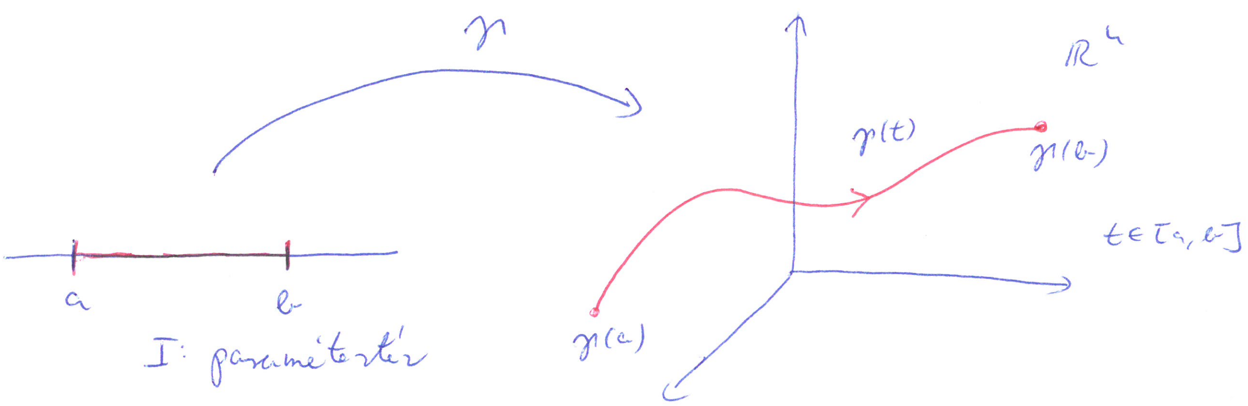
444)

Felület és felszín

Eml.: görbék értelmezése

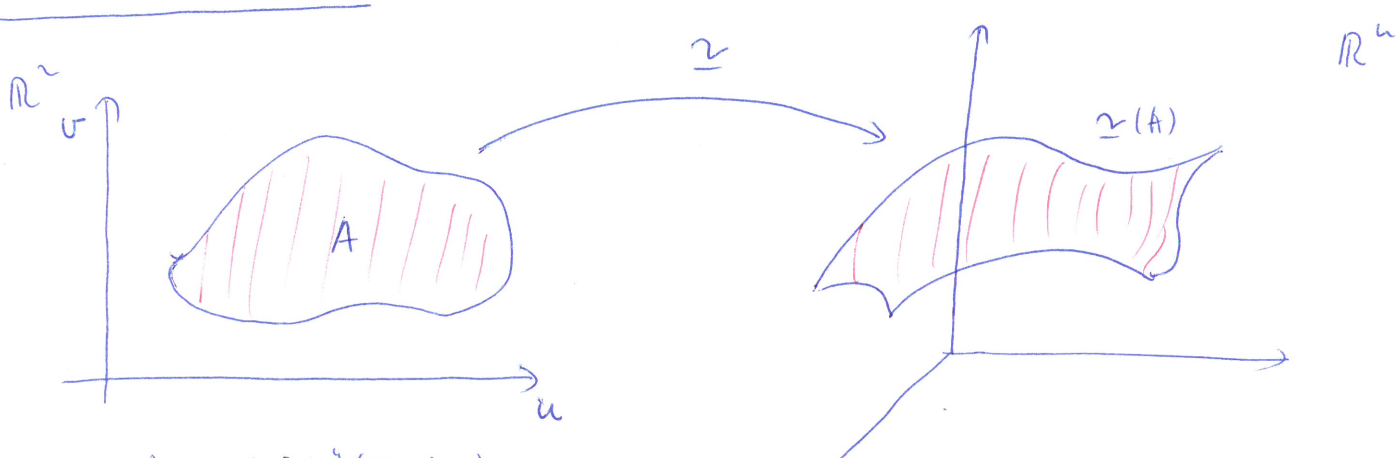
$I=[a,b]\subset\mathbb{R}$

$\gamma: I\to\mathbb{R}^n$, ha $\gamma\in C^1$ ⇝ γ sima görbe



I: paramétertér

Felület értelmezése:



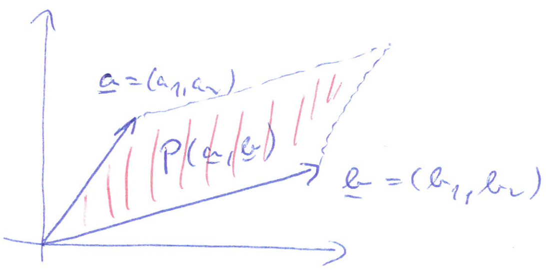
$A\subset\mathbb{R}^2$ mérhető (Jordan): paramétertér

Def: $A\subset\mathbb{R}^2$ mérhető, $\underline{r}: A\to\mathbb{R}^n$ leképezést $\mathbb{R}^n$-beli (paraméterezett) felületnek hívjuk.

- Az $\underline{r}$ felület folytonos, diffható ill. folytonosan diffható, ha az $\underline{r}$ leképezés folytonos, diffható ill. folytonosan diffható A-n.

445/

Exml.



$\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^2$

$$P(\underline{a}, \underline{b}) := \{ \alpha \underline{a} + \beta \underline{b} \in \mathbb{R}^2 : \alpha, \beta \in [0,1] \}$$

az $\underline{a}, \underline{b}$ vektorok által kifeszített paralelogramma

$P(\underline{a}, \underline{b})$ területe:

$$\operatorname{mes} P(\underline{a}, \underline{b}) = \left| \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \right| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

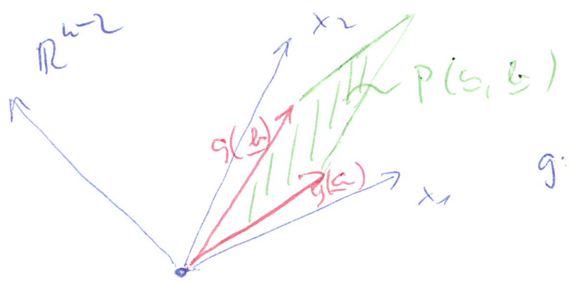
$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 =$$

$$= \|\underline{a}\|^2 \cdot \|\underline{b}\|^2 - \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle^2$$

$$\Longrightarrow \boxed{\operatorname{mes} P(\underline{a}, \underline{b}) = \sqrt{\|\underline{a}\|^2 \cdot \|\underline{b}\|^2 - \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle^2}}$$

Áll. Ha $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ tetszőlegesek $\Longrightarrow$ egy síkba esnek

$\Downarrow$



a koordinátarendszer elforgatható $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$-nel úgy (egybevágóság), hogy $g(\underline{a})$ és $g(\underline{b})$ az

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) : x_3 = x_4 = \dots = x_n = 0\}$$

síkba essen (x_1, x_2) koordinátasík

446)

$$\Rightarrow \quad \operatorname{mes} P(a,b) = \sqrt{\|g(a)\|^2 \cdot \|g(b)\|^2 - \langle g(a), g(b)\rangle^2}$$

de egy g egybevágóság nem változtatja meg sem a vektorok hosszát, sem a skaláris szorzatot

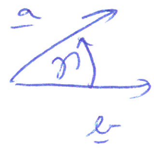
$$\Downarrow$$

$$\boxed{\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \operatorname{mes} P(\underline{a},\underline{b}) = \sqrt{\|\underline{a}\|^2 \cdot \|\underline{b}\|^2 - \langle \underline{a},\underline{b}\rangle^2}}$$

vegyük észre:

$$\sqrt{\|\underline{a}\|^2 \cdot \|\underline{b}\|^2 - \langle \underline{a},\underline{b}\rangle^2} \underset{\uparrow}{=} \sqrt{\|\underline{a}\|^2 \cdot \|\underline{b}\|^2 - \|\underline{a}\|^2 \cdot \|\underline{b}\|^2 \cdot \cos^2\gamma} =$$

$$\langle \underline{a},\underline{b}\rangle = \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\| \cdot \cos\gamma$$



$$= \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\| \cdot \sqrt{1-\cos^2\gamma} = \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\| \sin\gamma$$

ha $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow \operatorname{mes} P(\underline{a},\underline{b}) = |\underline{a} \times \underline{b}|$

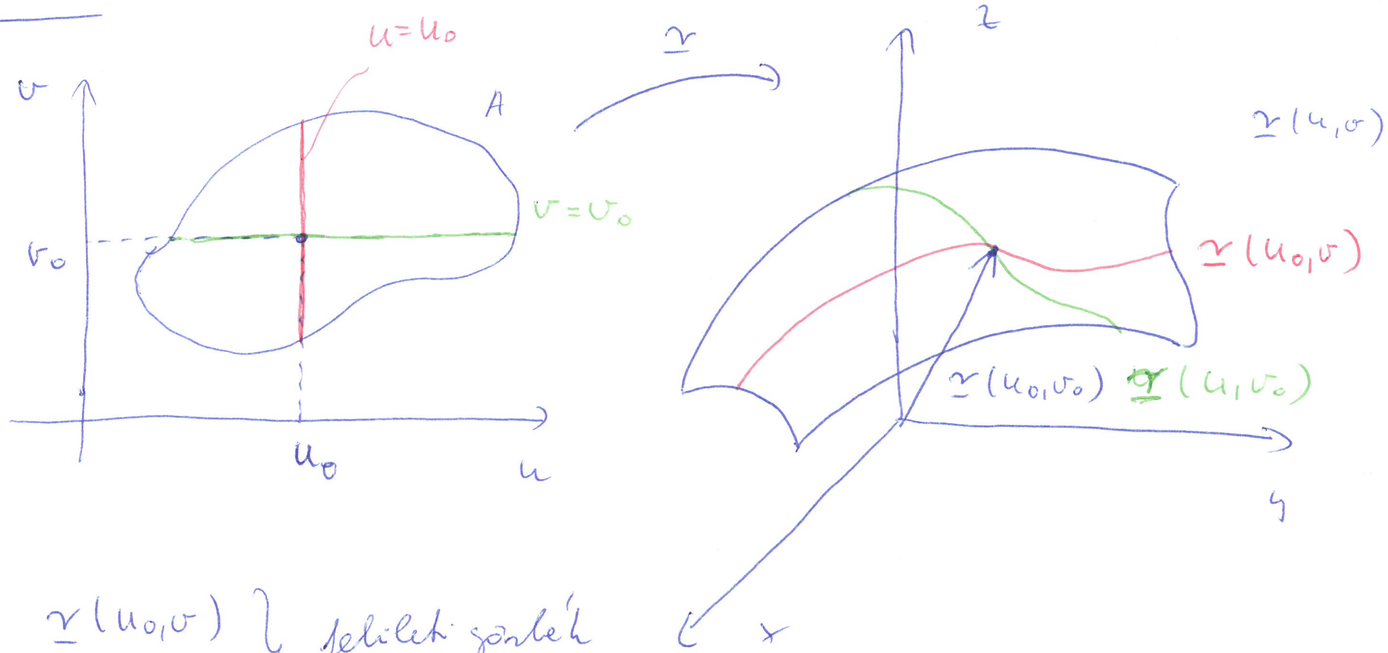
$\Rightarrow$ Def (jelölés), ha $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$

$$|\underline{a} \times \underline{b}| := \sqrt{\|\underline{a}\|^2 \cdot \|\underline{b}\|^2 - \langle \underline{a},\underline{b}\rangle^2}$$

447)

A korábbiakban csak $\mathbb{R}^3$-beli felületekkel foglalkozunk – általánosítás: diffgeo tárgyak

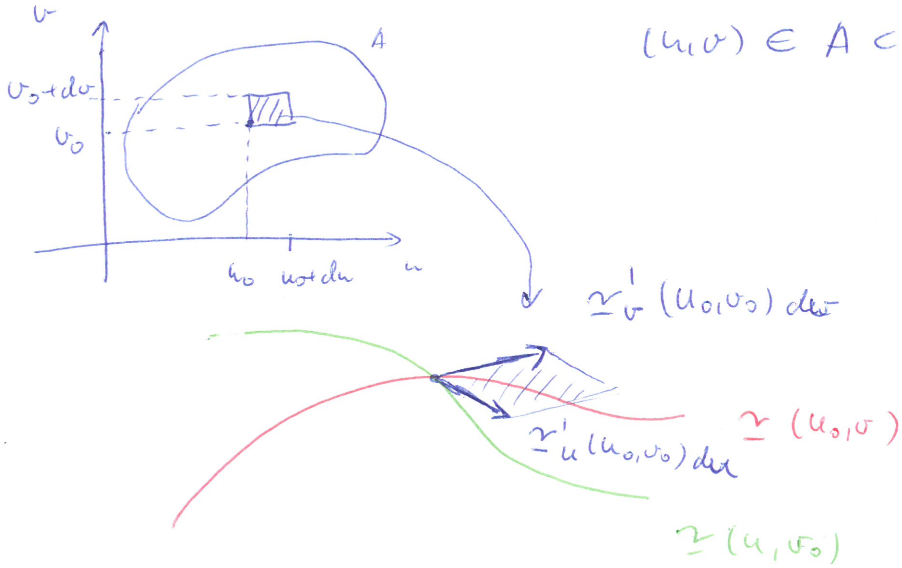
Motiváció



↳ $\left.\begin{array}{l}\underline{r}(u_0,v)\\ \underline{r}(u,v_0)\end{array}\right\}$ felületi görbék

$$\underline{r}(u,v)=\big(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\big)\in\mathbb{R}^3$$

$$(u,v)\in A\subset\mathbb{R}^2$$



$\underline{r}'_u(u_0,v_0)$ érintő vektor elmozdulást du-t
$\underline{r}'_v(u_0,v_0)$ –"– –"– dv-t
} ⇒ infinitezimális paralelogramma

4.58)

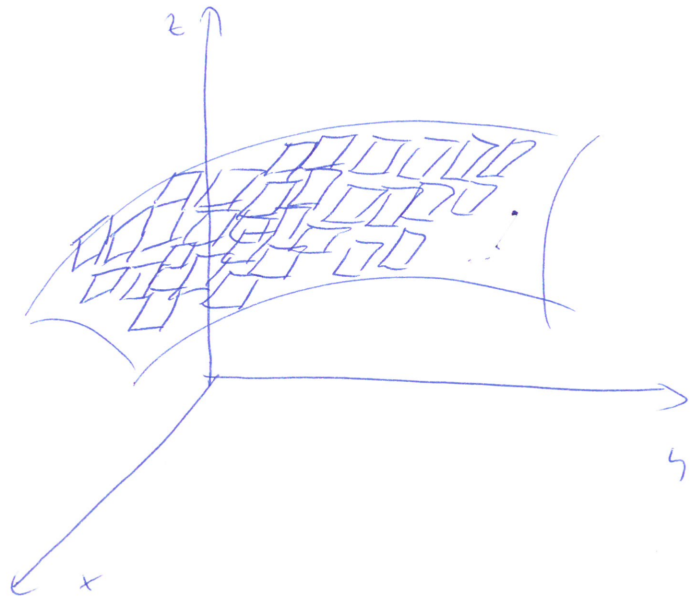
$P(\underline{r}'_u(u_0,v_0)du, \underline{r}'_v(u_0,v_0)dv)$ paralelogramma területe:

$$|\underline{r}'_u(u_0,v_0)du \times \underline{r}'_v(u_0,v_0)dv| = |\underline{r}'_u(u_0,v_0) \times \underline{r}'_v(u_0,v_0)|\,du\,dv$$

$\rightsquigarrow$ ezt az A paramétertartomány minden pontjában megtesszük

$\Downarrow$

infinitezimális paralelogrammákkal fedjük be a felületet $\rightsquigarrow$ „pikkelyezés"



~~Bizt~~

<u>Def.</u> $A \subset \mathbb{R}^2$ mérhető, $\underline{r}: A \to \mathbb{R}^3$ folytonosan diffható felület. Ekkor a <u>felület felszíne</u>

$$\iint_A \|\underline{r}'_u(u,v) \times \underline{r}'_v(u,v)\|\,du\,dv.$$

<u>Megj.</u> Belátható, hogy a felszín ilyen értelmezése független a paraméterezés módjától!

445)

Hasonlóan értelmezhető a felszíne egy felületnek magasabb dimenzióban is (pl. 3 dimenziós felület felszíne $\mathbb{R}^8$-ban):

$g : A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^2$ folytonosan diffható felület felszíne

$$\iint_A \underbrace{\|D_1 g \times D_2 g\|}_{\sqrt{\|D_1 g\|^2 \cdot \|D_2 g\|^2 - \langle D_1 g, D_2 g\rangle^2}} \, dx\, dy$$

Megj: Belátható, hogy a felszín független a paraméterezéstől!

Példák

(1) $\underline{r}(u,v) = \underline{i}\, u \cos v + \underline{j}\, u \sin v + \underline{k}\, v$ „csavarfelület" felszíne?

$0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le 1$ ↳ $A = [0, 2\pi] \times [0,1]$

↳ $\underline{r}'_u(u,v) = \underline{i} \cos v + \underline{j} \sin v$

$\underline{r}'_v(u,v) = -\underline{i}\, u \sin v + \underline{j}\, u \cos v + \underline{k}$

↳ $$\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos v & \sin v & 0 \\ -u \sin v & u \cos v & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{i}(\sin v - 0) - \underline{j}(\cos v - 0) + \underline{k}(u \cos^2 v + u \sin^2 v) =$$

$$= (\sin v, -\cos v, u)$$

↳ $$\|\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v\| = \sqrt{\sin^2 v + \cos^2 v + u^2} = \sqrt{u^2+1}$$

$$F = \iint_A \|\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v\| \, du\, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{1} \sqrt{u^2+1}\, du\, dv = \int_0^1 \cancel{\ldots}$$

450/

$$\int \sqrt{u^2+1}\,du \underset{\uparrow}{=} \int \sqrt{ch^2 t}\; ch\,t\,dt = \int ch^2 t\,dt \underset{\uparrow}{=}$$

$u = sh\,t \rightsquigarrow \frac{du}{dt} = ch\,t$

$ch^2 t - sh^2 t = 1 \rightsquigarrow ch^2 t = sh^2 t + 1$

$ch^2 t - sh^2 t = 1$
$ch^2 t + sh^2 t = ch\,2t$
$\Downarrow$
$ch^2 t = \frac{1 + ch\,2t}{2}$

$$= \frac{1}{2}\int (1 + ch\,2t)\,dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{sh\,2t}{2}\right) + C \;(=)$$

$$(=) \frac{1}{2}\,arsh\,u + \frac{1}{4}\underbrace{sh(2\,arsh\,u)}_{2\,sh(arsh\,u)\underbrace{ch(arsh\,u)}_{\sqrt{sh^2(arsh\,u)+1}} = 2u\sqrt{u^2+1}} + c$$

$\uparrow$
$t = arsh\,u$

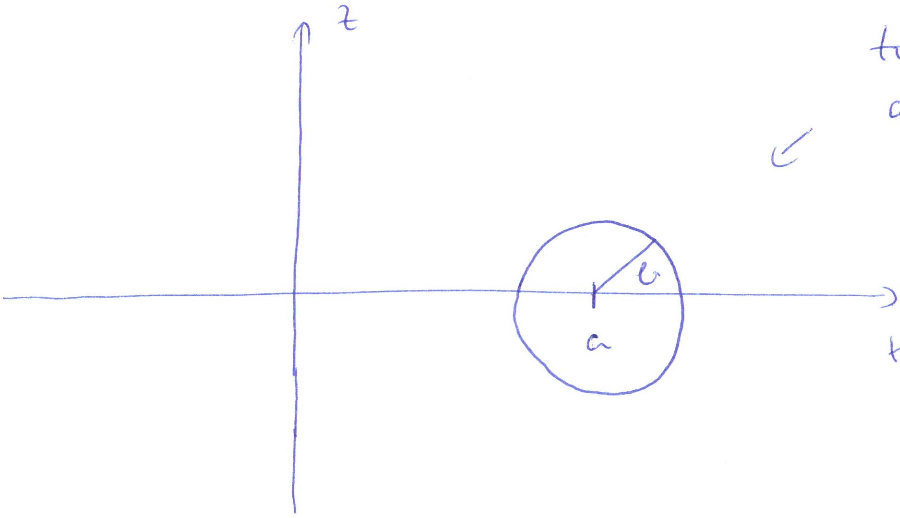
$$\Rightarrow \quad F = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{u^2+1}\,du\,dv = 2\pi\int_0^1 \sqrt{u^2+1}\,du = 2\pi\left[\frac{1}{2}\,arsh\,u + \frac{1}{2}u\sqrt{u^2+1}\right]_0^1$$

$$\underset{\uparrow}{=} \underline{\underline{\pi\left(arsh\,1 + \sqrt{2}\right)}}$$

$arsh\,0 = 0$

451/

② A tórusz felszíne:

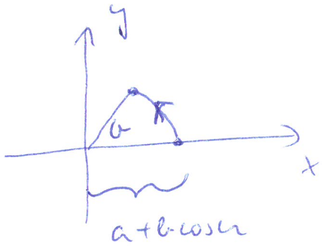


tórusz: az (x,z) síkban $(a,0)$ középpontú b sugarú kör z tengely körüli megforgatásával kapott felület $(b<a)$

a megforgatott kör paraméteres egyenlete:

$$x = a + b\cos u$$
$$z = b\sin u$$

! v: az x tengellyel bezárt pozitív forgásirányú szög



$\Downarrow$

$$\boxed{\underline{r}(u,v) = \big((a+b\cos u)\cdot\cos v,\ (a+b\cos u)\sin v,\ b\sin u\big)}$$

$a<b$

$u \in [0,2\pi]$

$v \in [0,2\pi]$

$\Rightarrow \underline{r}'_u = (-b\sin u\cos v,\ -b\sin u\sin v,\ b\cos u)$

$\underline{r}'_v = (-(a+b\cos u)\sin v,\ (a+b\cos u)\cos v,\ 0)$

452)

$$\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -b\sin u\cos v & -b\sin u\sin v & b\cos u \\ -(a+b\cos u)\sin v & (a+b\cos u)\cos v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= b(a+b\cos u)\underbrace{\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\sin u\cos v & -\sin u\sin v & \cos u \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{vmatrix}}_{\underline{i}(-\cos u\cos v)-\underline{j}\cos u\sin v+\underline{k}(\underbrace{-\sin u\cos^2 v-\sin u\sin^2 v}_{-\sin u})} =$$

$$= b(a+b\cos u)\left(-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, -\sin u\right)$$

$$\Downarrow$$

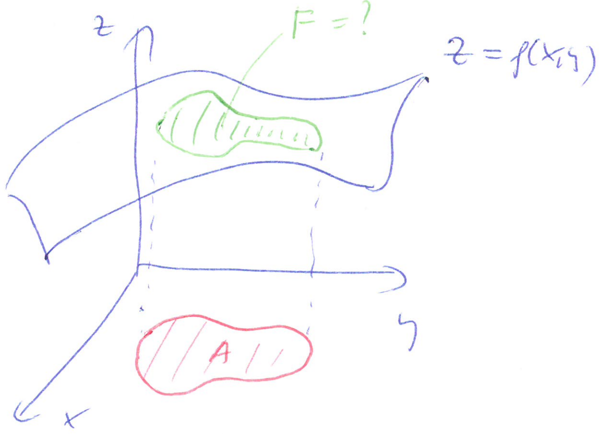
$$\|\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v\| = b(a+b\cos u)\sqrt{\underbrace{\cos^2 u\cos^2 v+\cos^2 u\sin^2 v}_{\cos^2 u}+\sin^2 u} = b(a+b\cos u)$$

a tórusz felszíne:

$$F = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b(a+b\cos u)\,du\,dv = 2\pi \underbrace{\int_0^{2\pi} b(a+b\cos u)\,du}_{\left[bau+b^2\sin u\right]_0^{2\pi}=2\pi ab} = \underline{\underline{4\pi^2 ab}}$$

453/

<u>Megj:</u> $z = f(x,y)$ alakú felületek felszíne



$(x,y) \in A$ paramétertér

paraméterezés:

$$\underline{r}(x,y) = (x, y, f(x,y)), \quad (x,y) \in A$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{r}'_x &= (1, 0, f'_x(x,y)) \\ \underline{r}'_y &= (0, 1, f'_y(x,y)) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{r}'_x \times \underline{r}'_y = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & f'_x(x,y) \\ 0 & 1 & f'_y(x,y) \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}\,(-f'_x(x,y)) - \underline{j}\, f'_y(x,y) + \underline{k} =$$

$$= (-f'_x(x,y), -f'_y(x,y), 1)$$

<u>megj:</u> ez éppen a szokásos normálvektor (-1)-szerese

$$\Rightarrow \quad \|\underline{r}'_x \times \underline{r}'_y\| = \sqrt{(f'_x(x,y))^2 + (f'_y(x,y))^2 + 1}$$

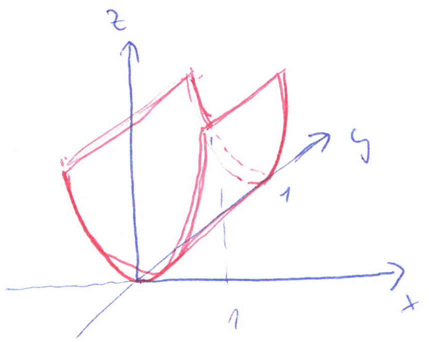
$$\Rightarrow \quad \boxed{F = \iint_A \sqrt{1 + (f'_x(x,y))^2 + (f'_y(x,y))^2}\, dx\, dy}$$

Megj. Ha pl. $x = f(y,z)$ alakú felület, $(y,z) \in A$

$$\hookrightarrow \quad F = \iint_A \sqrt{1 + f_y'^2 + f_z'^2}\, dy\, dz$$

Példák

① $z = x^2$, $(x,y) \in [0,1] \times [0,1] = A$ felszíne?



$$\underline{r}(x,y) = (x, y, x^2) \qquad (x,y) \in [0,1]\times[0,1]$$

$$\hookrightarrow f_x'(x,y) = 2x, \quad f_y'(x,y) = 0$$

$$F = \int_0^1\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\, dx =$$

Láttuk: $\int \sqrt{u^2+1}\, du = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arsh} u + u\sqrt{u^2+1}\right) + C$

$u := 2x$

- $\frac{du}{dx} = 2$

$\hookrightarrow dx = \frac{1}{2} du$

- $0 \le x \le 1$

$\Downarrow$

$0 \le u \le 2$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+u^2}\, du = \frac{1}{4}\left[\operatorname{arsh} u + u\sqrt{u^2+1}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\operatorname{arsh} 2 + 2\sqrt{5}\right)$$

Skalárértékű függvények integrálása felületen

motiváció:

$$\underline{r} : \underset{\underset{\mathbb{R}^2}{\cap}}{A} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \text{felület}$$

$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 3 változós függvény (pl sűrűség, töltéssűrűség)

$\Downarrow$

Mekkora a felület „tömege", „össztöltése"?

$$\iint\limits_{\substack{F \\ \| \\ \underline{r}(A)}} h(\underline{r})\, dF \equiv \iint\limits_{A} h(\underline{r}(u,v)) \underbrace{|\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v|\, du\, dv}_{dF}$$

Pl | $A = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$

$\underline{r}(u,v) = (2\cos u + \cos u \cos v, -2\sin u - \sin u \cos v, \sin v)$

$h(x,y,z) = x^2$

$\hookrightarrow$ $\underline{r}'_u = (-2\sin u - \sin u \cos v, -2\cos u - \cos u \cos v, 0)$

$\underline{r}'_v = (-\cos u \sin v, \sin u \cos v, \cos v)$

$$\hookrightarrow \underline{r}'_u \times \underline{r}'_v = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\sin u (2+\cos v) & -\cos u (2+\cos v) & 0 \\ -\cos u \sin v & \sin u \cos v & \cos v \end{vmatrix} = (2+\cos v) \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -\sin u & -\cos u & 0 \\ -\cos u \sin v & \sin u \cos v & \cos v \end{vmatrix}$$

456/

$\Rightarrow \ldots \quad |\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v| = 2 + \cos v$

$h(x,y,z) = x^2 \Rightarrow h(\underline{r}(u,v)) = (2\cos u + \cos u \cos v)^2$

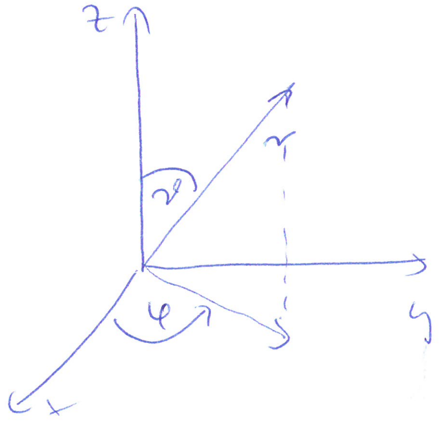
$$\hookrightarrow \quad \iint_F h(\underline{r})\,dF = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{(2\cos u + \cos u \cos v)^2}_{4\cos^2 u + \cos^2 u \cos^2 v + 4\cos^2 u \cos v = \cos^2 u\,\underbrace{(4 + \cos^2 v + 4\cos v)}_{(2+\cos v)^2}} (\cos v + 2)\,du\,dv$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 u \cdot du \cdot \int_0^{2\pi} (2+\cos v)^3\,dv = \ldots = \underline{\underline{22\pi^2}}$$

(2) $\iint_F (1+x)\,dF = ?$ ahol $F: \left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=16 \\ 0 \le x \end{array}\right\}$ félgömbhéj

félgömbhéj paraméterezése : gömbi koordináták

eml.



$x = r\sin\vartheta\cos\varphi$

$y = r\sin\vartheta\sin\varphi$

$z = r\cos\vartheta$

457/ itt gömbfelszín $\Rightarrow$ $r=4$

$\hookrightarrow$ $x = 4\sin\vartheta\cos\varphi$ $\quad 0 \le \vartheta \le \pi$

$y = 4\sin\vartheta\sin\varphi$ $\quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ $\Big\}$ $x \ge 0$ félgömb

$z = 4\cos\vartheta$

paraméterezés:

$$\underline{r}(\vartheta,\varphi) = (4\sin\vartheta\cos\varphi,\ 4\sin\vartheta\sin\varphi,\ 4\cos\vartheta)$$

$(\vartheta,\varphi) \in [0,\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\underline{r}'_\vartheta = (4\cos\vartheta\cos\varphi,\ 4\cos\vartheta\sin\varphi,\ -4\sin\vartheta)$$

$$\underline{r}'_\varphi = (-4\sin\vartheta\sin\varphi,\ 4\sin\vartheta\cos\varphi,\ 0)$$

$$\underline{r}'_\vartheta \times \underline{r}'_\varphi = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 4\cos\vartheta\cos\varphi & 4\cos\vartheta\sin\varphi & -4\sin\vartheta \\ -4\sin\vartheta\sin\varphi & 4\sin\vartheta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = 16\sin\vartheta \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 16\sin\vartheta\,(\sin\vartheta\cos\varphi,\ \sin\vartheta\sin\varphi,\ \underbrace{\cos\vartheta\cos^2\varphi + \cos\vartheta\sin^2\varphi}_{=\cos\vartheta})$$

$$\hookrightarrow \|\underline{r}'_\vartheta \times \underline{r}'_\varphi\| = 16\sin\vartheta\sqrt{\underbrace{\sin^2\vartheta\cos^2\varphi + \sin^2\vartheta\sin^2\varphi}_{\sin^2\vartheta} + \cos^2\vartheta} = 16\sin\vartheta$$

$$1 + x = 1 + 4\sin\vartheta\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \iint_F (1+x)\,dF = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2}\int_0^{\pi} (1 + 4\sin\vartheta\cos\varphi)\cdot 16\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = \ldots = \underline{\underline{96\pi}}$$

45-8

(3) R sugarú gömb felszíne

$$\underline{r}(\vartheta,\varphi) = (R\sin\vartheta\cos\varphi,\ R\sin\vartheta\sin\varphi,\ R\cos\vartheta)$$

$$0 \le \vartheta \le \pi$$
$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

$\hookrightarrow$ $\underline{r}'_\vartheta = (R\cos\vartheta\cos\varphi,\ R\cos\vartheta\sin\varphi,\ -R\sin\vartheta)$

$\underline{r}'_\varphi = (-R\sin\vartheta\sin\varphi,\ R\sin\vartheta\cos\varphi,\ 0)$

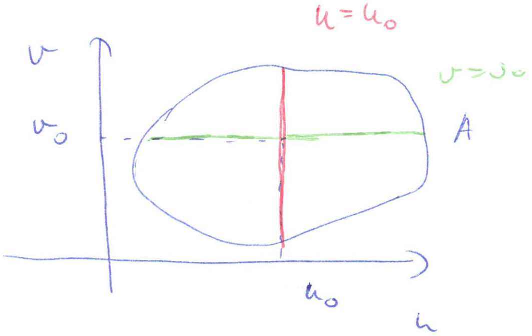
$$\hookrightarrow \underline{r}'_\vartheta \times \underline{r}'_\varphi = R^2\sin\vartheta \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \cos\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\vartheta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

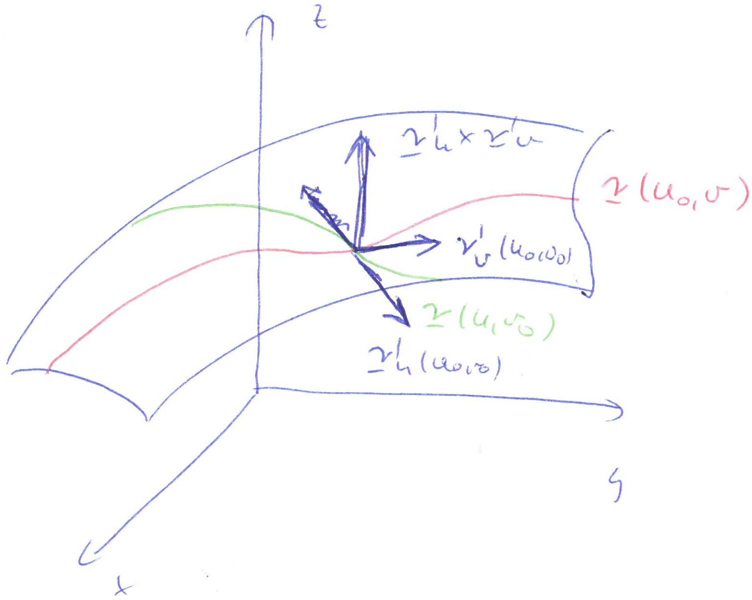
$$= R^2\sin\vartheta\,(\sin\vartheta\cos\varphi,\ \sin\vartheta\sin\varphi,\ \cos\vartheta)$$

$$\Rightarrow \|\underline{r}'_\vartheta \times \underline{r}'_\varphi\| = R^2\sin\vartheta$$

$$\hookrightarrow F = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi = R^2\cdot 2\pi \underbrace{\int_0^{\pi}\sin\vartheta\, d\vartheta}_{[-\cos\vartheta]_0^{\pi} = 1+1=2} = \underline{\underline{4R^2\pi}}$$

Megj





↳ $\underline{r}'_u(u_0,v_0) \times \underline{r}'_v(u_0,v_0)$ a felület $\underline{r}(u_0,v_0)$ pontjához tartozó <u>normálvektor</u>

↳ $\underline{r}(u_0,v_0)$-beli érintősík megadható

Vektor-vektor függvények (vektormezők) felületmenti integrálja

<u>Def</u>

$\underline{r}: A \to \mathbb{R}^3$ deriválható felület : $(\underline{r}(A) = F)$

$A \subset \mathbb{R}^2$

$\underline{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény (vektormező)

$$\Rightarrow \iint_F \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{F} = \iint_A \langle \underline{v}(\underline{r}), \underline{r}_u \times \underline{r}_v \rangle \, du\, dv =$$

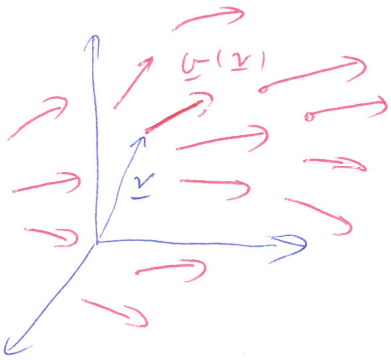
skalárszorzat

$$= \iint_A \underline{v}(\underline{r}(u,v)) \cdot \underbrace{(\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v)\, du\, dv}_{d\underline{F}}$$

Szemléltetés

Tfh $\underline{v}(\underline{r})$ egy ~~f~~ folyadék áramlási tere:

$\underline{r}$ helyen lévő részecske sebessége $\underline{v}(\underline{r})$

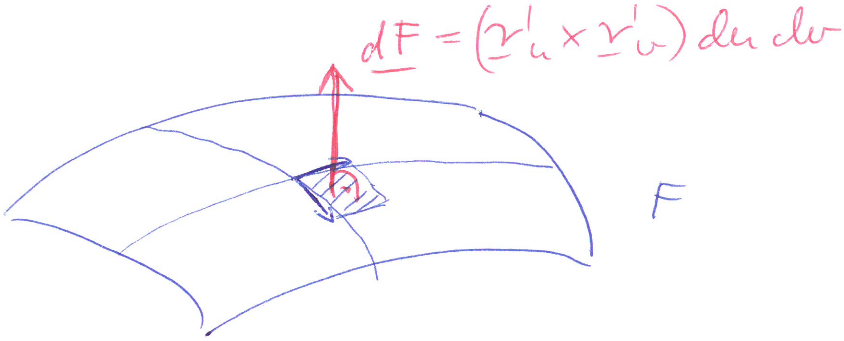


Adott egy F felületdarab, melynek paraméterezése

$$\underline{r}: A \to \mathbb{R}^3, \quad A \subset \mathbb{R}^2, \quad \underline{r} = r(u,v), \quad (u,v) \in A$$

és ez a paraméterezés megadja a felület egy irányítását:

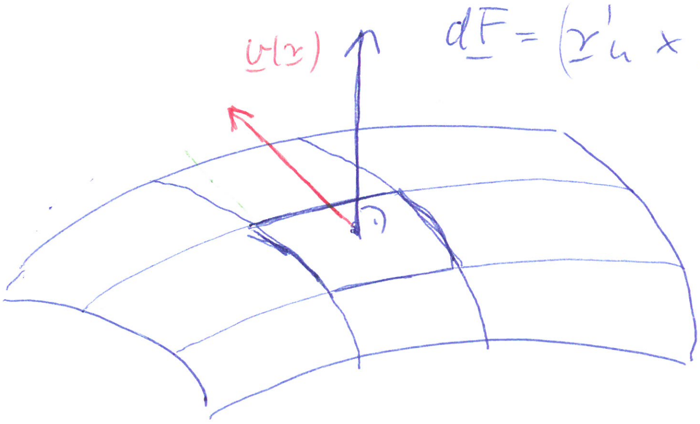
$\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v$ egy normálvektor



Mennyi folyadék áramlik át időegység alatt az F felületen?

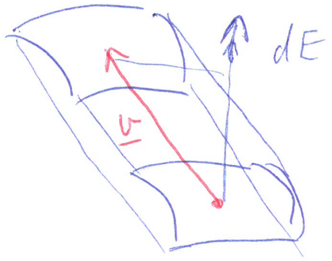
461)

A felületet egy kis dF részét vizsgálva:



$d\underline{F} = (\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v)\, du\, dv$

időegység alatt áthaladó folyadékmennyiség = „ferde hasáb" térfogata



$\Vert$

alapja dF

$\downarrow$

azt tolják el $\underline{v}$ vektorral

A hasáb magassága: $\underline{v}$-nek $d\underline{F}$-re vett vetülete:

$$\langle \underline{v}, d\underline{F}\rangle = \langle \underline{v}, \underline{r}'_u \times \underline{r}'_v\rangle\, du\, dv$$

$$\Downarrow$$

Időegység alatt az F felületen áthaladó folyadék térfogata:

$$\boxed{\iint_F \underline{v}(\underline{r})\cdot d\underline{F} = \iint_A \underline{v}(\underline{r}(u,v))(\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v)\, du\, dv}$$

$\underline{v}(\underline{r})$ vektormező F felületre vett **FLUXUSA**.

462)

Példák

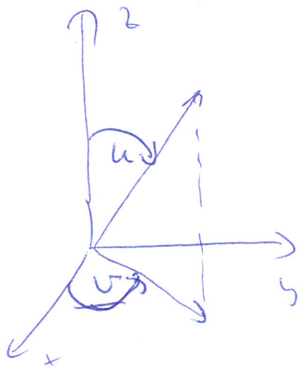
(1) $\underline{v}(\underline{r}) = y\,\underline{i} + z\,\underline{j} + x\,\underline{k}$

fluxusa (felületi integrálja) az origó középpontú, egységsugarú gömbfelület azon részén, ahol $y \geq 0, z \geq 0$, „felfele mutató" normálissal.

Megj: A felület irányítását mindig meg kell mondani, mert választhatók más paraméterezések is ($\underline{r}'_v \times \underline{r}'_u = -(\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v)$)

Gömbfelület paraméterezése:

$\underline{r}(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \cdot \sin v, \sin u)$



$y \geq 0 \leadsto 0 \leq v \leq \pi$

$z \geq 0 \leadsto 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}$

↳ $\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v = (-\cos^2 u \cos v, -\cos^2 u \sin v, -\sin u \cos u)$

$0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \leadsto \left.\begin{array}{l} 0 \leq \sin u \leq 1 \\ 0 \leq \cos u \leq 1 \end{array}\right\} \quad z = -\sin u \cos u < 0$

↳ a normális lefelé mutat $\Rightarrow (-1)$-szer kell

563/

$$\underline{v}(\underline{r}) = (y, z, x)$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{v}(\underline{r}(u,v)) = (\cos u \sin v, \sin u, \cos u \cos v)$$

$$-(\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v) = (\cos^2 u \cos v, \cos^2 u \sin v, \sin u \cos u) = \underline{dF}$$

$$\Downarrow$$

$$\langle \underline{v}(\underline{r}), d\underline{F} \rangle = - \underline{v}(\underline{r}(u,v)) \circ (\underline{r}'_u \times \underline{r}'_v) =$$

$$= \cos^3 u \cos v \sin v + \cos^2 u \sin u \sin v + \cos^2 u \sin u \cos v$$

$$\Downarrow$$

$$\iint_F \underline{v}\, d\underline{F} = \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos^3 u \cos v \sin v + \cos^2 u \sin u \sin v + \cos^2 u \sin u \cos v)\, du\, dv$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^3 u\, du \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} \cos v \sin v\, dv}_{\left[\frac{\sin^2 v}{2}\right]_0^{\pi} = 0} + \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^2 u \sin u\, du}_{\left[-\frac{\cos^3 u}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin v\, dv}_{[-\cos v]_0^{\pi} = 2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \sin u\, du \underbrace{\int_0^{\pi} \cos v\, dv}_{[\sin v]_0^{\pi} = 0}$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$