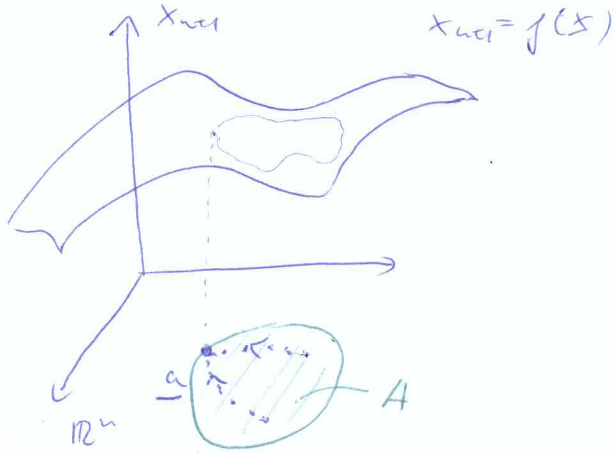
75/

Def $f: D_f \to \mathbb{R}$, $A \subset D_f$, $\underline{a} \in A'$ (A torlódási pontja)
$D_f \subset \mathbb{R}^n$

- Azt mondjuk, hogy f határértéke $\underline{a}$-ban az A halmazra vonatkozóan $b \in \mathbb{R}$, ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta > 0$, hogy $\forall\, \underline{x} \in A$, $0 < \|\underline{x} - \underline{a}\| < \delta$ esetén $|f(\underline{x}) - b| < \varepsilon$.

Jel. $\lim\limits_{\substack{\underline{x} \to \underline{a} \\ \underline{x} \in A}} f(\underline{x}) = b$

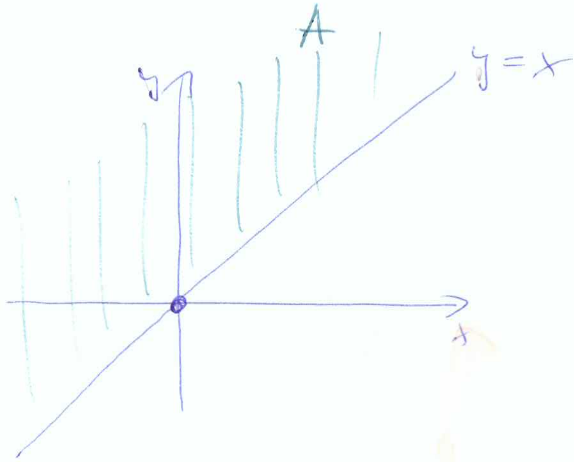


- Azt mondjuk, hogy f határértéke $\underline{a}$-ban A halmazra vonatkozóan $+\infty$ $(-\infty)$, ha $\forall\, K \in \mathbb{R}$-hez $\exists\, \delta > 0$, hogy minden $\underline{x} \in A$, $0 < \|\underline{x} - \underline{a}\| < \delta$ esetén $f(\underline{x}) > K$ $(f(\underline{x}) < K)$

Jel. $\lim\limits_{\substack{\underline{x} \to \underline{a} \\ \underline{x} \in A}} f(\underline{x}) = +\infty \quad (-\infty)$

Megj. $A = D_f$ esetén visszakapjuk a sima határértéket.

Példa $A := \{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : y>x\}$

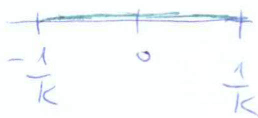


Ekkor

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} \frac{1}{y-x} = \infty$$

$\forall\, K>0$ $\quad 0<\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{K} =: \delta$ esetén

$|x|,|y|<\frac{1}{K} \implies |y-x|<\frac{2}{K}$

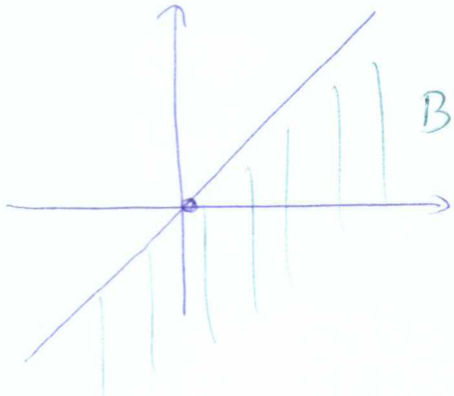


$x,y\in\left(-\frac{1}{K},\frac{1}{K}\right)$

$\Downarrow \; y>x$

$$\frac{1}{y-x} > \frac{K}{2}$$

$B := \{(x,y) : y<x\}$

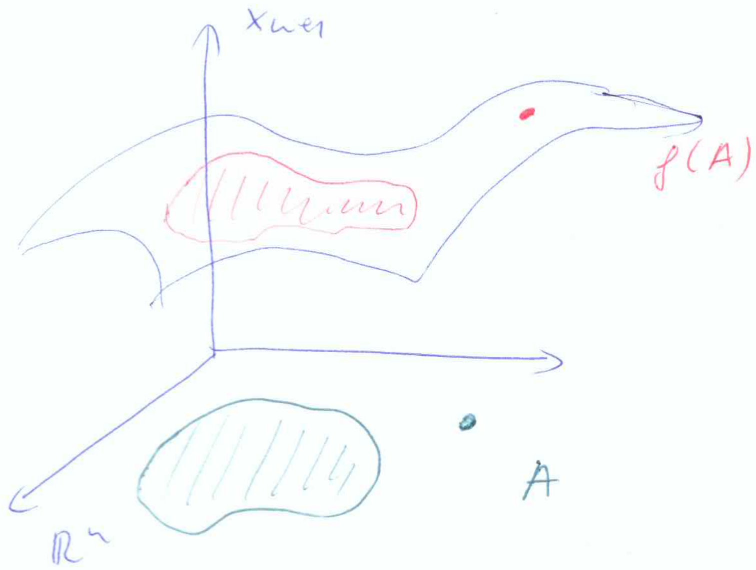


hasonlóan:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in B}} \frac{1}{y-x} = -\infty$$

$$\implies \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{y-x} \;\nexists$$

8/1)



Átviteli elv a folytonosságra:

<u>TÉTEL</u> f folytonos $\underline{a}$-ban az A-ra vonatkozólag

$$\Updownarrow$$

$$\forall\ (\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A,\ \underline{x}_n \to \underline{a} \text{ sorozatra } f(\underline{x}_n) \to f(\underline{a})$$

!

<u>Megj.</u> A vizsgálatokat sokszor megkönnyíti, ha bizonyos változókat rögzítünk $\Rightarrow$ <u>szekció függvények</u>

<u>pl:</u> $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad x_{n+1} = f(\underline{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$

$\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \Rightarrow$

$$f_{(a_2,\dots,a_n)}(x_1) = f(x_1, \underbrace{a_2, a_3, \dots, a_n}_{\text{rögzítettek}}) \quad (1.)$$

$$f_{(a_1,a_3,\dots,a_n)}(x_2) = f(a_1, x, a_3, \dots, a_n) \quad (2.)$$

$$\vdots$$

Ha f folytonos $\underline{a}$-ban $\Rightarrow$ a szekció függvényei is folytonosak az adott pontban:

(1.) a_1-ben

(2.) a_2-ben

$\vdots$

Többváltozós függvények folytonossága

Def $f: D_f \to \mathbb{R}$, $A \subset D_f$, $\underline{a} \in A$.
$D_f \subset \mathbb{R}^n$

Azt mondjuk, hogy f folytonos az $\underline{a}$ pontban az A halmazra vonatkozólag (szűkítve), ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta > 0$, hogy $\forall\, \underline{x} \in A$, $\|\underline{x} - \underline{a}\| < \delta$ esetén $|f(\underline{x}) - f(\underline{a})| < \varepsilon$.

Ha $A = D_f$, akkor simán: f folytonos $\underline{a}$-ban.

Ha f A $\forall$ pontjában folytonos, akkor f folytonos A-n:

Jel: $f \in C(A)$ (continuous = folytonos)

Megj (1) f folytonos $\underline{a}$-ban $\equiv$ f gráfja az $(\underline{a}, f(\underline{a}))$ pontban nem szakad.

(2) f folytonos $\underline{a}$-ban az A halmazra szűkítve pontosan akkor, ha

a) $\underline{a}$ izolált pontja A-nak ($\underline{a}$ nem torlódási pontja A-nak)

vagy

b) $\underline{a} \in A \cap A'$ és $\lim\limits_{\substack{\underline{x} \to \underline{a} \\ \underline{x} \in A}} f(\underline{x}) = f(\underline{a})$

83/

A megfordítás nem igaz!

A szekciófüggvények folytonosságából nem következik a függvény folytonossága:

Pl1 $\quad f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

- $a \neq 0$

$$f_a(y) := \frac{ay}{a^2+y^2} \quad \text{folytonos mindenütt}$$

- $a = 0 \quad f_a(y) \equiv 0 \quad \Rightarrow \cancel{\lim_{y\to 0} f_a(y) = \lim_{y\to 0} \frac{ay}{a^2+y^2} = 0 = f_a(0)}$

folytonos mindenütt.

Hasonlóan $f_b(x) = f(x,b)$ folytonos $\forall\, b \in \mathbb{R}$-re

Pl: f nem folytonos az origóban:

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\varphi\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \cos\varphi\sin\varphi$$

$\uparrow$ függ φ-től!

$\Downarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \nexists$$

$\Rightarrow f$ nem folytonos $(0,0)$-ban

<u>TÉTEL:</u> Ha f és g folytonosak $\underline{a}$-ban A-ra vonatkozólag, akkor ugyanez igaz $f+g$, és $f\cdot g$-re, valamint $g(\underline{a})\neq 0$ esetén $\frac{f}{g}$-re.

<u>Biz:</u> Trivi.

<u>Def.</u> • Az $\mathbb{R}^n$-en értelmezett $\underline{x}=(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_i$ függvényt, az <u>i-edik koordinátafüggvénynek</u> nevezzük $(i=1,\dots,n)$

• Az $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ fv <u>n-változós polinomfüggvény</u>, ha az $x_1,x_2,\dots,x_n$ koordinátafüggvényekből és konstansokból kaphatók meg összeadás és szorzás segítségével.

<u>pl:</u>

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4):=x_1^3x_2-3x_2^6x_4^3+x_3+6$$

• Két n változós polinom hányadosa = n-változós <u>racionális törtfüggvény</u>

<u>TÉTEL</u> A polinomfüggvények mindenütt folytonosak, a racionális törtfüggvények folytonosak az értelmezési tartományuk minden pontjában.

<u>Biz.</u> A koordinátafüggvények folytonosságából adódik.

☺!

85)

Összetett függvények folytonossága.

TÉTEL: Tfh

(i) $A \subset \mathbb{R}^n$, $g : A \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} g(\underline{x}) = \gamma \in [-\infty, \infty]$

(ii) $g(A) \subset H \subset \mathbb{R}$, $f : H \to \mathbb{R}$ és $\lim\limits_{x\to\gamma} f(x) = \beta \in [-\infty, \infty]$

(iii) $g(\underline{x}) \neq \gamma$ az $\underline{a}$ pont egy pontozott környezetében, vagy $\gamma \in H$ és f folytonos γ-ban a H-ra vonatkozólag

$$\Downarrow$$

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(g(\underline{x})) = \beta$$

Biz: átviteli elvvel egyszerű (ugyanúgy mint korábban)

Köv: Ha g folytonos $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$-ben $A \subset \mathbb{R}^n$-re vonatkozólag, és az 1-változós f fv folytonos $g(\underline{a})$-ban a $g(A)$-ra vonatkozólag, akkor

$f \circ g$ is folytonos $\underline{a}$-ban A-ra vonatkozólag.

Pl1 $$f(x,y,z) := \frac{e^{\cos(x^2+y)} - z}{1 - xyz}$$ folytonos mindenütt, ahol

$xyz \neq 1$

86/

TÉTEL (Bolzano)

Legyen f folytonos a nyílt összefüggő $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazon.

$\underline{a}, \underline{b} \in H$, $c \in [f(\underline{a}), f(\underline{b})] \Rightarrow \exists\, \underline{\xi} \in H : f(\underline{\xi}) = c$.

Biz:

Összekötjük $\underline{a}$-t $\underline{b}$-vel egy folytonos $g_{\underline{a},\underline{b}}$ úttal:

$$g_{\underline{a},\underline{b}} : \underline{x} = \underline{\varphi}(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)) \text{ folytonos}$$

$$\underline{\varphi}(\alpha) = \underline{a}, \quad \underline{\varphi}(\beta) = \underline{b}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

$$h(t) := (f \circ \underline{\varphi})(t) = f(\underline{\varphi}(t)) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$$

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos, $h : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$

$h(\alpha) = f(\underline{a})$, $h(\beta) = f(\underline{b})$

$\Downarrow$ 1 változós Bolzano-tétel

$\exists\, u \in [\alpha, \beta) : h(u) = f(\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u)) = c$

$\hookrightarrow \underline{\xi} := (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u)) \in H$

$f(\underline{\xi}) = c$

$\circ$!

Kompakt halmazon folytonos függvények

TÉTEL (Weierstrass)

Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt (= korlátos és zárt), $f: A \to \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor f korlátos A-n, és az A-n ~~felvett~~ felvett értékei között van legkisebb és legnagyobb.

Biz.

$M := \sup f(A)$.

- Ha f nem korlátos felülről, akkor $M = +\infty$ és $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re $\exists\, \underline{x}_n \in A$, melyre $f(\underline{x}_n) > n$.
- Ha f felülről korlátos, akkor M véges és $\forall\, n \in \mathbb{N}$-re $\exists\, \underline{x}_n \in A$: $f(\underline{x}_n) > M - \frac{1}{n}$

$\hookrightarrow \exists$ olyan $(\underline{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ sorozat, melyre $f(\underline{x}_n) \to M$

$(\underline{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ korlátos ($\subset A$) $\Rightarrow \exists\, (\underline{x}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergens részsorozata:

$$\lim_{k \to \infty} \underline{x}_{n_k} =: \underline{a}$$

A zárt $\Rightarrow \underline{a} \in A$

f folytonos $\underline{a}$-ban $\Rightarrow f(\underline{x}_{n_k}) \to f(\underline{a})$

de $f(\underline{x}_{n_k}) \to M$

$\Rightarrow M = f(\underline{a})$

$\rightsquigarrow M$ véges, ezért f korlátos + $M \in f(A)$.

minimumra hasonlóan.

Megj. $\min\{\underline{x}\in A : f(\underline{x})\} = \min f(A)$ — f abszolút minimuma A-n

$\max\{\underline{x}\in A : f(\underline{x})\} = \max f(A)$ — f abszolút maximuma A-n

Def. $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ egyenletesen folytonos $A\subset\mathbb{R}^n$-en, ha $\forall\, \varepsilon>0$-hoz $\exists\, \delta(\varepsilon)>0$ ($\underline{x}$-től független), hogy $\forall\, \underline{x},\underline{y}\in A$, $\|\underline{x}-\underline{y}\|<\delta$ esetén $|f(\underline{x})-f(\underline{y})|<\varepsilon$.

TÉTEL (Heine)

$A\subset\mathbb{R}^n$ kompakt, $f: A\to\mathbb{R}$ folytonos $\Longrightarrow$ f egyenletesen folytonos A-n.

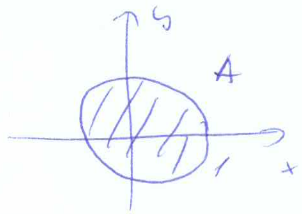
Biz: ugyanúgy, mint 1 változóban.

Példa

a) $$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

b) $$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Korlátos-e $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$ -n?



89/

a)

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\varrho^2 \cos^2\varphi \, \varrho^2 \sin^2\varphi}{\varrho^2 \cos^2\varphi + \varrho^2 \sin^2\varphi} = \lim_{\varrho \to 0} \varrho^2 \underbrace{\cos^2\varphi \sin^2\varphi}_{\text{korlátos}} = 0 = f(0,0)$$

↳ f folytonos A-n, A kompakt

⇓ Weierstrass

f korlátos A-n

b)

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\varrho^2 \cos^2\varphi \, \varrho^2 \sin^2\varphi}{\varrho^4 \cos^4\varphi + \varrho^4 \sin^4\varphi} = \lim_{\varrho \to 0} \frac{\cos^2\varphi \sin^2\varphi}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi} = \frac{\cos^2\varphi \sin^2\varphi}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi} \quad \nexists$$

↓

függ φ-től

⇙

f nem folytonos

⇙

Weierstrass nem használható

$$0 \le \frac{x^2 y^2}{x^4 + y^4} \le \frac{x^2 y^2}{2\sqrt{x^4 y^4}} = \frac{1}{2} \rightsquigarrow \text{korlátos}$$

↑

$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$

!

Megj.

TÉTEL (Weierstrass 2.)

H kompakt, f folytonos H-n $\Rightarrow$ $f(H)$ kompakt

!

Parciális deriváltak

Def: Legyen f értelmezve $\underline{a}=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ egy környezetében. Rögzítsük $\underline{a}$ pont koordinátáit az i-edik kivételével:

$$t \longmapsto f_i(t) := f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

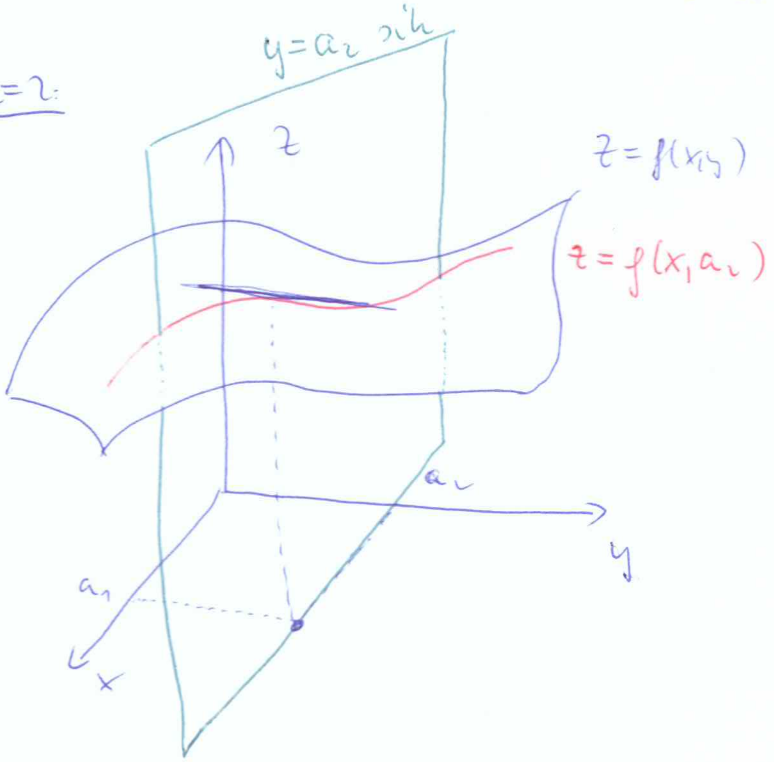
(szekciófüggvény)

Az így kapott 1-változós f_i-függvény a_i-beli deriváltját (amennyiben $\exists$) az f fv i-edik parciális deriváltjának hívjuk:

Jel.

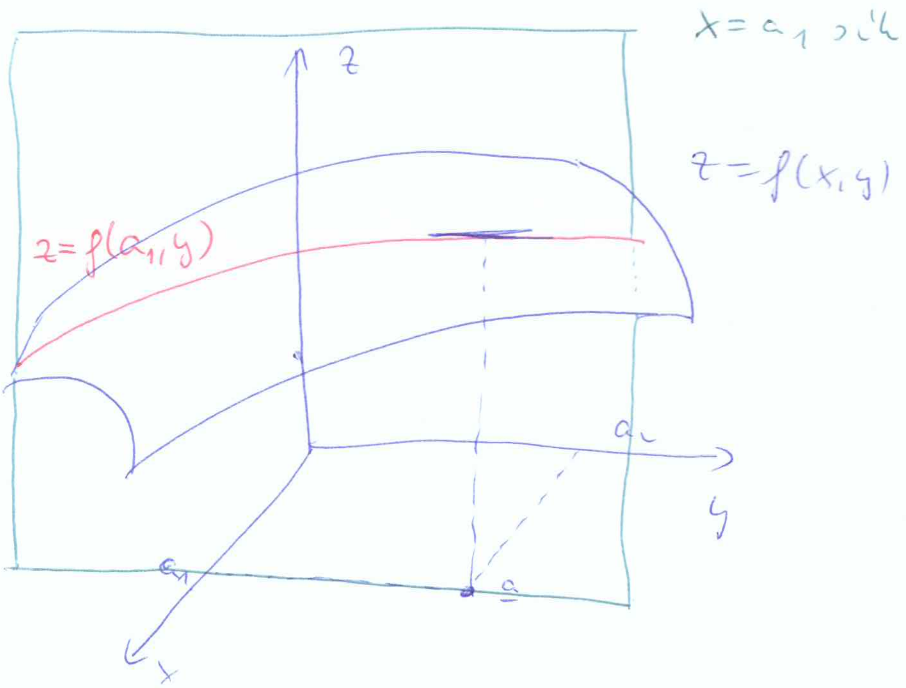
$$f'_{x_i}(\underline{a}) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a}) \equiv D_i f(\underline{a}) = \lim_{t\to a_i} \frac{f(a_1,\dots,a_{i-1},t,a_{i+1},\dots,a_n)-f(\underline{a})}{t}$$

$n=2$:



$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) = \lim_{x\to a_1} \frac{f(x,a_2)-f(a_1,a_2)}{x}$$

81/



$$\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = f'_y(a_1, a_2) = \lim_{y \to a_2} \frac{f(a_1, y) - f(a_1, a_2)}{y}$$

Hasonlóan: parciális derivált függvények

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(\underline{x})}{h}$$

$i = 1, \dots, n$

Megj: A parciális deriváltakat úgy számítjuk ki, hogy a változókat i-dik kivételével konstansnak tekintjük és az 1 változós fv-t deriváljuk.

Pl/ (1) $f(x,y) = y^3 e^{-3x} + 2x^4 + \cos x^3 y^2 + \sin y$

$f'_x(x,y) = -3y^3 e^{-3x} + 8x^3 - (\sin x^3 y^2) \cdot 3x^2 y^2$

$f'_y(x,y) = 3y^2 e^{-3x} - (\sin x^3 y^2) \cdot 2x^3 y + \cos y$

92/

(2)

$$f(x,y) = x^y \qquad x,y>0$$

$$f'_x(x,y) = y\,x^{y-1}$$

$$f'_y(x,y) = x^y \cdot \ln x$$

(3)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)^2 y}{x^2+y^2} + 2x + 3 & (x,y) \neq (0,0) \\ 3 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$

$$f'_x(x,y) = \frac{2(x+2)y(x^2+y^2) - 2x(x+2)^2 y}{(x^2+y^2)^2} + 2$$

$$f'_y(x,y) = \frac{(x+2)^2(x^2+y^2) - 2y(x+2)^2 y}{(x^2+y^2)^2}$$

$(x,y)=(0,0)$ – kell definíció alapján!

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{2h+3-3}{h}\right) = 2$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\frac{4h}{h^2}+3-3}{h}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{4}{h^2} = \infty$$

$$\Rightarrow \quad f'_y(0,0) \not\exists$$

93/

Megj.: A parciális deriváltak létezéséből nem következik a folytonosság!

Pl/

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

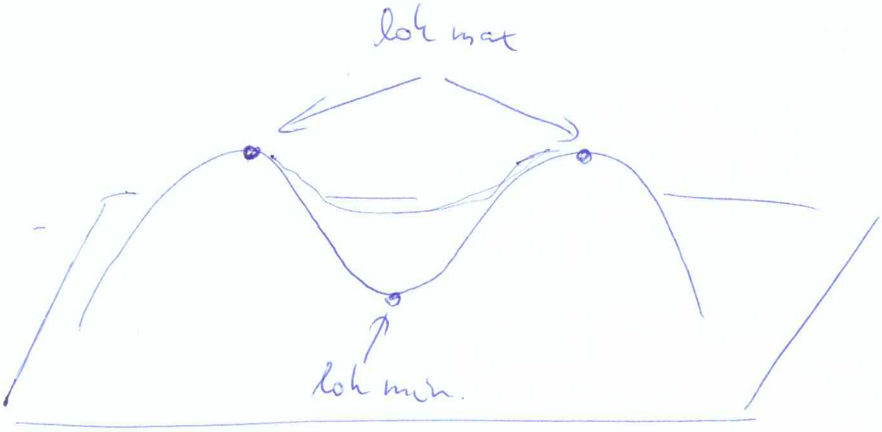
f nem folytonos az origóban $\left(\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \nexists\right)$

de

$$f(x,0)\equiv 0 \to f'_x(0,0)=0$$
$$f(0,y)\equiv 0 \to f'_y(0,0)=0$$

Def. f-nek $\underline{a}\in\mathbb{R}^n$-ben lokális maximuma (lok. minimuma) van, ha $\exists$ $\underline{a}$-nak egy olyan U környezete, ahol f értelmezve van és $\forall\, \underline{x}\in U$ esetén $f(\underline{x})\leq f(\underline{a})$ $\quad (f(\underline{x})\geq f(\underline{a}))$

$\Rightarrow$ $\underline{a}$: f lok. maximumhelye (lok minimumhelye)



Ha $f(\underline{x})<f(\underline{a})$ $\forall\, \underline{x}\in U\setminus\{\underline{a}\}$ $\to$ szig. lok max

$f(\underline{x})>f(\underline{a})$ —‖— $\to$ szig lok. min

95)

Ha f-nek lok szélsőértéke van $\underline{a}=(a_1,\dots,a_n)$-ben, akkor $\forall$ $f_i(x_i)=f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots a_n)$ nekcsófüggvényeknek is szélsőértéke van

$$\Downarrow$$

TÉTEL: Ha az f fv-nek lokális szélsőértéke van $\underline{a}\in\mathbb{R}^n$-ben, és f-nek léteznek a parciális deriváltjai $\underline{a}$-ban, akkor

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})=0 \quad \forall\, i=1,\dots,n$$

!

TÉTEL: $A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f: A\to\mathbb{R}$ folytonos t.f.h. f-nek léteznek a parciális deriváltjai A belsejében.

$\Rightarrow$ f abszolút maximumát (minimumát) vagy A határán veszi fel, vagy olyan pontban, ahol $\partial_{x_i} f(\underline{a})=0$ $\forall\, i=1,\dots,n$.

Biz.

Weierstrass-tétel $\Rightarrow$ f-nek $\exists$ maximuma A-n

T.f.h. $\underline{a}\in A$-ban van f-nek maximuma.

Ha $\underline{a}\in \operatorname{int} A$ $\Rightarrow$ f lok maximuma van $\underline{a}$-ban $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{a})=0$ $i=1,\dots,n$

Ha $\underline{a}\notin \operatorname{int} A$ $\Rightarrow$ $\underline{a}\in\partial A$

!

Példák

(1) $f(x,y)=xy(x^2+y^2-1)$ maximuma $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$ halmazon?

$\partial K = S := \{(x,y): x^2+y^2=1\}$, $S\subset K \Rightarrow K$ zárt, korlátos

- $f(S)=0$
- Mivel $x>0, y<0$ esetén $f(x,y)>0$ $(x,y)\in \operatorname{int} K$

$\Rightarrow f$ a maximumát $\operatorname{int} K$-ban veszi fel.

$\hookrightarrow$ t/h $(a,b)\in \operatorname{int} K$-ban maximum

$\hookrightarrow$ $f'_x(a,b)=b(3a^2+b^2-1)=0$
$f'_y(a,b)=a(a^2+3b^2-1)=0$

- Ha $b=0 \to f'_x(a,b)=0$ ✓

$f'_y(a,0)=a(a^2-1)=0$ $\to a=0 \to f(0,0)=0 \to$ nem MAX
$\to a=1$, $a=-1$ $(1,0),(-1,0)\in\partial K$

Kezdésben $a=0$ nem jó.

- Ha $3a^2+b^2-1=0$ $(a,b\neq 0)$
$\hookrightarrow a^2+3b^2-1=0$

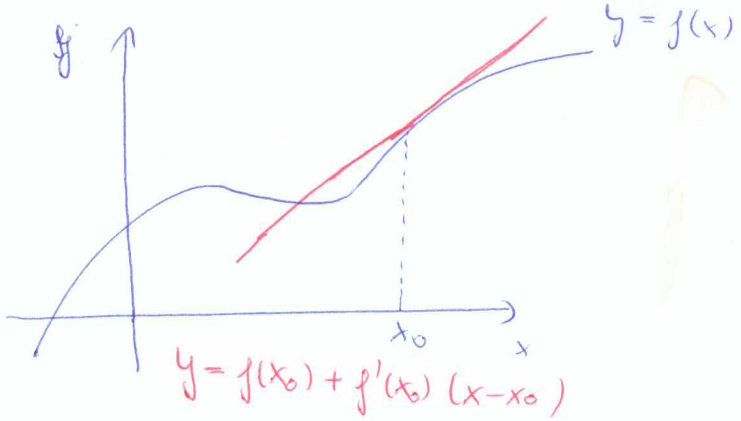
$9a^2+3b^2-3=0$
$a^2+3b^2-1=0$ $\Rightarrow 8a^2=2 \to a=\pm\frac{1}{2}$
$\hookrightarrow b=\pm 1/2$

$f\left(\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$ $f\left(\pm\frac{1}{2},\mp\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$ $\Rightarrow \max f=\frac{1}{8}$

96/

Többváltozós függvények deriváltja

Eml. 1 változóban



f deriválható x_0-ban, ha

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \exists \text{ és véges}$$

$\Longleftrightarrow$
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\varepsilon(x)\,|x-x_0| \quad \text{, ahol}$$

$$\varepsilon(x)\to 0 \text{, ha } x\to x_0$$

vagyis f-et a lehető legjobban közelítettük egy lineáris függvénnyel

f deriválható $\equiv$ f lineárisan közelíthető

másképpen írva:

$$\cancel{\Delta f = f(x)-f(x_0) = A(x-x_0)}$$

$$\Delta f = f(x_0+h)-f(x_0) = A\cdot h + \underbrace{\varepsilon(h)\cdot h}_{o(h) \text{ nagyságrendű}}$$

A független h-tól: $A=f'(x_0)$

és $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$

97/

<u>Def.</u> $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény <u>lineáris</u>, ha $\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, melyre

$$\ell(\underline{x}) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \qquad \forall\, \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\text{-re.}$$

<u>Megj.</u> (1) $x_{n+1} = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$: origón átmenő $\mathbb{R}^{n+1}$-beli sík egyenlete (hipersík)

(2) $\mathbb{R}^n$-ben $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \dfrac{f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)}{\underline{x} - \underline{x}_0}$ értelmetlen, mert vektorral nem osztunk!

$\Downarrow$

<u>Def.</u> $f : \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{}{D \atop \cap}} \to \mathbb{R}$, $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \operatorname{int} D$

f <u>differenciálható</u> $\underline{a}$-ban, ha $\exists\; \ell(\underline{x})$ lineáris függvény:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \ell(\underline{x} - \underline{a}) + \varepsilon(\underline{x}) \cdot \|\underline{x} - \underline{a}\| \qquad \forall\, \underline{x} \in D,$$

ahol $\varepsilon(\underline{x}) \to 0$, ha $\underline{x} \to \underline{a}$

98/

Megj. (1) alternatív def:

f deriválható $\underline{a}$-ban $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{\underline{x}\to\underline{a}} \dfrac{f(\underline{x})-f(\underline{a})-\ell(\underline{x}-\underline{a})}{\|\underline{x}-\underline{a}\|}=0}$

(2) $n=1$-ben visszakapjuk az eredeti definíciót

(3) néha a deriváltat totális deriváltnak hívják, hogy megkülönböztessük a parciális (részleges) deriválttól.

(4)
$$\left.\begin{aligned} \underline{a} &= (a_1,\dots,a_n) \in \operatorname{int} D \\ \underline{h} &= (h_1,\dots,h_n) \end{aligned}\right\} \quad \underline{a}+\underline{h}\in D$$

$$\Delta f = f(\underline{a}+\underline{h})-f(\underline{a}) = f(a_1+h_1, a_2+h_2,\dots, a_n+h_n)-f(a_1,a_2,\dots,a_n) =$$

$$= \underbrace{\alpha_1 h_1+\alpha_2 h_2+\dots+\alpha_n h_n}_{\ell(\underline{h})} + \varepsilon_1 h_1+\dots + \varepsilon_n h_n =$$

$$= \langle \underline{\alpha}, \underline{h}\rangle + \langle \underline{\varepsilon}(\underline{h}), \underline{h}\rangle$$

$\underline{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ független ~~ot~~ $\underline{h}$-tól

$\underline{\varepsilon}=(\varepsilon_1(\underline{h}),\dots,\varepsilon_n(\underline{h})) \to \underline{0}$, ha $\underline{h}\to\underline{0}$

$\underline{\alpha} = \operatorname{grad} f(\underline{a})$ <u>gradiens vektor</u>

55/

Megj

$$\left| \frac{\langle \underline{\varepsilon}(\underline{h}), \underline{h} \rangle}{\|\underline{h}\|} \right| = \left| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \frac{h_i}{\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}} \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i| \underbrace{\frac{|h_i|}{\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}}}_{\leq 1} \leq \sum_{i=1}^{n} |\varepsilon_i| \to 0$$

$\hookrightarrow$ $\langle \underline{\varepsilon}(\underline{h}), \underline{h} \rangle = o(\|\underline{h}\|)$

$$\Rightarrow \quad \Delta f = f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = \langle \underline{\alpha}, \underline{h} \rangle + o(\|\underline{h}\|)$$

Pl

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

belátjuk, hogy f deriválható $(0,0)$-ban és $\ell(x,y) \equiv 0$:

$$\frac{|f(x,y) - f(0,0) - \ell(x-0, y-0)|}{\|(x,y) - (0,0)\|} = \frac{\frac{x^2 y^2}{x^2+y^2} - 0 - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2 y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \leq$$

$$\leq \frac{[\max(x^2, y^2)]^2}{[\max(x^2, y^2)]^{3/2}} = [\max(x^2, y^2)]^{1/2} \longrightarrow 0$$

ha $(x,y) \to (0,0)$

TÉTEL Ha az f függvény deriválható $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$-ben, akkor f folytonos $\underline{a}$-ban.

Biz.

f deriválható $\underline{a}$-ban $\iff$

$$f(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \ell(\underline{x}-\underline{a}) + \varepsilon(\underline{x}) \cdot \|\underline{x}-\underline{a}\|$$

ahol $\varepsilon(\underline{x}) \to 0$, ha $\underline{x} \to \underline{a}$

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f(\underline{x}) = \lim_{\underline{x}\to\underline{a}} \Big(f(\underline{a}) + \underbrace{\ell(\underline{x}-\underline{a})}_{\downarrow \atop \ell(\underline{0})=0} + \underbrace{\varepsilon(\underline{x})\|\underline{x}-\underline{a}\|}_{\downarrow \atop 0} \Big) = f(\underline{a})$$

!

TÉTEL $\underline{a} \in \operatorname{int} D_f \subset \mathbb{R}^n$, ha f deriválható $\underline{a}$-ban, akkor

(i) f mindegyik parciális deriváltja $\exists$ és véges $\underline{a}$-ban

(ii) a derivált definícióját csak egyetlen ℓ lineáris függvény elégíti ki:

$$\ell(\underline{x}) = f'_{x_1}(\underline{a}) \cdot x_1 + f'_{x_2}(\underline{a}) \cdot x_2 + \dots + f'_{x_n}(\underline{a}) \cdot x_n$$

Megj. f deriválhatóságának szükséges feltétele: $\underline{a}$-ban az összes parciális derivált $\exists$ és véges.

101/

Biz.

f deriválható $\underline{a}$-ban $\Longleftrightarrow$ $f(\underline{a}+\underline{h}) = f(\underline{a}) + \underbrace{\underline{\alpha}\cdot\underline{h}}_{\ell(\underline{h})} + \underline{\varepsilon}(\underline{h})\cdot\underline{h}$,

ahol $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ $\quad\forall\ \underline{h}\in\mathbb{R}^n$, melyre

$\underline{h} = (h_1, \dots, h_n)$ $\quad\underline{a}+\underline{h}\in D_f$

és $\underline{\varepsilon}(\underline{h}) \to \underline{0}$ ha $\underline{h}\to\underline{0}$

$$\underline{\varepsilon}(\underline{h}) = (\varepsilon_1(\underline{h}), \dots, \varepsilon_n(\underline{h}))$$

$$\underline{h} := (0, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow\\ k\text{-dik koord.}}}{h_k}, 0, \dots, 0)$$

$$\Delta f = f(\underline{a}+\underline{h}) - f(\underline{a}) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + h_k, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(\underline{a}) =$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \underline{\alpha}\cdot\underline{h} = \alpha_k\cdot h_k}}{=} \alpha_k h_k + \varepsilon_k(\underline{h})\cdot h_k$$

$\hookrightarrow$

$$\frac{f(\underline{a}+\underline{h}) - f(\underline{a})}{h_k} = \frac{f(a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + h_k, a_{k+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h_k} =$$

$$= \alpha_k + \varepsilon_k(\underline{h})$$

$\underline{h}\to\underline{0} \Longleftrightarrow h_k \to 0$

LHS $\longrightarrow f'_{x_k}(\underline{a})$ $\qquad$ RHS $\longrightarrow \alpha_k$

(left hand side = baloldal) $\qquad$ (right hand side)

102/

Mivel az $\forall\, k = 1, \dots, n$ -re igaz

$\hookrightarrow$ $\underline{\alpha} = (f'_{x_1}(\underline{a}), f'_{x_2}(\underline{a}), \dots, f'_{x_n}(\underline{a})) \equiv \operatorname{grad} f(\underline{a})$

gradiens vektor = derivált vektor

!

jel. $f'(\underline{a}) \equiv \operatorname{grad} f(\underline{a}) = (f'_{x_1}(\underline{a}), \dots, f'_{x_n}(\underline{a}))$

$\Uparrow$

$\mathbb{R}^n$!

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fv. $\underline{a}$-beli

deriváltvektora (gradiense)

$\Downarrow$

$$f(\underline{x}) = f(\underline{a}) + \langle f'(\underline{a}), \underline{x} - \underline{a} \rangle + \varepsilon(\underline{x}) \cdot \|\underline{x} - \underline{a}\|$$

Példák

(1) $f(x,y) = xy$ deriválható-e $(1,2)$-ben?

$f'_x(x,y) = y \Rightarrow f'_x(1,2) = 2$

$f'_y(x,y) = x \Rightarrow f'_y(1,2) = 1$

$\Big\}$ $\Rightarrow$ ha f deriválható $(1,2)$-ben, akkor a deriváltvektora csak a $(2,1)$ vektor lehet.

ellenőrzés:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{|f(x,y) - f(1,2) - f'_{x_1}(2,1)(x-1) - f'_{x_2}(2,1)(y-2)|}{\|(x,y)-(1,2)\|} \ominus$$

igazolól nem kell 1.1$\frac{1}{2}$

103/

$$\textcircled{=} \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{|xy-2-2(x-1)-1\cdot(y-2)|}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{|(x-1)(y-2)|}{\underbrace{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}_{\geq}} = 0 \quad ✓$$

$$\frac{|x-1|\cdot|y-2|}{|y-2|} = |x-1| \to 0 \quad , \text{ha } x \to 1 .$$

f deriválható $(1,2)$-ben és $f'(1,2) = (2,1) = \text{grad} f(1,2)$

(2.) Deriválható-e az $f(\underline{x}) = \|\underline{x}\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+..+x_n^2}$ fv az origóban?

$$f'_{x_i}(\underline{0}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0,..,0,\overset{i}{h},0,..,0)-f(\underline{0})}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{\sqrt{h^2}-0}{h}}_{\frac{|h|}{h} = \pm 1} \not\exists$$

f nem deriválható az origóban, mert itt a parciális deriváltjai nem léteznek (szükséges feltétel!)

104

(3) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) := \sqrt{|xy|}$ ⇝ mindenütt folytonos (szükséges felt.)

deriválható-e az origóban?

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\sqrt{|h\cdot 0|}-0}^{\equiv 0}}{h} = 0$$

hasonlóan $f'_y(0,0) = 0$ (szimmetria)

⇒ Ha f deriválható $(0,0)$-ban, akkor a deriváltmátrixa itt csak a $(0,0)$ lehet.

de:

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-0\cdot x-0\cdot y}{\|(x,y)\|} = \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{\substack{x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi}}{=} \frac{r\sqrt{|\cos\varphi\sin\varphi|}}{r} = \underbrace{\sqrt{|\cos\varphi\sin\varphi|}}_{\text{függ } \varphi\text{-től ha } r\to 0}$$

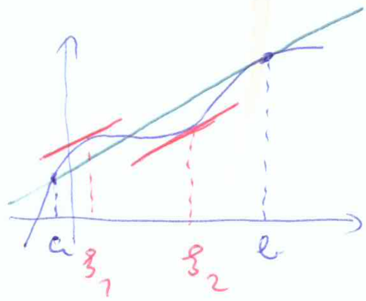
⇒ f nem deriválható $(0,0)$-ban

Megj: A példa mutatja, hogy a parciális deriváltak létezése valóban nem elégséges, csak szükséges feltétel!

Eml: 1 változós Lagrange-féle középértéktétel egy hasznos alakja:

Ha f diffható (a,b)-ben és folytonos $[a,b]$-ben, akkor $\exists\ \xi \in (a,b)$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$



$$\Downarrow$$

$$b := a+h \rightsquigarrow b-a=h$$

$$\xi \in (a,b) \Rightarrow \exists\ \vartheta \in (0,1) : \xi = a+\vartheta h$$

$$\Rightarrow \boxed{\exists\ \vartheta \in (0,1) : \quad f(a+h)-f(a) = f'(a+\vartheta h)\cdot h}$$

TÉTEL (elégséges feltétel $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ deriválhatóságára)

$D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$, $\underline{a} \in \operatorname{int} D$

Ha f'_{x_i} parciális deriváltak léteznek és folytonosak $\underline{a}$ valamely $K_{\underline{a}}$ környezetében, akkor f deriválható $\underline{a}$-ban.

106/

<u>Biz.</u> $n=2$-re bizonyítjuk, ugyanígy megy magasabb dimenzióban:

$\underline{a}=(a_1,a_2)$, $\underline{h}=(h_1,h_2)$, $f(\underline{x})=f(x,y)$

feltétel: $K_{\underline{a}}$-ban teljesül, hogy

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f'_x(\underline{x})=f'_x(\underline{a}) \qquad f'_x \text{ folytonos}$$

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} f'_y(\underline{x})=f'_y(\underline{a}) \qquad f'_y \text{ folytonos.}$$

! $\underline{a}+\underline{h} = K_{\underline{a}}$

$$\Delta f = f(\underline{a}+\underline{h})-f(\underline{a}) = f(a_1+h_1, a_2+h_2)-f(a_1,a_2) =$$

$$= \underbrace{f(a_1+h_1,a_2+h_2)-f(a_1+h_1,a_2)}_{\exists\, \vartheta_2\in(0,1)\ \downarrow \text{ Lagrange-féle k.t.-ből a 2. változóban}} + \underbrace{f(a_1+h_1,a_2)-f(a_1,a_2)}_{\exists\, \vartheta_1\in(0,1)\ \downarrow \text{ Lagrange-féle k.t. az 1. változóban}} =$$

$$= f'_y(a_1+h_1, a_2+\vartheta_2 h_2)\cdot h_2 + f'_x(a_1+\vartheta_1 h_1, a_2)\cdot h_1 =$$

$\uparrow$

parciális deriváltak folytonosak! $\rightsquigarrow$ $\varepsilon_2\to 0$, ha $h_2\to 0$
$\varepsilon_1\to 0$, ha $h_1\to 0$

$$\overset{\downarrow}{=} [f'_y(a_1,a_2)+\varepsilon_2]\cdot h_2 + [f'_x(a_1,a_2)+\varepsilon_1]\cdot h_1 =$$

$$= f'_x(a_1,a_2)\cdot h_1 + f'_y(a_1,a_2)\cdot h_2 + \varepsilon_1\cdot h_1 + \varepsilon_2\cdot h_2 = \langle\underline{\alpha},\underline{h}\rangle + \langle\underline{\varepsilon},\underline{h}\rangle$$

és $\underline{\varepsilon}\to\underline{0}$, ha $\underline{h}\to\underline{0}$ $\rightsquigarrow$ deriválható !

Példa $\quad f(x,y)=xy+y^2 \quad$ hol deriválható? grad f?

$f'_x(x,y)=y$ $\rightsquigarrow$ mindenütt folytonos

$f'_y(x,y)=x+2y$ $\rightsquigarrow$ mindenütt folytonos

$$\Downarrow$$

f mindenütt deriválható és

$$f'(x,y)\equiv \operatorname{grad} f(x,y) = (y,\ x+2y)$$

Megjegyzések

(1) A parciális deriváltak folytonossága nem szükséges feltétele a deriválhatóságnak.

Pl)
$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$\hookrightarrow$
$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{\sqrt{h^2}}-0}{h}=$$
$$=\lim_{h\to 0} h\cdot\underbrace{\sin\frac{1}{\sqrt{h^2}}}_{\text{korl}}=0$$

Hasonlóan $\quad f'_y(0,0)=0 \quad$ (szimmetria)

108)

$$f'_x(x,y) = 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - (x^2+y^2)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{2x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= 2x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

pl: az x tengely mentén $(y=0)$

$$f'_x(x,0) = 2x \sin\frac{1}{|x|} - \frac{x}{|x|}\cos\frac{1}{|x|} \rightarrow \nexists \text{ a határérték } x \to 0 \text{ esetén}$$

$\Rightarrow$ f'_x nem folytonos az origóban!

de f differenciálható:

$\underline{h} = (h_1, h_2)$

$$f(\underline{h}) - f(\underline{0}) = (h_1^2+h_2^2)\sin\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 + \varepsilon(\underline{h}) \cdot \underbrace{\|\underline{h}\|}_{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$\hookrightarrow \quad \varepsilon(\underline{h}) = \sqrt{h_1^2+h_2^2}\,\sin\frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \xrightarrow[(h_1,h_2)\to(0,0)]{} 0$$

!

(2) Igaz-e, hogy ha f diffható $\underline{a}$-ban, akkor ott a parciális deriváltjai folytonosak?

NEM:

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\left(y+\sin\frac{1}{x}\right) & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

ellenőrizhető (HF), hogy mindenütt diffható

de:

$$f'_x(x,y)=\begin{cases} 2x\left(y+\sin\frac{1}{x}\right)-\cos\frac{1}{x} & , x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

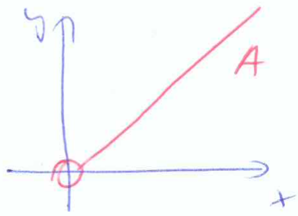
↓

nem folytonos $(0,0)$-ban.

(3.) Igaz-e, hogy ha minden parciális derivált folytonos $\underline{a}$-ban, akkor f diffható $\underline{a}$-ban?

NEM ($\underline{a}$ egy környezetében kell folytonosnak lennie!)

pl: $A := \{(x,y) : x=y,\ x>0\} \subset \mathbb{R}^2$



$$f(x,y)=\begin{cases} x^{2/3} & , \text{ha } (x,y)\in A \\ 0 & , \text{ha } (x,y)\notin A \end{cases}$$

↳ • $f'_x(x,y)=f'_y(x,y)=0$, ha $(x,y)\notin A$

• $f'_x, f'_y\ \nexists$ ha $(x,y)\in A$

• f'_x, f'_y folytonos $(0,0)$-ban, de f nem diffható $(0,0)$-ban.

110/

(5) Igaz-e, hogy ha f diffható $\underline{a}$-ban, akkor a parciális deriváltak léteznek $\underline{a}$ valamely környezetében?

<u>NEM</u>.

Pl.:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & x,y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

és f csak $(0,0)$-ban diffható

- $f'_x(0,0) = 0$, $f'_x\big|_{y \notin \mathbb{Q}} = 0$, máshol $f'_x \nexists$
- $f'_y(0,0) = 0$, $f'_y\big|_{x \notin \mathbb{Q}} = 0$, máshol $f'_y \nexists$

$$\Downarrow$$

$(0,0)$ környezetében nem léteznek a parciális deriváltak, pedig $(0,0)$-ban f diffható

!