1/

Nevezetes határértékek

(1) Polinomok határértéke

$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ v. $\mathbb{C}$ együtthatók

$$P(z) := a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \qquad z \in \mathbb{C} \text{ v } \mathbb{R}$$

n-ed fokú polinom

Láttuk: $\lim\limits_{z\to\alpha} z = \alpha \implies \lim\limits_{z\to\alpha} a_k z^k = a_k \alpha^k \qquad \alpha \in \mathbb{C}\ (\mathbb{R})$

Köv $\lim\limits_{z\to\alpha} P(z) = P(\alpha)$

Tegyük fel, hogy $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $\cancel{x} \in \mathbb{R}$

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = a_n x^n \left(1 + a_{n-1}\frac{x^{n-1}}{a_n x^n} + \dots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)$$

$$= a_n x^n \underbrace{\left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_0}{a_n x^n}\right)}_{\downarrow \text{ ha } x \to \pm\infty \atop 1}$$

Köv

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \begin{cases} \infty, & \text{ha } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{ha } a_n < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \left.\begin{cases} \infty, & \text{ha } a_n > 0 \text{ és } n \text{ páros} \\ & \phantom{\text{ha }} a_n < 0 \text{ és } n \text{ páratlan} \\ -\infty, & \text{ha } a_n > 0 \text{ és } n \text{ páratlan} \\ & \phantom{\text{ha }} a_n < 0 \text{ és } n \text{ ps} \end{cases}\right\} = (-1)^n \operatorname{sgn}(a_n) \cdot (+\infty)$$

2/

② Racionális törtfüggvények

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$
$$Q(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0 \qquad \text{polinomok}$$

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$ racionális törtfüggvény, ha $a_i, b_j \in \mathbb{Q}$ $\forall i,j$

Tfh $Q(z)$ zérushelyeinek halmaza: Λ $\quad (\alpha \in \Lambda \Leftrightarrow Q(\alpha) = 0)$

~~Tétel~~ Ha $\alpha \notin \Lambda \Rightarrow \lim\limits_{z \to \alpha} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(\alpha)}{Q(\alpha)}$.

Ha $\alpha \in \Lambda \Rightarrow \exists$ $S(z)$ polinom, hogy $S(\alpha) \neq 0$ és

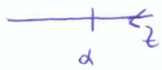
$$Q(z) = (z-\alpha)^r S(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{1}{(z-\alpha)^r} \frac{P(z)}{S(z)} \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$$

Szorítkozzunk $\mathbb{R}$-re $(z \in \mathbb{R} \setminus \Lambda)$

$$\hookrightarrow \lim_{z \to \alpha} \frac{1}{(z-\alpha)^r} = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } r \text{ páros} \\ \nexists, & \text{ha } r \text{ páratlan} \end{cases}$$

ha $r = 2k+1$ $\quad \lim\limits_{z \to \alpha+0} \frac{1}{(z-\alpha)^r} = +\infty \qquad \lim\limits_{z \to \alpha-0} \frac{1}{(z-\alpha)^r} = -\infty$



$\Uparrow$
$z > \alpha$

$z < \alpha$

Köv $\Rightarrow \frac{P(z)}{Q(z)}$ határértéke α-ban meghatározható

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0} = \frac{z^n}{z^m} \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{z} + \ldots + \frac{b_0}{z^m}} =$$

$$= z^{n-m} \underbrace{\frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{z} + \ldots + \frac{b_0}{z^m}}}_{\downarrow \atop \frac{a_n}{b_m}, \text{ ha } z \to \pm\infty}$$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{z \to \pm\infty} z^{n-m}$ meghatározásával meghatározható a határérték $\pm\infty$-ben.

(3) Analitikus függvények határértéke

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ x_0 középpontú hatványsor

Konvergenciatartománya: $K := \{ x \in \mathbb{R} : \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \text{ konvergens} \}$

$D_f := \operatorname{int} K = (x_0 - R, x_0 + R)$ $(R \neq 0)$ R: konvergenciasugár

$f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$

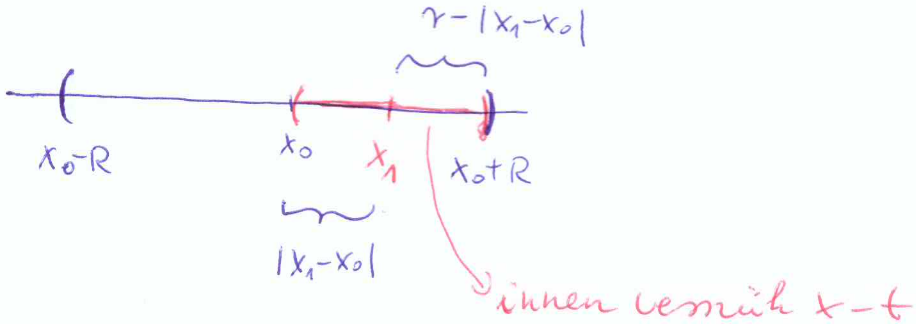
TÉTEL (Transzformációs tétel)

Legyen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ hatványsor konvergenciasugara pozitív $(R > 0)$, és $x_1 \in \operatorname{int} K = (x_0 - r, x_0 + r)$ tetszőleges. Ekkor $\forall x \in \operatorname{int} K$-ra, melyre $|x - x_1| < R - |x_1 - x_0|$, teljesül, hogy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (x-x_i)^i \quad \text{, ahol}$$

$$b_i = \sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} a_n (x_1 - x_0)^{n-i}$$

4/ Biz



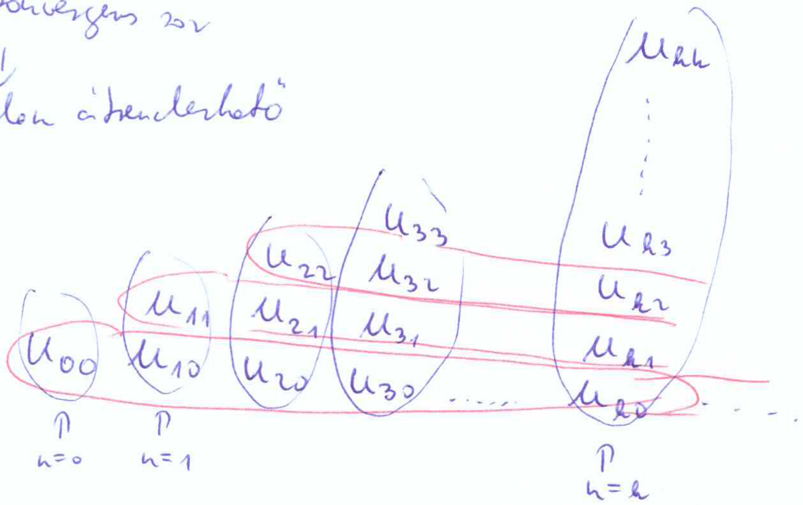
$$x-x_0=(x-x_1)+(x_1-x_0)$$

$$\hookrightarrow\quad (x-x_0)^n=[(x-x_1)+(x_1-x_0)]^n \underset{\substack{\uparrow\\ \text{binomiális tétel}}}{=} \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(x-x_1)^i(x_1-x_0)^{n-i}$$

$\Downarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\underbrace{a_n\binom{n}{i}(x-x_1)^i(x_1-x_0)^{n-i}}_{u_{ni}}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}u_{ni} \ominus$$

$\uparrow$
abszolút konvergens sor
$\Downarrow$
tetszőlegesen átrendezhető



helyette csoportosítsuk így:

$$\ominus \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty}u_{ni}=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{n=i}^{\infty}a_n\binom{n}{i}(x-x_1)^i(x_1-x_0)^{n-i}=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}b_i(x-x_1)^i \quad \text{, ahol}$$

$$b_i=\sum_{n=i}^{\infty}a_n\binom{n}{i}(x_1-x_0)^{n-i}$$

$\circ$!

5)

TÉTEL $f: D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ analitikus függvények $\forall x_1 \in D_f$-ben $\exists$ a határértéke és

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$$

Biz. ! $x_1 \in (x_0 - R, x_0 + R)$ tetsz. (konvergenciapont)

Láttuk, x_1-nek $\exists$ $\delta > 0$ sugarú környezete, hogy

$\forall$ $x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$-ra

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (x - x_1)^i$$

Legyen $0 < r < \delta$ $\Rightarrow$ $\sum_{i=0}^{\infty} b_i r^i$ konvergens

$$\sigma := \sum_{i=1}^{\infty} b_i r^{i-1} = b_1 + b_2 r + b_3 r^2 + \dots$$

megmutatjuk, hogy $\boxed{\lim_{x \to x_1} f(x) = b_0}$

Ha $|x - x_1| < r$, akkor

$$|f(x) - b_0| = \Big| \underbrace{(x - x_1) \sum_{i=1}^{\infty} b_i (x - x_1)^{i-1}}_{\cancel{\sum_{i=0}^{\infty} b_i (x-x_1)^i = b_0 + b_1} \;\; b_1 (x-x_1) + b_2 (x-x_1)^2 + \dots} \Big| \leq |x - x_1| \cdot \sigma$$

$|x - x_1| < r$

vagyis $|f(x) - b_0|$ tetszőlegesen kicsi, ha $|x - x_1|$ elég kicsi

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_1} f(x) = b_0 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{\binom{n}{0}}_{1} (x_1 - x_0)^n = f(x_1)$$

6)

~~Köv $\forall x \in \mathbb{R}$ exp~~

Köv Tfh $\exists R > 0$ és $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ esetén

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n .$$

Ekkor

$a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, vagyis f egyértelműen írható fel x_0 körüli hatványsorként.

Biz.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = a_0 = b_0 \quad ✓$$

osztva $(x - x_0)$-lal $\quad f(x) - a_0$ -t

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (x - x_0)^{n-1} \qquad \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R),\ x \neq x_0$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) = a_1 = b_1 \quad ✓$$

$\vdots$

végtelenségig folytathatjuk

$\circ!\circ$

Köv $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

- $\lim_{x \to \alpha} \exp(x) = \exp(\alpha)$
- $\lim_{x \to \alpha} \sin(x) = \sin(\alpha)$
- $\lim_{x \to \alpha} \cos(x) = \cos(\alpha)$
- $\lim_{x \to \alpha} \operatorname{sh}(x) = \operatorname{sh} \alpha$
- $\lim_{x \to \alpha} \operatorname{ch}(x) = \operatorname{ch} \alpha$

7/

Példák

(1) $$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1}$$

Heine-féle def $\rightsquigarrow$! $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \to 0$ és $x_n \neq 0$ tetsz.

láttuk korábban: ha $|x| < \frac{\pi}{2}$, akkor

$$|\sin x| \le |x| \le |\operatorname{tg} x| = \frac{|\sin x|}{|\cos x|}$$

$\hookrightarrow$ $$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad \forall \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

így $$\cos x_n < \frac{\sin x_n}{x_n} < 1$$

$$\underset{n\to\infty}{\downarrow} \qquad\qquad \downarrow$$

$$\cos 0 = 1 \qquad\qquad 1$$

+ rendőrelv $\Rightarrow$ $$\frac{\sin x_n}{x_n} \to 1$$ $\circ$!

(2) $$\boxed{\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

Heine-féle def $\rightsquigarrow$! $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ sorozat, melyre $x_n \to \infty$

$\hookrightarrow$ $K = 1$-hez $\exists$ N küszöbindex, hogy $x_n \ge 1$, ha $n > N$

$\forall$ $n > N$-hez $\exists$ $k = k(n) \in \mathbb{N}$, hogy

$$k \le x_n < k+1 \qquad \text{és} \qquad k(n) \to \infty, \text{ ha } n \to \infty$$

$$\frac{k+1}{k+2}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} = \frac{k+1}{k+2}\underbrace{\left(1+\frac{1}{k+1}\right)}_{\frac{k+2}{k+1}}\cdot\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k} = \left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k} \le$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ k\le x_n<k+1}}{\le} \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \le \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1} = \frac{k+1}{k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}$$

vagyis

$$\frac{k+1}{k+2}\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1} \le \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \le \frac{k+1}{k}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}$$

$\downarrow n\to\infty\ (\Rightarrow k\to\infty)$ $\qquad\qquad$ $\downarrow n\to\infty\ (\Rightarrow k\to\infty)$

$1\cdot e$ $\qquad\qquad$ $1\cdot e$

rendőrelv $\Rightarrow$ $\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e$ $\quad\forall\ x_n\to\infty$ sorozatra

∘!

Megj: $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e}$

ha $x<-1$, akkor

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(\frac{-x}{-x-1}\right)^{-x} = \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x} = \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{-x-1}\right)$$

$y := -x-1 \rightsquigarrow x\to-\infty$ esetén $y\to\infty$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\cdot\left(1+\frac{1}{y}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ld. előbb}}}{=} e$$

∘!

Összefoglalás:

$$\boxed{\lim_{|x|\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e}$$

③ Adjuk meg $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$ függvény lineáris aszimptotáját, ha létezik!

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2-x+1} = \infty$ ✓

- $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1 =: a$

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-a\cdot x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-x\right) =$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1-x^2}{\sqrt{x^2-x+1}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2} =: b$$

$\Rightarrow$ lineáris aszimptota: $\underline{\underline{y = ax+b = x-\frac{1}{2}}}$

10/

Egy jól használható tétel:

TÉTEL Ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$, $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$ és

$\lim_{x\to x_0} g(x)[f(x)-1] = b$, akkor $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = e^b$.

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

Biz

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} [1 + (f(x)-1)]^{g(x)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}} \right]^{g(x)\cdot[f(x)-1]} = e^b$$

② példa

$\lim_{x\to x_0} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)-1} = \pm\infty$

$\lim_{x\to x_0} g(x)[f(x)-1] = b$

o!

11)

Példák

(1)
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = ?$$

$$f(x) := \frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}, \quad g(x) := \frac{1}{\sin x}$$

$$\hookrightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x} \underset{\text{lattuk}}{=} \frac{1+\operatorname{tg}0}{1+\sin 0} = \frac{1+0}{1+0} = 1 \checkmark$$

$$\lim_{x\to 0}|g(x)| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{1}{\sin x}\right| \underset{\lim\limits_{x\to 0}\sin x = \sin 0 = 0}{=} +\infty \checkmark$$

Kiszámoljuk

$$\hookrightarrow \lim_{x\to 0} g(x)[f(x)-1] = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}-1\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\underbrace{\left(\frac{1+\operatorname{tg}x-1-\sin x}{1+\sin x}\right)}_{\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{1+\sin x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{1+\sin x} \underset{\text{láttuk}}{=}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos 0}-1}{1+\sin 0} = \frac{1-1}{1+0} = 0 =: b$$

Köv.:
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} = e^0 = 1$$

!

12/ ②

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = ? \quad , \quad a \neq k\cdot\pi \; , \; k\in\mathbb{Z}$$

$$f(x) := \frac{\sin x}{\sin a} \quad , \quad g(x) := \frac{1}{x-a}$$

↳ ∘ $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{\sin x}{\sin a} = \frac{\sin a}{\sin a} = 1$ ✓

∘ $\lim_{x\to a} |g(x)| = \lim_{x\to a} \left|\frac{1}{x-a}\right| = \infty$ ✓

∘ $\lim_{x\to a} g(x)\left[f(x)-1\right] = \lim_{x\to a} \frac{1}{x-a}\left[\frac{\sin x}{\sin a} - 1\right] =$

$$= \lim_{x\to a} \frac{1}{x-a}\, \frac{\sin x - \sin a}{\sin a} =$$

$$\boxed{\sin x - \sin a = 2\cos\frac{x+a}{2}\cdot \sin\frac{x-a}{2}} \quad \text{HF}$$

$$= \lim_{x\to a} \underbrace{\cos\frac{x+a}{2}}_{\downarrow\; \cos\frac{2a}{2} = \cos a} \cdot \frac{1}{\sin a} \cdot \underbrace{\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}}_{\downarrow\; 1} = \frac{\cos a}{\sin a} = \operatorname{ctg} a$$

$y := \frac{x-a}{2} \Rightarrow y\to 0$, ha $x\to a$

és $\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}} = \operatorname{ctg} a}$$

∘ |

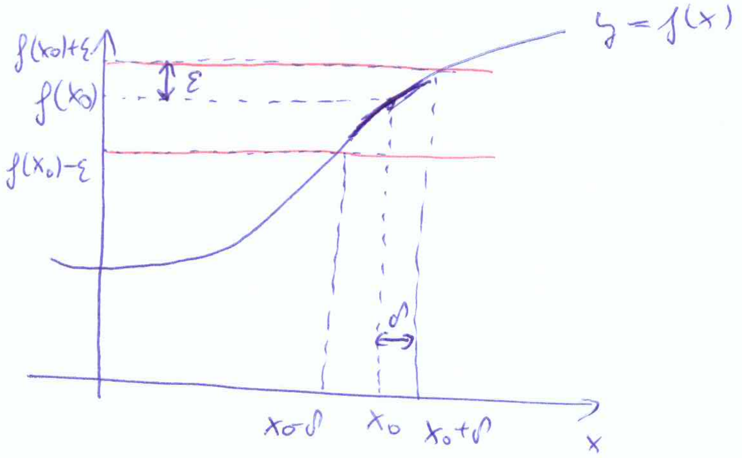
13/

Függvények folytonossága

Def: $f: E\subset \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonos az $x_0\in E$ pontban, ha

$\forall \varepsilon>0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon)>0$, hogy $\forall x\in E$, $|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$

esetén $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.



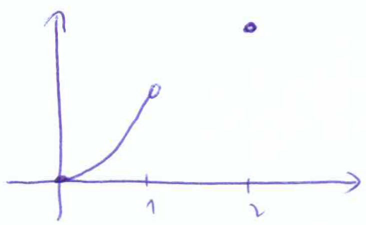
„$f(x)$ tetszőlegesen kicsit tér el $f(x_0)$-tól, ha x elég közel van x_0-hoz"

Megj: ① Cauchy-féle definíció

② $\boxed{\text{Ha } x_0 \text{ } E \text{ torlódási pontja } (E\equiv D_f), \text{ akkor } f \text{ folytonos } x_0\text{-ban} \iff \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)}$

↳ ha x_0 az értelmezési tartomány izolált pontja, akkor a def alapján a függvény folytonos

pl: $f(x):=\begin{cases} x^2, & \text{ha } 0\le x<1 \\ 2, & \text{ha } x=2\end{cases}$ $\quad D_f=[0,1)\cup\{2\}$



folytonos függvény

14/

Köv $f: E\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonos ~~to-ban~~ $x_0\in E$-ben

$\iff \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset E$ sorozatra, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ teljesül, hogy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

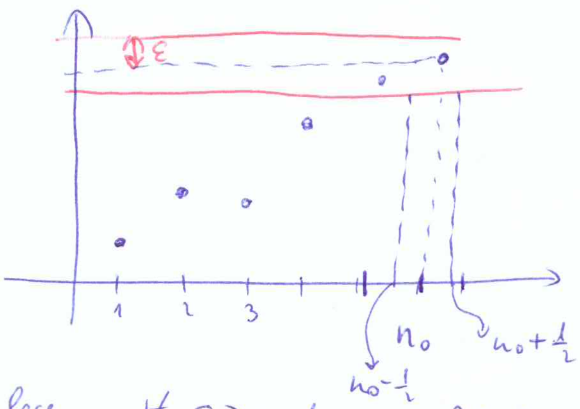
Megj. (1) Átviteli elv következménye ⇝ Heine-féle definíció

(2) Környezetes átfogalmazása a Cauchy-definíciónak:

$f: E\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x_0\in E$-ben folytonos, ha $\forall\,\varepsilon>0$-hoz $f(x_0)$ $B(f(x_0),\varepsilon)$ környezetéhez $\exists\,\delta>0$, hogy ha $x\in B(x_0,\delta)\cap E$, akkor $f(x)\in B(f(x_0),\varepsilon)$

Példák

(1) $f: \underset{\mathbb{R}}{\overset{\cap}{\mathbb{N}}}\to\mathbb{R}$ függvények (sorozatok) folytonosak $\mathbb{N}$-en.



! $n_0\in\mathbb{N}$ tetszőleges. $\forall\,\varepsilon>0$-hoz $\delta(\varepsilon) := \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $|n-n_0|<\frac{1}{2}$ csak $n=n_0$-ra teljesül

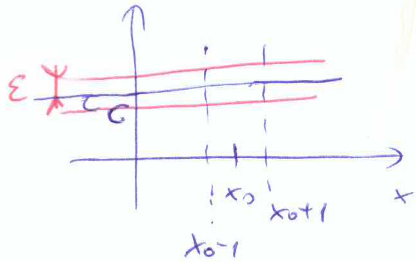
↳ $|f(n)-f(n_0)| = |f(n_0)-f(n_0)| = 0 < \varepsilon$ $\Rightarrow$ f folytonos n_0-ban $\forall\, n_0\in\mathbb{N}$ esetén!

15/

(2) $f(x)=c \quad \forall x\in\mathbb{R}$ (konstans függvény)

$\forall x_0\in\mathbb{R}$ -ben folytonos, mert $\forall\ \varepsilon>0$ -hoz $\delta(\varepsilon):=1$ választással:

$$x\in\mathbb{R},\quad |x-x_0|<1 \implies |f(x)-f(x_0)|=|c-c|=0<\varepsilon$$



(3) $f(x)=x \quad \forall x_0\in\mathbb{R}$ -ben folytonos, mert

$\forall\ \varepsilon>0$ -hoz $\delta(\varepsilon):=\varepsilon$ választással:

$$x\in\mathbb{R} \text{ és } |x-x_0|<\delta(\varepsilon)=\varepsilon \implies |f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\varepsilon$$

(4) $f(x):=\sqrt[n]{x}$, $(x\geq 0)$ folytonos $x_0=0$ -ban:

$\forall\ \varepsilon>0$ -hoz $\delta(\varepsilon):=\varepsilon^n \implies \forall x\geq 0,\ |x-0|=x<\varepsilon^n$ esetén

$$|f(x)-f(0)|=|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{0}|=\sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{\varepsilon^n}=\varepsilon$$

<u>TÉTEL</u> Hatványsor összegfüggvénye folytonos az értelmezési tartomány minden pontjában.

<u>Biz.</u> $f(x):=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)$ ha $x\in(x_0-R,x_0+R)=D_f$

láttuk: $\lim_{x\to\alpha} f(x)=f(\alpha) \quad \forall\ \alpha\in(x_0-R,x_0+R)$

$\Downarrow$ α belső pontja D_f-nek

$f(x)$ folytonos α-ban

Köv ① $\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ folytonos $\forall\, x\in\mathbb{R}$ esetén.

láttuk: ha $r\in\mathbb{Q}$, akkor $\exp(r)=e^r$.

$\forall\, x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$-hoz $\exists\, (r_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{Q}$ sorozat, hogy $r_n\to x_0$

x_0 torlódási pontja $\mathbb{R}$-nek $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0}\exp(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\exp(r_n)=$

$$=\lim_{n\to\infty}e^{r_n}\underset{\circledast}{=}e^{\lim_{n\to\infty}r_n}=e^{x_0}$$

.!

$\Rightarrow$ $\boxed{\forall\, x\in\mathbb{R} \text{ esetén } \exp(x)=e^x}$

② $\sin x, \cos x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$ folytonos $\forall\, x\in\mathbb{R}$ esetén

Néhány érdekes példa

① $f(x):=\begin{cases}1, & \text{ha } x\in\mathbb{Q}\\ 0, & \text{ha } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ Dirichlet-függvény

* egyetlen pontban sem folytonos

Biz $a\in\mathbb{R}$ tetsz. $\exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{Q}$ sorozat, hogy $x_n\to a$

$\exists\, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sorozat, hogy $y_n\to a$

$f(x_n)=1\to 1$, de $f(y_n)=0\to 0$

$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to a} f(x)\ \nexists$ $\Rightarrow$ f nem folytonos a-ban

.!

17)

(2) $f(x) := \begin{cases} 0 & , \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & , \text{ha } x = \frac{p}{q}, \ p,q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0, \ (p,q) = 1 \end{cases}$

Riemann-függvény

Áll: A Riemann-fv minden irracionális helyen folytonos, de egyetlen racionális helyen sem folytonos.

Biz:
Szorítkozunk csak $(-1,1)$-re az egyszerűség kedvéért!

$a \in (-1,1) \rightsquigarrow$ megmutatjuk, hogy $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ (ez elég)

kell: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |f(x) - 0| < \varepsilon$, ha $|x-a| < \delta$, $a \in (-1,1)$

$\varepsilon > 0$ tetsz $\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$ esetén $|f(x)| < \frac{1}{n}$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

vagy: $x = \frac{p}{q}$, $(p,q) = 1$ és $q > n$, akkor $|f(x)| = |f(\frac{p}{q})| = \frac{1}{q} < \frac{1}{n}$.

$\Rightarrow |f(x) - 0| \geq \frac{1}{n} \iff x = 0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \ldots, \pm \frac{1}{n}, \pm \frac{2}{n}, \ldots, \pm \frac{n-1}{n}$

$(q \leq n)$ $(*)$

Ha $a \in (-1,1)$ tetsz, akkor ezek között $\exists$ a-tól különböző, mely a-hoz a legközelebb van, pl: $\frac{p_1}{q_1}$

$\Rightarrow \delta := \left| \frac{p_1}{q_1} - a \right| \Rightarrow (a-\delta, a+\delta)$-ban $\nexists$ a-tól különböző $(*)$-beli szám.

18)

$$\Downarrow$$

Ha $0<|x-a|<\delta = \left|\frac{p_1}{q_1}-a\right|$, akkor

$|f(x)| < \frac{1}{n} < \varepsilon \implies \varepsilon$-hoz jó a $\delta = \left|\frac{p_1}{q_1}-a\right|$ választás

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \forall a \in (-1,1)$$

$\implies$ • Ha $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, akkor $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = f(a) \rightsquigarrow a$-ban folytonos

• Ha $a \in \mathbb{Q}$, akkor $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \neq f(a) \rightsquigarrow a$-ban nem folytonos

☺ !

Megj: Olyan függvény $\nexists$, mely a racionális helyeken folytonos és az irracionális helyeken nem folytonos.

(Baire-féle kategóriatétel miatt (Analízis 1.))

Def: Ha $f: H\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény valamely $K\subseteq H$ részhalmaz minden pontjában folytonos, akkor <u>f folytonos K-n</u>

jel: $f \in C(K) = \{ K\subset\mathbb{R}$ halmazon folytonos függvények $\}$

continous = folytonos

19/

Példa

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & , \text{ha } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

mindenütt folytonos

$f \in C(\mathbb{R})$

Láttuk: $\sin x$ folytonos az értelmezési tartománya $\forall$ pontjában

Ha $a \neq 0$ és $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ olyan sorozat, hogy $x_n \to a$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{x_n} \to \frac{1}{a} \quad \text{és} \quad f(x_n) = x_n \sin \frac{1}{x_n} \to a \sin \frac{1}{a} = f(a)$$

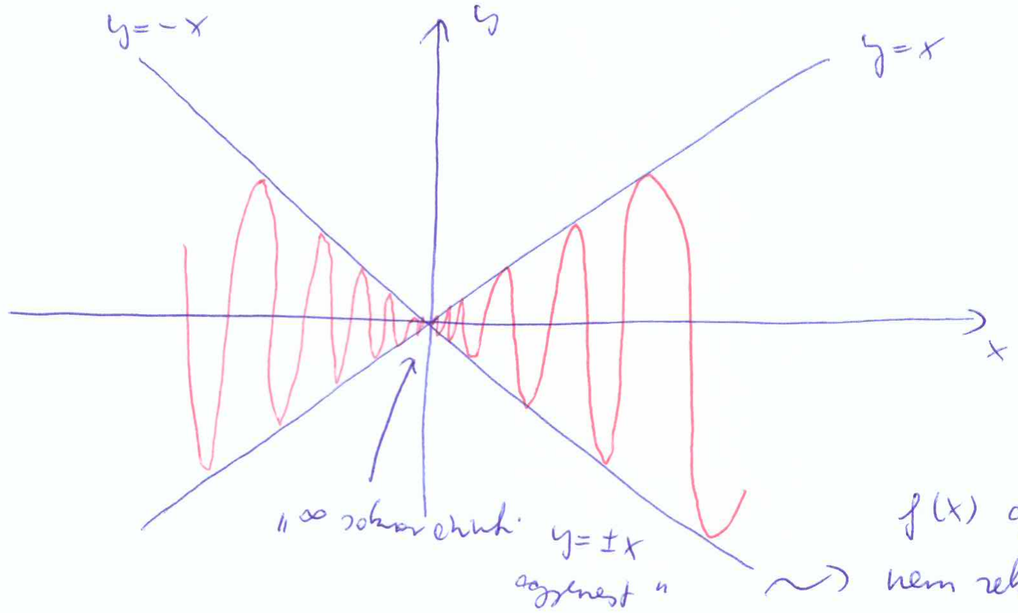
$\Rightarrow$ $\forall\ a \neq 0$ pontban folytonos.

Ha $a = 0$ és $x_n \to 0$, akkor

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{0} \leq |f(x_n)| = \left| x_n \sin \frac{1}{x_n} \right| \leq \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{|x_n|}$$

rendőrelv miatt $f(x_n) \to 0 = f(0)$ $\Rightarrow$ f 0-ban is folytonos.

Megj: egy mindenütt folytonos függvény nem biztos, hogy lerajzolható



f(x) gráfja $\rightsquigarrow$ nem rektifikálható görbe