quad .!$$

④ $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ $\quad\forall x_0\in\mathbb{R}$, mert $\forall\, \varepsilon>0$-hoz

$|f(x)-A| = |x-x_0|<\varepsilon$, ha $|x-x_0|<\delta$ $\Rightarrow$ $\delta(\varepsilon):=\varepsilon$ . .!

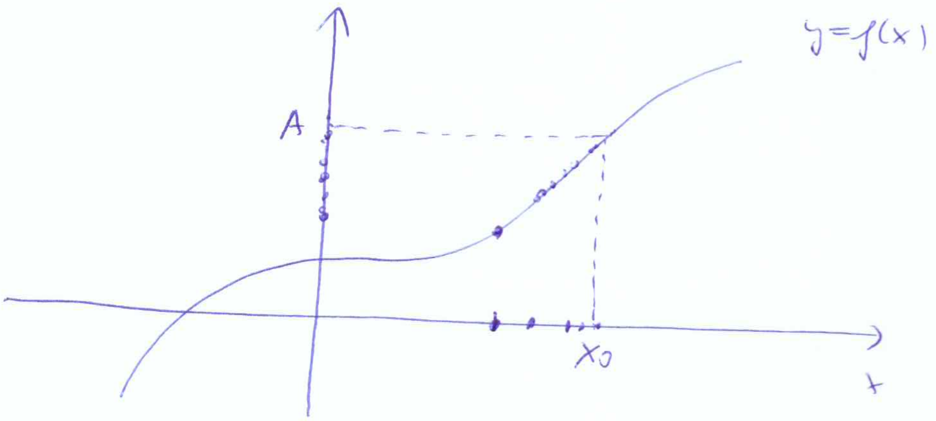
4/

Def. (Heine-féle definíció)

Az $f: D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek $x_0 \in \mathbb{R}$-ben a határértéke $A \in \mathbb{R}$, ha (i) $x_0 \in D_f'$

(ii) $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_f$ sorozatra, mely $x_n \to x_0$

$\Rightarrow \quad f(x_n) \to A$.



TÉTEL (Átviteli elv): A Cauchy- és a Heine-féle definíciók ekvivalensek.

Biz. Tfh Cauchy: $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta > 0$, hogy $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad |f(x) - A| < \varepsilon$.

Legyen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_f$ egy sorozat, melyre $x_n \to x_0$. Ekkor
$x_n \neq x_0$

$\forall\ \delta > 0$-hoz $\exists\ N(\delta) \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy $|x_n - x_0| < \delta$, ha $n > N$

$\Rightarrow \quad \forall\ n > N(\delta(\varepsilon))$ esetén $|f(x_n) - A| < \varepsilon$, vagyis

$f(x_n) \to A$

5/

Tfh Heine: ha $x_n \to x_0$ $(x_n \neq x_0)$ $\Rightarrow$ $f(x_n) \to A$

<u>indirekt:</u> Tfh Cauchy nem igaz, azaz

$\exists\ \varepsilon_0 > 0$, hogy $\forall\ \delta > 0$-hoz $\exists\ x$, melyre

$0 < |x - x_0| < \delta$, de $|f(x) - A| \geq \varepsilon_0$.

$\forall\ n \in \mathbb{N}^+$-re $\delta := \frac{1}{n} > 0$ $\exists\ x_n$, hogy $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$

és $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$.

(megj: ezért kell x_0-nál torlódási pontnak lennie)

De ekkor $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ olyan sorozat, hogy

$$x_n \to x_0, \text{ de } f(x_n) \not\to A \ : \ \lightning$$

!
o o

<u>Példa:</u> 1

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \geq 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

! $x_n := \frac{1}{n} > 0 \Rightarrow x_n \to 0$ és $f(x_n) = 1 \to 1$

de $x_n := -\frac{1}{n} < 0 \Rightarrow x_n \to 0$ és $f(x_n) = -1 \to -1$

$$\Downarrow \quad 1 \neq -1$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) \ \nexists$$

!
(2) $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \sin\frac{1}{x}$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$ $\nexists$, mert

- $x_n := \frac{1}{n\pi} \to 0 \rightsquigarrow \sin\frac{1}{x_n} = \sin n\pi = 0 \to 0$
- $y_n := \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \to 0 \rightsquigarrow \sin\frac{1}{y_n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \to 1$

$\Bigg\}$ $\lim\limits_{n \to \infty} \sin\frac{1}{x_n} \neq \lim\limits_{n \to \infty} \sin\frac{1}{y_n}$!

5/

<u>Következmény</u> (Határérték tulajdonságai ≡ a határértékképzés és az alapműveletek felcserélhetőek)

Legyenek $f, g : E \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in E'$

és tfh $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$. Ekkor

1) $\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} (f(x)+g(x)) = A+B = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$

2) $\forall c \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to x_0} (c\cdot f(x)) = c\cdot \lim_{x\to x_0} f(x) = c\cdot A$$

3) $\lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = [\lim_{x\to x_0} f(x)]\cdot[\lim_{x\to x_0} g(x)] = A\cdot B$

4) $\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}$, ha $g \neq 0$ és $B \neq 0$.

<u>Biz.</u> Az átviteli elv és sorozatok határértékére vonatkozó tételből közvetlenül adódik.

<u>Példa</u>

$\lim_{x\to 0} (3x^2+2x+5) = 5$, mert 0 torlódási pontja $\mathbb{R}$-nek ($D_f = \mathbb{R}$)

láttuk: $\lim_{x\to 0} x = 0$, $\lim_{x\to x_0} c = c$

<u>Tétel</u> $\Longrightarrow$ $\lim_{x\to 0} (3x^2+2x+5) = 3[\lim_{x\to 0} x]^2 + 2\cdot\lim_{x\to 0} x + \lim_{x\to 0} 5 = 3\cdot 0^2 + 2\cdot 0 + 5 = 5$

7/

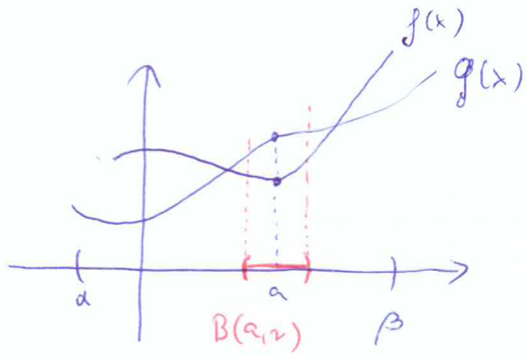
<u>Következmény</u> (A határérték és a $\leq, \geq$ relációk kapcsolata)

Tfh $f,g:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ függvényeknek $\exists$ $a\in(\alpha,\beta)$ helyen határértéke.

(i) Ha $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$, akkor a-nak $\exists$ olyan

$B(a,r)$ környezete, hogy $f(x)<g(x)$ $\forall x\in B(a,r)$.

(ii) Ha $f(x)\leq g(x)$ $\forall x\in(\alpha,\beta)$, akkor $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$



<u>Biz.</u> (i) $\varepsilon := \dfrac{\lim\limits_{x\to a} g(x) - \lim\limits_{x\to a} f(x)}{2} > 0$ -hoz $\exists$ $\cancel{\delta>0}$ $r>0$ $(\delta=r)$,

hogy ha $x\in B(a,r)=(a-r,a+r)$ $\quad (\Leftrightarrow |x-a|<r)$

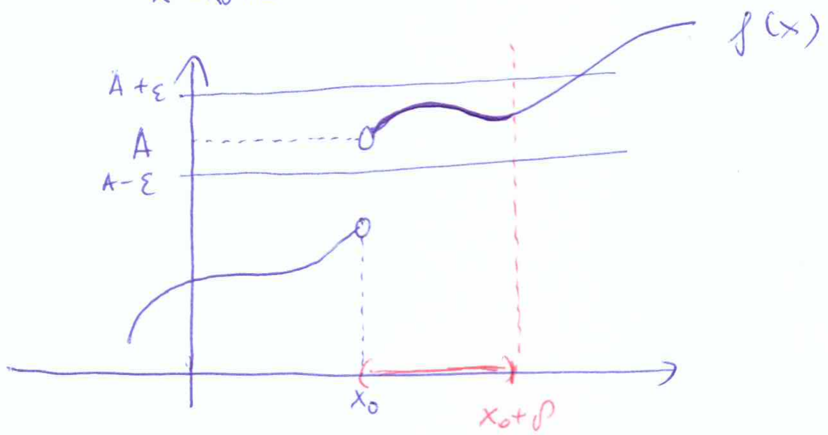
esetén $\left|f(x)-\lim\limits_{x\to a} f(x)\right| < \varepsilon$, $\left|g(x)-\lim\limits_{x\to a} g(x)\right| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to a} f(x)-\varepsilon < f(x) < \lim_{x\to a} f(x)+\varepsilon \underset{\substack{\uparrow \\ \varepsilon \text{ választása}}}{=} \lim_{x\to a} g(x)-\varepsilon < g(x) < \lim_{x\to a} g(x)+\varepsilon$$

(ii) következik (i)-ből (indirekt módon) HF

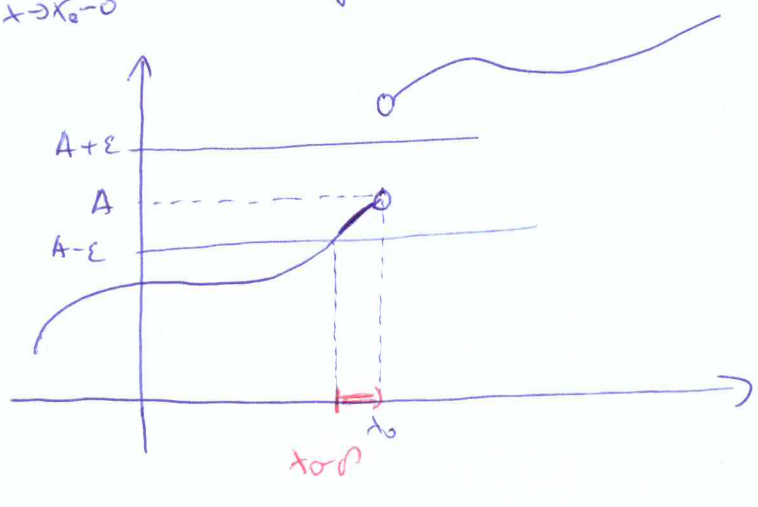
Def. $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 torlódási pontja $[x_0, +\infty) \cap D_f$-nek. Az f függvénynek x_0-ban $\exists$ a jobboldali határértéke, ha $\exists\, A \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall\, x \in D_f$, $x_0 < x < x_0 + \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jel. $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0+0) =: A$



Def. $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 torlódási pontja $(-\infty, x_0] \cap D_f$-nek. Az f függvénynek x_0-ban $\exists$ a baloldali határértéke, ha $\exists\, A \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\forall\, x \in D_f$, $x_0 - \delta(\varepsilon) < x < x_0$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Jel: $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) =: A$



9/

Megj:

① A bal- ill. jobboldali határérték megadható a függvény leszűkítésével is.

Pl: $f: D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ torlódási pontja $[x_0,\infty)\cap D_f$-nek.

$\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\ \exists$, ha $f\big|_{[x_0,\infty)\cap D_f}$-nek $\exists$ határértéke x_0-ban.

② Könnyen látható:

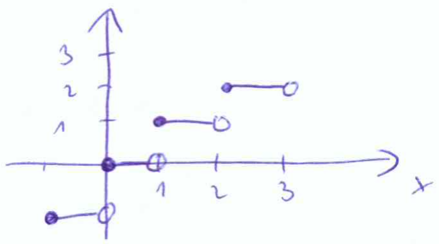
$f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 torlódási pontja $\cancel{[x_0,)}$ D_f-nek.

f-nek $\exists$ határértéke x_0-ban $\iff$ ha $f(x_0+0)$ és $f(x_0-0)$ $\exists$ és $f(x_0+0) = f(x_0-0)$

Ekkor $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0+0) = f(x_0-0)$

Példák

① $f(x) = [x]$ egészrész függvény



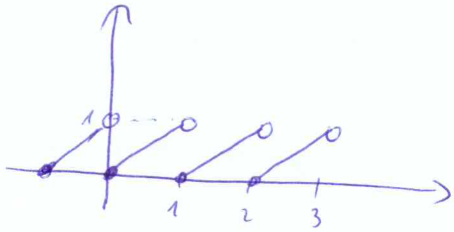
Áll:

$\lim\limits_{x\to 2-0} [x] = 1$ és $\lim\limits_{x\to 2+0} [x] = 2$, mert

ha • $0 < x-2 < 1 \iff 2 < x < 3 \Rightarrow [x] = 2$, vagyis
$|f(x)-2| = |2-2| = 0 < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$-ra
$\hookrightarrow \delta(\varepsilon) = 1$

• $0 < 2-x < 1 \iff 1 < x < 2 \Rightarrow [x] = 1$, vagyis
$|f(x)-1| = |1-1| = 0 < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$-ra
$\hookrightarrow \delta(\varepsilon) = 1$. !

(2) $f(x) = \{x\}$ törtrész függvény



$\{x\} = x - [x]$

$\Downarrow$

$\lim\limits_{x \to 2-0} \{x\} = 1$, $\lim\limits_{x \to 2+0} \{x\} = 0$

Alternatív definíció (Heine)

- $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 torlódási pontja $[x_0, \infty) \cap D_f$-nek

$\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) \; \exists$ ($= A$), ha $\forall \, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatra, melyre

- $x_n \in [x_0, \infty) \cap D_f \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $x_n \to x_0$

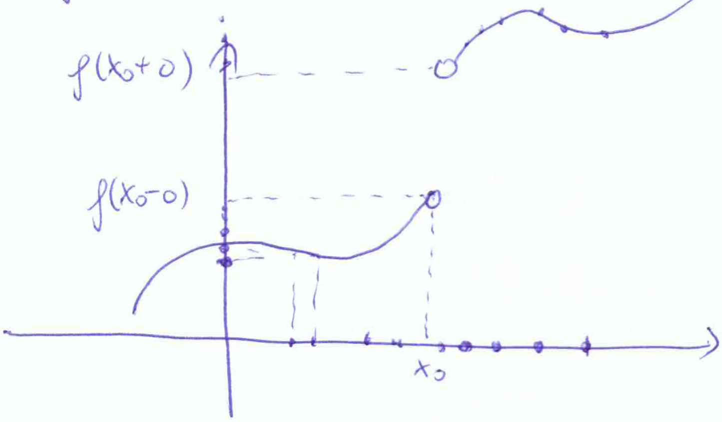
teljesül $f(x_n) \to A$

- $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 torlódási pontja $(-\infty, x_0] \cap D_f$-nek

$A = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) \; \exists$, ha $\forall \, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozatra, melyre

- $x_n \in (-\infty, x_0] \cap D_f \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $x_n \to x_0$

teljesül $f(x_n) \to A$



11/

TÉTEL (monotonitás és egyoldali határérték kapcsolata)

Legyen $f: H \to \mathbb{R}$ monoton függvény és tegyük fel, hogy x_0 a $H \cap (x_0, \infty)$ halmaz torlódási pontja. Ekkor f-nek $\exists$ x_0-ban a jobboldali határértéke és

- $f(x_0+) = \inf\{f(x) : x \in H, x > x_0\}$, ha $f \nearrow$
- $f(x_0+) = \sup\{f(x) : x \in H, x > x_0\}$, ha $f \searrow$.

Biz.

Tfh $f \nearrow$. $\quad A := \inf\{f(x) : x \in H, x > x_0\}$

$\Rightarrow$ $\forall\, x \in H, x > x_0$ esetén $f(x) \geq A$ (A alsó korlát)

másrészt $\forall\, M > A$-hoz $\exists\, x_1 \in H$, $x_1 > x_0$, hogy $f(x_1) < M$ (A legnagyobb alsó korlát)

$\Rightarrow$ $x_0 < x < x_1$ esetén, mivel $f \nearrow$, ezért

$$A \leq f(x) \leq f(x_1) < M$$

$\Rightarrow$ A $\forall$ $B(A, \varepsilon)$ környezetéhez $\exists$ x_0 $B(x_0, \delta)$ környezete, hogy ha $x \in B(x_0, \delta) \cap H$, $x > x_0$, akkor

$$f(x) \in B(A, \varepsilon)$$

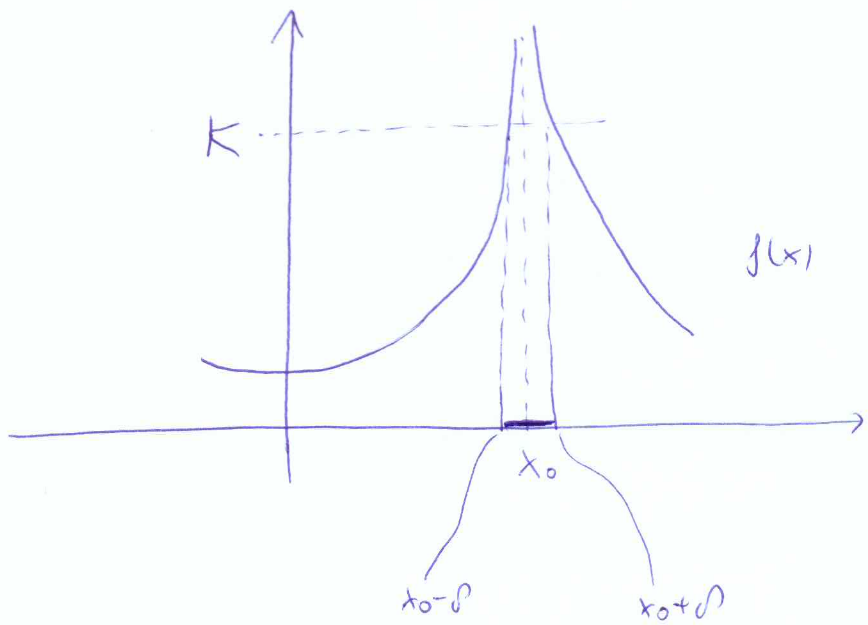
$f \searrow$ hasonlóan (HF) $\emptyset$

Hasonlóan baloldali határértéke:

TÉTEL Legyen $f: H \to \mathbb{R}$ monoton és H-n x_0 pont torlódási pontja $(-\infty, x_0) \cap H$-nak. Ekkor f-nek $\exists$ x_0-ban baloldali határértéke és

- $f(x_0-) = \sup\{f(x) : x \in H, x < x_0\}$, ha $f \nearrow$
- $f(x_0-) = \inf\{f(x) : x \in H, x < x_0\}$, ha $f \searrow$

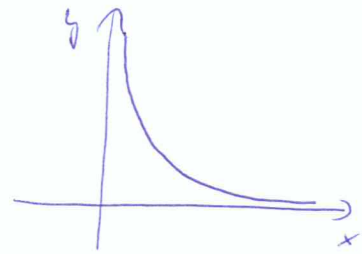
Def. Az $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek $x_0 \in D_f'$-ben a határértéke $+\infty$ (vagy $-\infty$), ha $\forall$ K-hoz $\exists$ $\delta(K) > 0$, hogy $\forall$ $x \in D_f$, $0 < |x - x_0| < \delta(K)$ esetén $f(x) > K$ (vagy $f(x) < K$)



jel: $$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad (-\infty)$$

13/

Példa: $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x}$



$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, mert

- 0 torlódási pontja $\mathbb{R}^+$-nak
- $\forall K$-hoz $f(x)=\frac{1}{x} > K$, ha $0<x<\frac{1}{K}$, ha $K>0$

$$\Rightarrow \delta(K) := \begin{cases} \frac{1}{K}, & \text{ha } K>0 \\ \text{tetsz.}, & \text{ha } K\le 0\end{cases}$$

Def: Az $x=x_0$ egyenes az f függvény <u>függőleges aszimptotája</u>, ha f határértéke (egyoldali is lehet) $+\infty$ vagy $-\infty$.

Def (Heine)

$f: D_f \subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0 \in D_f'$ akkor $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\ (-\infty)$, ha

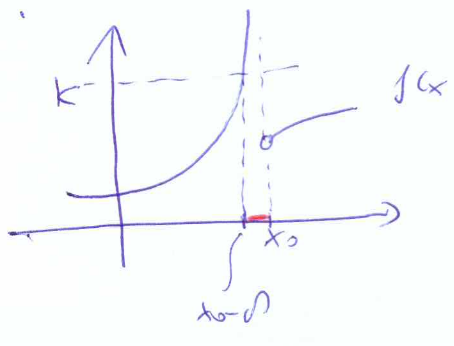
$\forall (x_n)_{\in \mathbb{N}} \subset D_f$ sorozatra, melyre $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n)\to +\infty\ (-\infty)$.

Megj: Egyoldali határértékek ugyanígy értelmezhetők.

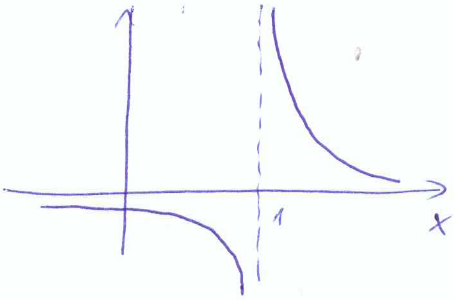
PL: • $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = +\infty$, ha x_0 torlódási pontja

$(-\infty, x_0]\cap D_f$-nek és $\forall K$-hoz $\exists\, \delta(K)>0$, hogy

ha $x_0-\delta<x<x_0$, akkor $f(x)>K$.



Példa $f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$

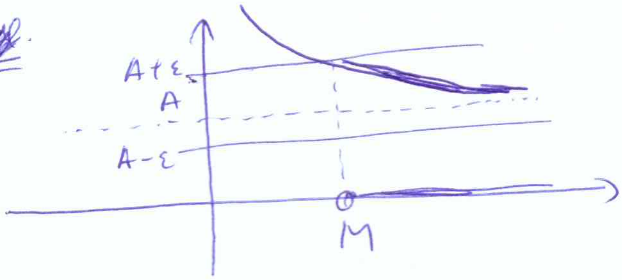


$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = -\infty$

$\Rightarrow$ $x=1$ függőleges aszimptota

$\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = +\infty$

Def. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ felülről (alulról) nem korlátos halmaz, $f: H \to \mathbb{R}$ függvénynek $+\infty$-ben ($-\infty$-ben) $\exists$ határértéke és ez $A \in \mathbb{R}$, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, M \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\, x \in H$ és $x > M$ ($x < M$) esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$. Jel. $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = A$

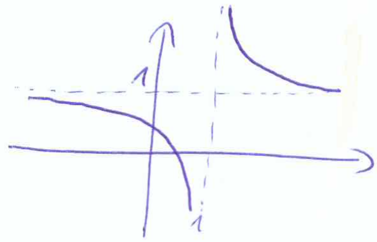


Megj. (Heine korollárium)

Pl. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, ha $\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D_f$, $x_n \to \infty$ esetén $f(x_n) \to A$.

Def. Ha $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ $\left(\text{vagy } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A\right)$, akkor a f-nek $+\infty$-ben (vagy $-\infty$-ben) $y=A$ egyenletű <u>vízszintes aszimptotája</u> van.

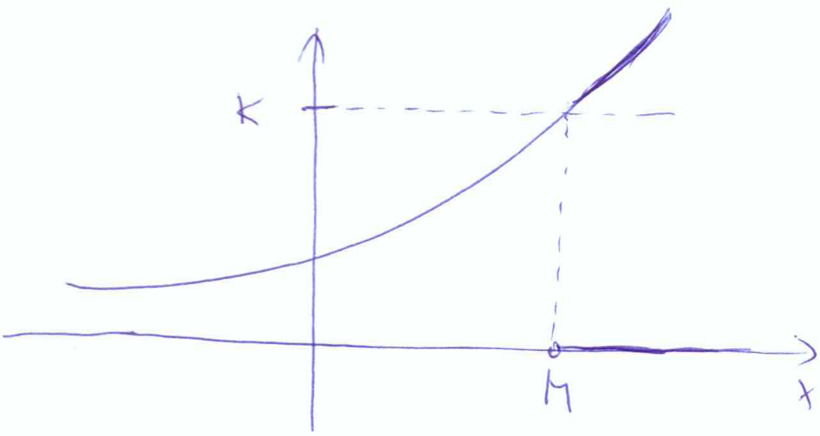
Pl) $f: \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{x}{x-1}$



$$f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \Rightarrow \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$$

- $x=1$-ben függőleges aszimptota
- $\pm\infty$-ben $y=1$ vízszintes aszimptota.

Def. Legyen $H \subseteq \mathbb{R}$ felülről (alulról) nem korlátos halmaz, $f: H \to \mathbb{R}$ függvénynek $+\infty$-ben ($-\infty$-ben) a határértéke $+\infty$, ha $\forall\, K \in \mathbb{R}$-hez $\exists\, M \in \mathbb{R}$, hogy ha $x \in H$ és $x > M$ ($x < M$), akkor $f(x) > K$.



Jel: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$

<u>Hasonlóan</u> $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$

16)

Def. Az $\ell(x) = ax + b$ lineáris függvény grafikonját (egyenesét) az $f : (c, \infty) \to \mathbb{R}$ $\quad$ ($f : (-\infty, c) \to \mathbb{R}$) függvény <u>lineáris aszimptotája</u> $+\infty$-ben ($-\infty$-ben), ha

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - \ell(x)] = 0 \qquad \left(\lim_{x \to -\infty} [f(x) - \ell(x)] = 0 \right).$$

Megj. mivel a $\displaystyle\lim_{x \to \infty} (ax + b) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } a > 0 \\ -\infty, & \text{ha } a < 0 \end{cases}$

(hasonlóan $-\infty$-ben)

$\Rightarrow$ szükséges, hogy $\displaystyle\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ legyen.

<u>Lineáris aszimptota meghatározása:</u>

1) $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$ vagy $-\infty$ ✓

2) $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} =: a \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists$ lineáris aszimptota

3) $\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - ax) =: b$

$$\Downarrow$$

$$\ell(x) = ax + b$$

17/

Példák

(1)
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-2x}{x+3} = -2 \quad ,\text{mert}$$

$$|f(x)-A| = \left|\frac{1-2x}{x+3}+2\right| = \left|\frac{1-2x+2x+6}{x+3}\right| = \frac{7}{|x+3|} < \varepsilon$$

$$\Uparrow$$

$$|x+3| > \frac{7}{\varepsilon}$$

- ha $x\to\infty$ $\quad x+3 > \frac{7}{\varepsilon} \Rightarrow x > \frac{7}{\varepsilon} - 3 =: M$
- ha $x\to-\infty$ $\quad -(x+3) > \frac{7}{\varepsilon} \Rightarrow x < -\left(\frac{7}{\varepsilon}+3\right) := M$

.!

(2)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad ,\text{mert}$$

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 0\right| \le \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \Rightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow M := \frac{1}{\varepsilon}$$

(3)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cos x+2}{2-\cos x} \quad \nexists$$

- $x_n := 2n\pi \to \infty \rightsquigarrow \cos x_n = \cos 2n\pi = 1$

$$\hookrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\cos x_n + 2}{2-\cos x_n} = \frac{1+2}{2-1} = 3$$

- $y_n := \frac{\pi}{2} + 2n\pi \to \infty \rightsquigarrow \cos y_n = \cos\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right) = 0 \to 0$

$$\hookrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\cos y_n + 2}{2-\cos y_n} = \frac{0+2}{2-0} = 1$$