Hatványsorok differenciálása

TÉTEL.

Legyen $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ $\quad \forall\, x \in (x_0-R, x_0+R) \equiv B(x_0,R)$

konvergens hatványsorral adott fv.

Ekkor f $\forall\, a \in B(x_0,R)$ pontban differenciálható és

$$f'(a) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (a-x_0)^{n-1}.$$

Biz.

Láttuk korábban, hogy f a egy környezetében is kifejezhető:

Ha $0 < r < R - |a-x_0|$, akkor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (x-a)^k \qquad \forall\, x \in (a-r, a+r) \equiv B(a,r),$$

ahol

$$A_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (a-x_0)^{n-k} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Mivel $f(a) = A_0$, ezért

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{f(x)-A_0}{x-a} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k (x-a)^{k-1} \qquad x \in B(a,r),\ x \neq a$$

konvergens hatványsor

$\Downarrow$

folytonos

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k (x-a)^{k-1}\right)}_{A_1 + A_2(x-a) + A_3(x-a)^2 + \dots}\Bigg|_{x=a} = A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\binom{n}{1}}_{n} a_n (a-x_0)^{n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (a-x_0)^{n-1}$$

7/ <u>Köv</u> Az analitikus függvények ∀ x pontban deriválhatók és

- $$\left(e^{x}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n}}{n!} = e^{x}$$

- $$(\sin x)' = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(-1)^{n} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$$

$$\sin'(x)$$

- $$\cos'(x) = (\cos x)' = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \cdot (-1)^{n} \frac{1}{(2n)!} x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin x$$

- $$(\operatorname{sh} x)' = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} x$$

- $$(\operatorname{ch} x)' = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \frac{1}{(2n)!} x^{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \operatorname{sh} x$$

<u>Megj</u> A fenti tétel jelentése

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n\right)' = \left(a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots\right)' =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots$$

olyan, mintha tagonként deriváltunk volna

⇝ összeg deriválásának szabálya hatványsorok esetén kiterjeszthető ∞ összegre

↳ „a deriválás és Σ felcserélhető”

3/

<u>Megj</u> logaritmikus deriválás – több tényezős szorzat deriválására

tfh $f_1, f_2, \dots, f_n$ deriválható x_0-ban

és $f_1(x_0) \cdot f_2(x_0) \dots f_n(x_0) \neq 0$ $\quad f_1(x), \dots, f_n(x) > 0$

$$(f_1 \cdot f_2 \cdots f_n)'(x_0) = ?$$

$$f_1(x) \cdot f_2(x) \dots f_n(x) = e^{\ln(f_1(x) \cdot f_2(x) \dots f_n(x))} =$$

$$= e^{(\ln f_1(x) + \ln f_2(x) + \dots + \ln f_n(x))}$$

$$\Downarrow$$

$$[f_1(x) \cdot f_2(x) \dots f_n(x)]' = e^{(\ln f_1(x) + \dots + \ln f_n(x))} \cdot (\ln f_1(x) + \dots + \ln f_n(x))' =$$

$$\underset{\uparrow}{=} e^{(\ln f_1(x) + \dots + \ln f_n(x))} \left[\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \dots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)} \right] =$$

$$[\ln f(x)]' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$= f_1(x) \cdot f_2(x) \dots f_n(x) \left[\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \dots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)} \right]$$

<u>Példák összetett függvények deriválására:</u>

(1) $$\left(\cos e^{x^2}\right)' \underset{\uparrow}{=} -\sin e^{x^2} \cdot e^{x^2} \cdot 2x$$

$f(x) = x^2$
$g(x) = e^x$ deriválhatók + feltételek ✓
$h(x) = \cos x$

$$(h \circ g \circ f)(x) = \cos e^{x^2} \xrightarrow{\frac{d}{dx}} h'((g \circ f)(x)) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

4/

(2)

$$\left(\ln\left(\cos(x^3e^x)\right)\right)' \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\cos(x^3e^x)}\cdot\left(-\sin(x^3e^x)\right)\cdot$$

mindenhol, ahol értelmes

$$\cdot\left(3x^2e^x + x^3e^x\right)$$

(3)

$$\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\cos x^6}{\ln x}\right)\right]' \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\cos x^6}{\ln x}\right)}\cdot\frac{(-\sin x^6)\cdot 6x^5\cdot\ln x-(\cos x^6)\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$$

mindenhol, ahol értelmes

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

(5) $f(x) := x^x \quad x>0$ hogyan deriváljuk? → nem hatványfv. → nem exponenciális fv.

<u>trükk</u>: logaritmikus deriválás.

$$f(x) = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$$

$$\to f'(x) = \left(e^{x\ln x}\right)' = e^{x\ln x}\cdot\left(1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right) = x^x\left(\ln x + 1\right)$$

<u>Általában</u>:

$$f(x) := [g(x)]^{h(x)} \underset{\uparrow}{=} e^{\ln[g(x)]^{h(x)}} = e^{h(x)\cdot\ln(g(x))}$$

ha $g(x), h(x) > 0$

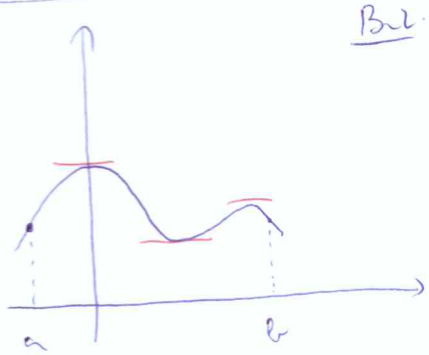
$$\to f'(x) = e^{h(x)\cdot\ln(g(x))}\cdot\left(h'(x)\cdot\ln g(x) + h(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\cdot g'(x)\right) =$$

$$= [g(x)]^{h(x)}\left(h'(x)\cdot\ln g(x) + \frac{h(x)}{g(x)}\cdot g'(x)\right)$$

5)

Középértéktételek

Rolle-tétel $f \in C[a,b]$, f diff-ható (a,b)-ben.
Ha $f(a)=f(b) \Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$, hogy $f'(\xi)=0$.



Biz: Ha $f(x)=f(a)$ $\forall x \in (a,b)$-re

$\Rightarrow f = \text{const}$ (a,b)-n $\Rightarrow f'(x)=0$ $\forall x \in (a,b)$

tfh $\exists\, x_0 \in (a,b) : f(x_0) \neq f(a)$.

Ha $f(x_0) > f(a)$, Weierstrass-tétel miatt

f-nek $\exists$ abszolút maximuma $[a,b]$-ben.

Mivel $f(x_0) > f(a) = f(b)$ $\Rightarrow$ sem a, sem b nem abs. max

$\Downarrow$

$\exists\, \xi \in (a,b)$ megf. abs max

hely $\Rightarrow$ ξ lok max hely $\Rightarrow$

$\Downarrow$

$f'(\xi)=0$

Ha $f(x_0) < f(a)$ $\rightsquigarrow$ ugyanígy minimum hellyel

○!

P(1) Mutassuk meg, hogy $f(x) = x^7 + 14x - 3$-nak pontosan 1 zérushelye van!

$\left.\begin{array}{l} f(0) < 0 \\ f(1) > 0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{Bolzano}} \exists$ zérushely $(0,1)$-ben.

tfh legalább 2 zérushely: x_1, x_2: $f(x_1) = f(x_2) = 0$

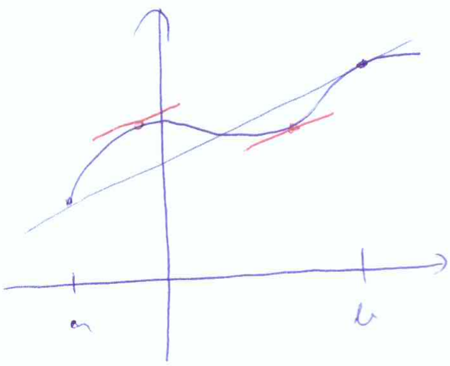
$\Rightarrow$ Rolle-tétel $[x_1,x_2]$-re: $\exists\, \xi \in (x_1,x_2)$, hogy $f'(\xi)=0$

de $f'(x) = 7x^6 + 14 > 0$ ↯ ○!

6/ Lagrange-féle középértéktétel

T/h $f \in C[a,b]$, f diff.ható (a,b)-ben

$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$, hogy $f(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



Biz $(a,f(a))$, $(b,f(b))$-t összekötő húr:

$$y = h_{a,b}(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-x}(x-a) + f(a)$$

$F(x) := f(x) - h_{a,b}(x)$ kielégíti a Rolle-tétel feltételeit:

- folyt,
- diff.ható
- $F(a) = F(b) = 0$

$\Rightarrow \exists\, \xi \in (a,b)$ melyre $F'(\xi) = 0$

$$F'(\xi) = f'(\xi) - h'_{a,b}(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \quad !$$

Pl | Biz be, hogy $\forall\, x < y \Rightarrow \operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x \leq y - x$

$f(x) := \operatorname{arctg} x \xrightarrow{\text{Lagrange}} \exists\, \xi \in (x,y)$

~~arctg~~ $y > x$ $\qquad \dfrac{1}{1+\xi^2} = \dfrac{\operatorname{arctg} y - \operatorname{arctg} x}{y-x} \leq 1$

$\hookrightarrow$ ün !

7)

Cauchy-féle középértéktétel

$f, g \in C[a,b]$, diff.ható (a,b)-ben és $x \in (a,b)$-re $g'(x) \neq 0$

$$\Rightarrow \exists\ \xi \in (a,b): \quad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Biz Ha $g(a) = g(b) \xRightarrow{\text{Rolle}} \exists\ x \in (a,b): g'(x) = 0 \ : ↯$

$$\Downarrow$$

$$g(a) \neq g(b)$$

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(x) - g(a)\right)$$

$\hookrightarrow$ F folytonos $[a,b]$-ben, diff.ható (a,b)-ben

$F(a) = F(b) = 0$

$$\Downarrow \text{Rolle}$$

$$\exists\ \xi \in (a,b): \quad F'(\xi) = 0$$

$$F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(\xi) = 0 \qquad g'(\xi) \neq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

o!

Megj: $g(x) = x \Longrightarrow$ Lagrange

8/

<u>Köv</u> Ha f folytonos $[a,b]$-ben és diffható (a,b)-ben,

és $f'(x)=0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f=\text{const}$ $[a,b]$-ben.

<u>Biz</u> Lagrange $\Rightarrow \forall\, x \in (a,b]$-ben $\exists\ \xi \in (a,b)$:

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

de $f'(\xi)=0 \Rightarrow f(x)=f(a)$.

☺!

<u>Köv</u> (integrálszámítás alaptétele)

$f, g \in C[a,b]$, diffhatóak (a,b)-ben és $f'(x)=g'(x) \quad \forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$, hogy $f(x)=g(x)+c \quad \forall x \in [a,b]$

<u>Biz.</u> alkalmazás $f-g$-re

☺!

Példák

① Gyökkeresés Rolle-tétellel:

$$f(x) := 5x^4 - x^3 - 4x + c$$

$$f(0) = f(1) = c \xRightarrow{\text{Rolle-tétel}} \exists\ x_0 \in (0,1):\ f'(x_0) = 0$$

$$f'(x) = 20x^3 - 3x^2 - 4$$

vagyis $20x^3 - 3x^2 - 4 = 0$ egyenletnek $\exists$ gyöke $(0,1)$-ben.

② Bizonyítsa be, hogy $f(x) = x^3 + x^2 + 2x$ egyetlen függvényértéket sem vesz fel 1-nél többször!

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 2$$

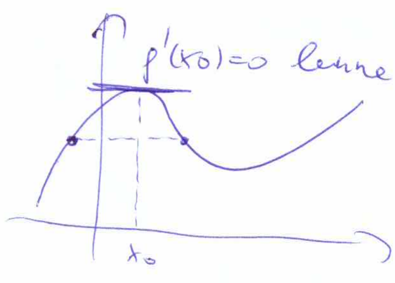
$3x^2 + 2x + 2 = 0 \rightsquigarrow$ diszkrimináns: $D = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = -20 < 0$

$\Downarrow$

$f'(x)$ sehol sem 0

$\Downarrow$ Rolle-tétel

f egyetlen értéket sem vehet fel kétszer, hiszen akkor $f'(x_0) = 0$ lenne valahol



(3) Hány megoldása van az $x^2 = x\sin x + \cos x$ egyenletnek $[-2,2]$-ben?

$f(x) := x^2 - x\sin x - \cos x$

- f diffható mindenütt
- $f(0) = -1 < 0$

  $f(2) = 4 - 2\sin 2 - \cos 2 > 4 - 2 - 1 = 1 > 0$

  $f(-2) = 4 + 2\sin(-2) - \cos(-2) > 0$

  $\Bigg\}$ f folytonos, Bolzano $\Longrightarrow$ $f(x) = 0$ legalább egyszer $(-2,0)$-ban ill. $(0,2)$-ben

$\Downarrow$

$[-2,2]$-ben legalább 2 gyöke van

Tfh 2-nél több gyöke van

$\Downarrow$ Rolle-tétel

$f'(x) = 0$ valahol a gyökök között

$$f'(x) = 2x - \sin x - x\cos x + \sin x = x\underbrace{(2 - \cos x)}_{>0}$$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \iff x = 0$ $\rightarrow$ f'-nek csak egyetlen zérushelye van

$\Downarrow$

f-nek nincs 2-nél több gyöke

$\hookrightarrow$ f-nek pontosan 2 gyöke van $[-2,2]$-ben.

11)

Példa (Lagrange-féle középértéktétel)

Biz be: $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ :\ |\cos x_1 - \cos x_2| \leq |x_1 - x_2|$

$t|h\quad x_1 > x_2 \overset{\text{Lagrange}}{\leadsto}\ \exists\ c \in (x_1, x_2):$

$$\frac{\cos x_1 - \cos x_2}{x_1 - x_2} = (\cos x)'\Big|_{x=c} = -\sin c$$

$\hookrightarrow\ |\cos x_1 - \cos x_2| = |-\sin c \cdot (x_1 - x_2)| \leq |x_1 - x_2|$

$\circ$!

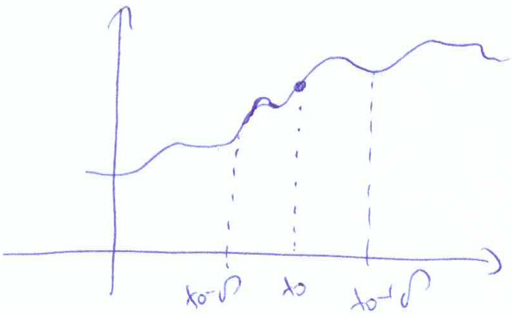
Lokális tulajdonságok és a derivált

Def: Legyen f értelmezve x_0 egy környezetében.

f lokálisan növő x_0-ban, ha $\exists\ \delta>0$, hogy

$\forall\ x_0-\delta<x<x_0$ esetén $f(x)\le f(x_0)$ és

$\forall\ x_0<x<x_0+\delta$ -||- $f(x)\ge f(x_0)$



f jobbról lokálisan nő x_0-ban, ha $\exists\ \delta>0$, hogy $\forall\ x_0<x<x_0+\delta$ esetén $f(x)\ge f(x_0)$

Hasonlóan: szig lok nő, lok csökken, ...

Megj: különbség van a lokális növekedés ill a monoton növekedés között!

- f monoton növő (a,b)-ben $\Rightarrow$ f lokálisan nő $\forall\ x_0\in(a,b)$-ben
- f lokálisan nő $\forall\ x\in(a,b)$-ben $\Rightarrow$ f monoton növő (a,b)-ben

Def $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$-nek $x_0\in(\alpha,\beta)$-ban lokális maximuma van, ha $\exists$ x_0-nak olyan $B(x_0,r)\subseteq(\alpha,\beta)$ környezete, hogy $f(x_0)\ge f(x)$ ha $x\in B(x_0,r)$

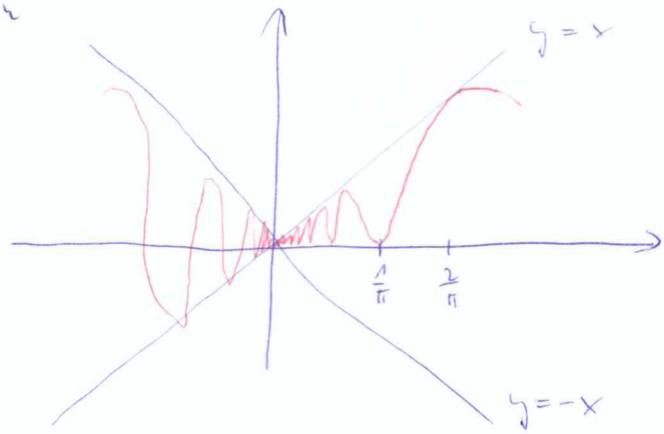
és lokális minimuma van, ha $\exists$ x_0-nak olyan $B(x_0,r)\subseteq(\alpha,\beta)$ környezete, hogy $f(x_0)\le f(x)$, ha $x\in B(x_0,r)$.

13/ **DE:** f lehet lokálisan növő x_0-ban, de $\nexists$ olyan $B(x_0)$ környezet melyben f monoton növő!

pl. ①

$$f(x)=\begin{cases} x\sin^2\frac{1}{x}, & \text{ha } x\neq 0 \\ 0, & \text{ha } x=0 \end{cases}$$

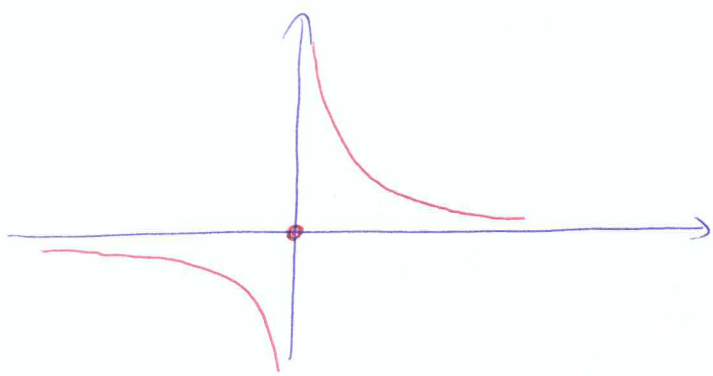
lok. növő 0-ban, de 0-nak $\nexists$ olyan környezete melyben f monoton



②

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ha } x\neq 0 \\ 0, & \text{ha } x=0 \end{cases}$$

ugyanis lok. nő 0-ban, de egyetlen 0-t tartalmazó intervallumban sem monoton növő!



B14

(3) $$f(x)=\begin{cases} x, & \text{ha } x \text{ irracionális} \\ 2x, & \text{ha } x\in \mathbb{Q}\end{cases}$$

szigorúan lokálisan nő 0-ban, de $\nexists$ olyan intervallum, amelyben monoton

---

TÉTEL Tfh f diffható x_0-ban.

(i) Ha $f'(a)>0 \Rightarrow f$ szigorúan lok növő x_0-ban

(ii) Ha $f'(a)<0 \Rightarrow$ -||- csökkenő -||-

(iii) Ha f lok növő x_0-ban $\Rightarrow f'(x_0)\geq 0$

(iv) -||- csökkenő -||- $\Rightarrow f'(x_0)\leq 0$

(v) Ha f-nek lok szélsőértéke van x_0-ban $\Rightarrow f'(x_0)=0$

Biz:

(i) Ha $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$$

$\Downarrow$

$$\exists\, \delta>0, \text{ hogy } \forall\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$$

↳ $f(x)>f(x_0)$, ha $x_0<x<x_0+\delta$

és $f(x)<f(x_0)$, ha $x_0-\delta<x<x_0$ $\Big\}\Rightarrow f$ lok nő x_0-ban.

(ii) ugyanígy

(iii) Ha f lok nő x_0-ban $\Rightarrow \exists\,\delta>0$, hogy $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$,

ha $0<|x-x_0|<\delta$

↳ $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$$

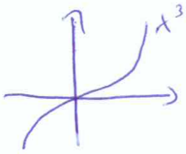
(iv) ugyanígy

(v) Ha $f'(x_0)\neq 0 \xRightarrow[(i),(ii)]{} f$ lok szig nő v. lok szig csökken $\Rightarrow \nexists$ lok szé.

és ha x_0-ban lok szé $\Rightarrow f'(x_0)=0$!

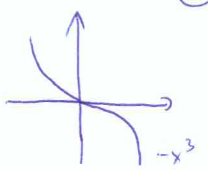
Megj: Egyik állítás sem megfordítható!

Pl: (1) f szig lok nő x_0-ban $\not\Rightarrow$ $f'(x_0)>0$



pl: $f(x)=x^3$ szig lok nő 0-ban, de $f'(0)=0$

(2) $f'(x_0)\ge 0 \not\Rightarrow$ f lok nő x_0-ban



pl: $f(x)=-x^3 \rightsquigarrow f'(0)=0\ge 0$, de f nem lok növő 0-ban.

(3) $f'(x_0)>0$-ból csak f lokális növekedése következik, a monoton növés nem!

pl: legyen f olyan, hogy $x-x^2\le f(x)\le x+x^2 \quad \forall x$

$$\Downarrow$$

$$f(0)=0 \text{ és}$$

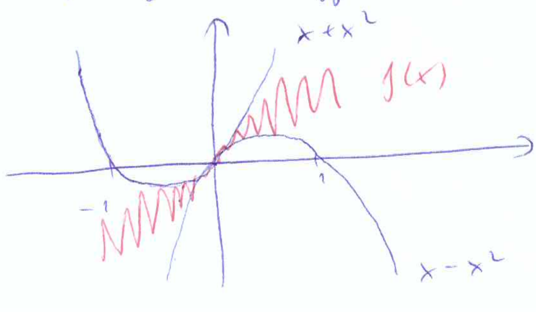
$x>0$ esetén
$$1-x \le \frac{f(x)}{x} \cancel{\le 1+x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le 1+x$$

$x<0$ esetén
$$1-x \ge \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0}\ge 1+x$$

$\Downarrow$ rendőrelv

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1>0$$

de f megválasztható úgy, hogy ne legyen monoton növő 0 egyetlen környezetében sem:



16/

TÉTEL Legyen $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ diffható.

(i) f monoton növő $\iff$ $\forall x\in(\alpha,\beta)$-ra $f'(x)\geq 0$

(ii) f monoton csökkenő $\iff$ $\forall x\in(\alpha,\beta)$-ra $f'(x)\leq 0$

(iii) $f=\text{const}$ $\iff$ $\forall x\in(\alpha,\beta)$-ra $f'(x)=0$

Biz:

i) f monoton növő $\Rightarrow$ $\forall x\in(\alpha,\beta)$-ban lokálisan monoton növő $\Rightarrow f'(x)\geq 0$

Tfh $f'(x)\geq 0$ $\forall x\in(\alpha,\beta)$

$\alpha<x_1<x_2<\beta$ $\to$ alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt $[x_1,x_2]$-re

$\hookrightarrow$ $\exists\, \xi\in(x_1,x_2)\subset(\alpha,\beta)$, hogy

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)\geq 0$$

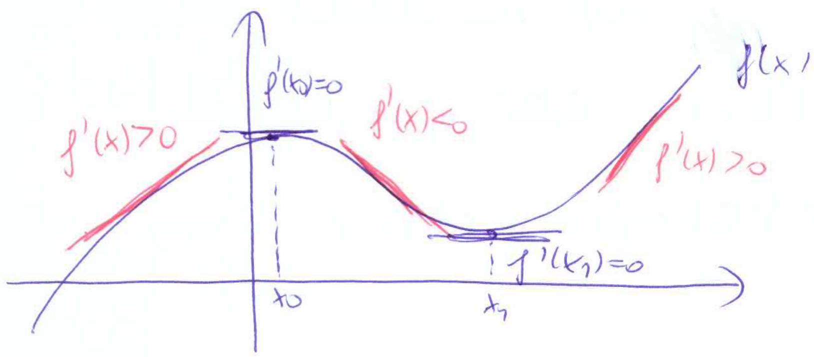
$\uparrow$ $\xi\in(\alpha,\beta)$

ha $x_2>x_1$ $\Rightarrow$ $f(x_2)\geq f(x_1)$ $\Rightarrow$ $f\nearrow$.

ii) hasonlóan

iii) $f=\text{const}$ egyszerre növő és csökkenő + (i), (ii)

!



17)

Darboux-tétel: Legyen $f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ diffható,

$\alpha < x_1 < x_2 < \beta$ és $f'(x_1)\neq f'(x_2)$.

Ekkor minden $f'(x_1)$ és $f'(x_2)$ közé eső c számhoz $\exists\ \xi\in(x_1,x_2)$, hogy $f'(\xi)=c$.

(Megj: Minden nyílt intervallumon értelmezett diffható függvény deriváltja Darboux-tulajdonságú)

Biz. $F(x):= f(x)-cx \qquad x\in(\alpha,\beta)$

F diffható és $F'(x)=f'(x)-c$.

Mivel $f'(x_1)<c<f'(x_2) \rightsquigarrow F'(x_1)=f'(x_1)-c<0$

$F'(x_2)=f'(x_2)-c>0$

F folytonos $[x_1,x_2]$-n $\xRightarrow{\text{Weierstrass}}$ ~~felvesz~~ van abszolút minimuma és abszolút maximuma $[x_1,x_2]$-ben

Mivel $F'(x_1)<0 \to x_1$-ben F szigorúan ~~nő~~ csökken

$F'(x_2)>0 \to x_2$-ben F szigorúan nő

$\Downarrow$

ezek nem lehetnek abszolút szélsőérték helyek

$\Rightarrow \exists\ \xi\in(x_1,x_2)$ belső pont, ahol lokális szélsőérték van.

itt $F'(\xi)=0=f'(\xi)-c \Rightarrow f'(\xi)=c$

valamely $\xi\in(x_1,x_2)$-ben !