Görbék

Def. $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum

~~Az~~ $\underline{r} : I \to \mathbb{R}^n$ folytonosan diffható függvényt

$\mathbb{R}^n$-beli sima útnak vagy sima görbének hívjuk

megj. • $\underline{r} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$

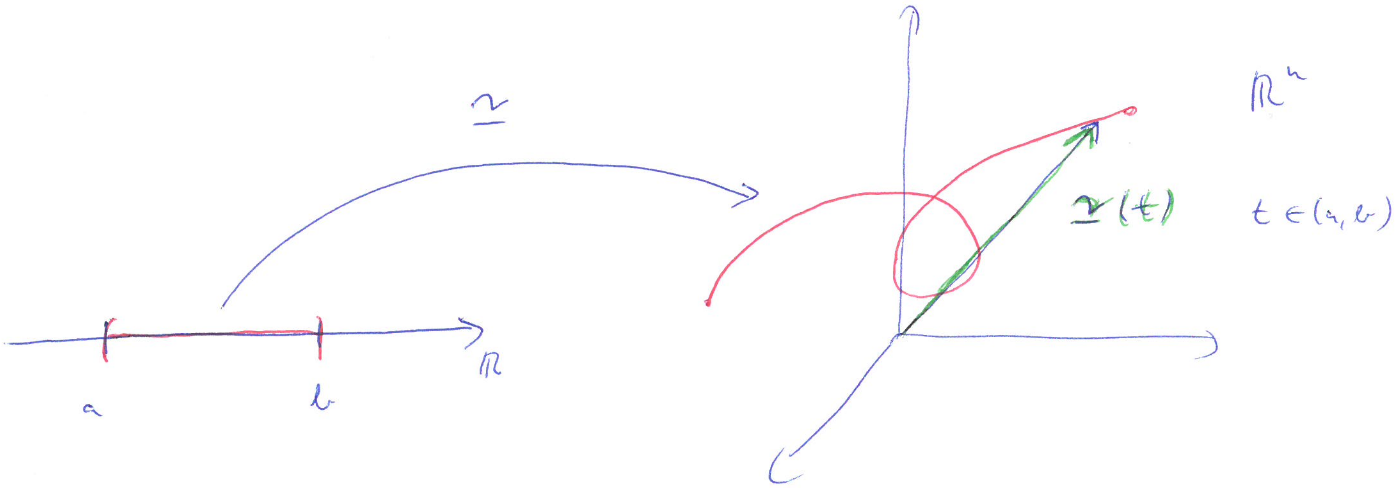
• kiterjeszthető zárt intervallumra is:

$\underline{r} \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$, ha $\underline{r} \in C^1((a,b), \mathbb{R}^n)$ és

+ a-beli derivált = jobboldali derivált

b-beli derivált = baloldali derivált

pl. $\underline{r}'(a) = \lim\limits_{t \to 0+} \dfrac{\underline{r}(a+t) - \underline{r}(a)}{t}$



375/

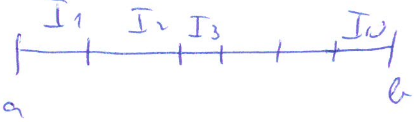
Def. $\underline{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ szakaszonként sima út $\mathbb{R}^n$-ben, ha

i) folytonos,

ii) $\exists$ I_k $k=1,\dots,N$ véges sok zárt intervallum, melyek nem egymásba nyúlóak, azaz

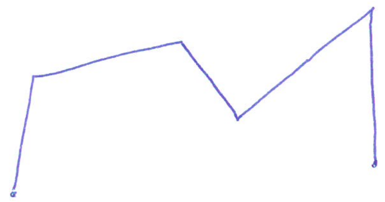
$$\text{int } I_j \cap \text{int } I_k = \emptyset \quad j \neq k$$, melyre

$$[a,b] = \bigcup_{k=1}^{N} I_k$$



és $\underline{r}\big|_{I_k}$ sima út $k=1,\dots,N$

pl.



töröttvonal = szakaszonként sima út

- $\underline{r}(a) \in \mathbb{R}^n$: kezdőpont

  $\underline{r}(b) \in \mathbb{R}^n$: végpont

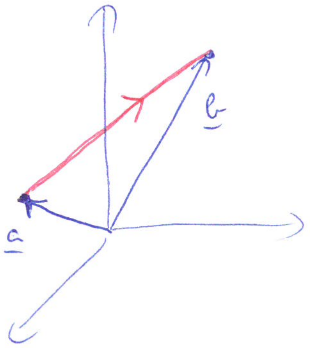
- $\underline{r}$ görbe zárt, ha $\underline{r}(a) = \underline{r}(b)$.

Példák

(1) $\underline{r}(t) := \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a})$, $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$, $t \in [0,1]$

↳ $\underline{r}$ értékkészlete: $\underline{a}$-t $\underline{b}$-vel összekötő szakasz

jel: $[\underline{a}, \underline{b}]$



(2) $m \in \mathbb{N}^+$, $\underline{a}_0, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m \in \mathbb{R}^n$

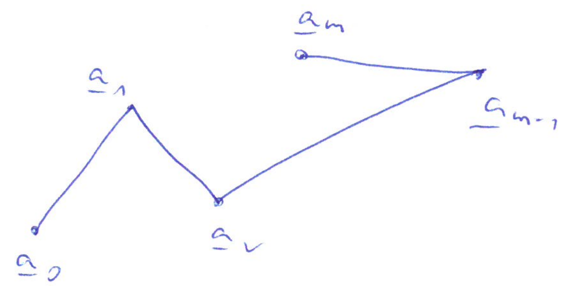
$$\underline{r} : [0, m] \to \mathbb{R}^n$$

$$\underline{r}(t) := \underline{a}_i + (t-i)(\underline{a}_{i+1} - \underline{a}_i) \qquad t \in [i, i+1]$$

$i = 0, 1, \ldots, m-1$

↳ $\underline{r}$: szakaszonként sima út

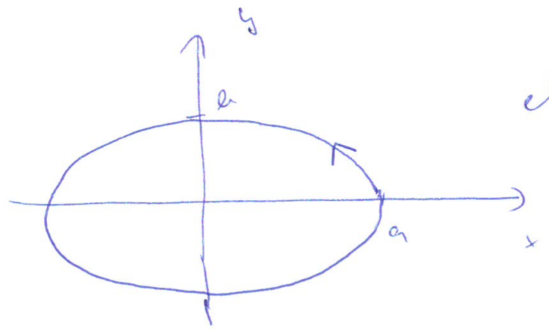
$\underline{r}$ értékkészlete: $\bigcup_{i=0}^{m-1} [\underline{a}_i, \underline{a}_{i+1}]$ töröttvonal



376)

(3) $\underline{r}(t) = (a\cos t, b\sin t) \in \mathbb{R}^2 \quad a, b > 0, \quad t \in [0, 2\pi]$

$\underline{r}$ értelmezés:



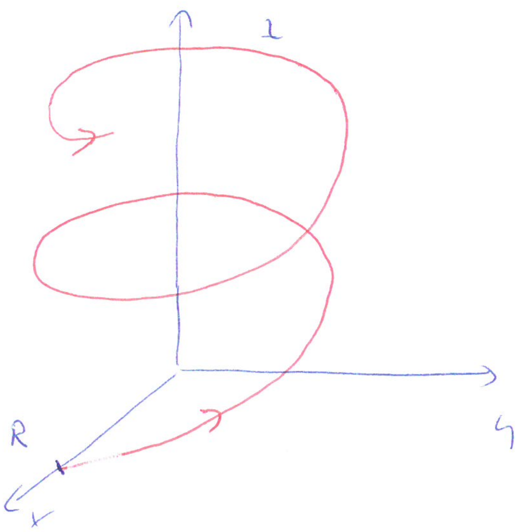
ellipszis

(4) $\underline{r}(t) := (R\cos t, R\sin t, mt) \in \mathbb{R}^3 \qquad t \in [0, s]$

$\underline{r}$ értelmezés: csavarvonal

$m > 0 \rightsquigarrow$ jobb csavar

$m < 0 \rightsquigarrow$ bal csavar



377)

Általánosabban:

$\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ $\quad$ $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum

$\mathbb{R}^n$-beli görbe

$\hookrightarrow \quad \varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in \mathbb{R}^n$

$\varphi_i : I \to \mathbb{R}$ $\quad$ koordináta függvények

A φ görbe folytonos, differenciálható, folytonosan diffható (stb.)

$\Longleftrightarrow$ φ_i —''— , —''— , —''—

$\forall\, i = 1, \ldots, n$

Def. $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ diffható $t_0 \in I$-ben

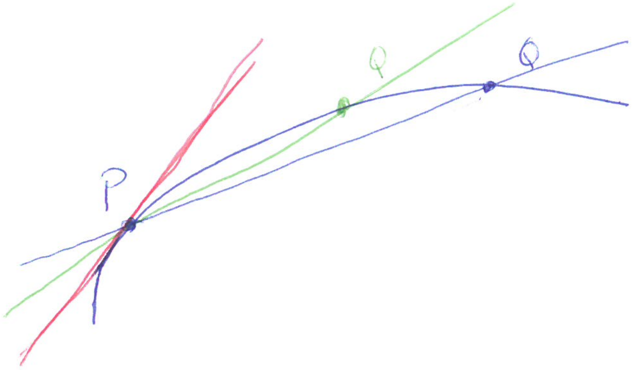
$\Rightarrow \quad \varphi'(t_0) \equiv D\varphi(t_0) = (\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0), \ldots, \varphi_n'(t_0))$

deriváltat a φ görbe t_0-beli sebességvektorának

Ha $\varphi'(t_0) \neq \underline{0}$, akkor a sebességvektort a görbe t_0-beli érintővektorának hívjuk.

378)

Megj: (1) Egy térgörbe P-pontbeli érintője a görbe P és $Q \neq P$ pontján átmenő egyenesek határhelyzete, ha $Q \to P$ (feltéve, hogy $\exists$)



belátható, hogy ha $\underline{\varphi}'(t_0) \neq \underline{0}$, akkor a görbének az $\underline{\varphi}(t_0) = P$ pontban $\exists$ érintője és ennek egy irányvektora $\underline{\varphi}'(t_0)$.

(2) $\underline{r} : I \to \mathbb{R}^n$ $\quad I \subset \mathbb{R}$ intervallum

I: paramétertér

gyakori jelölés: $\dot{\underline{r}}(t) = \dfrac{d\underline{r}}{dt} = D\underline{r}(t)$

(3) Ha $\underline{r} : I \to \mathbb{R}^3$ görbe egy részecske útja:

$t \in I$ időpontban a részecske helye $\underline{r}(t) \in \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ $\dot{\underline{r}}(t) \equiv$ a részecske t időpontbeli sebessége

$\ddot{\underline{r}}(t) = \dot{\left(\dot{\underline{r}}(t)\right)} \equiv$ a részecske t időpontbeli gyorsulása

379)

Példa: Melyek az $\underline{r}(t)=\frac{1}{4}t^4\underline{i}+\frac{1}{3}t^3\underline{j}+\frac{1}{2}t^2\underline{k}$ térgörbe azon érintői, melyek párhuzamosak az $x+3y+2z=36$ egyenletű S síkkal?

$\dot{\underline{r}}(t)=t^3\underline{i}+t^2\underline{j}+t\,\underline{k}$ érintővektor

S normálvektora: $\underline{n}=(1,3,2)$

$\dot{\underline{r}}(t)\parallel S \iff \dot{\underline{r}}(t)\perp\underline{n} \iff \langle\dot{\underline{r}}(t),\underline{n}\rangle = 1\cdot t^3+3t^2+2t=0$

$t(\underbrace{t^2+3t+2}_{(t+2)(t+1)})=0$

$\iff t=0,\ t=-1,\ t=-2$

$\downarrow$

$\dot{\underline{r}}(0)=\underline{0}$: ↯

- $\dot{\underline{r}}(-1)=(-1,1,-1)$

  $\underline{r}(-1)=\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)=P_1$

  P_1 ponton átmenő $\dot{\underline{r}}(-1)$ irányvektorú egyenes egyenlete:

$$\frac{x-\frac{1}{4}}{-1}=\frac{y+\frac{1}{3}}{1}=\frac{z-\frac{1}{2}}{-1}$$

$$\hookrightarrow\ \frac{1-4x}{4}=\frac{3y+1}{3}=\frac{1-2z}{2}$$

> $P(x_0,y_0,z_0)$ ponton átmenő $\underline{v}=(v_1,v_2,v_3)$ irányvektorú egyenes egyenlete:
>
> $$\frac{x-x_0}{v_1}=\frac{y-y_0}{v_2}=\frac{z-z_0}{v_3}$$

- $\dot{\underline{r}}(-2)=(-8,4,-2)$

  $\underline{r}(-2)=\left(4,-\frac{8}{3},2\right)$ $\implies$ $\frac{x-4}{-8}=\frac{y-\frac{8}{3}}{4}=\frac{z-2}{-2}$

380)

Emlékeztető

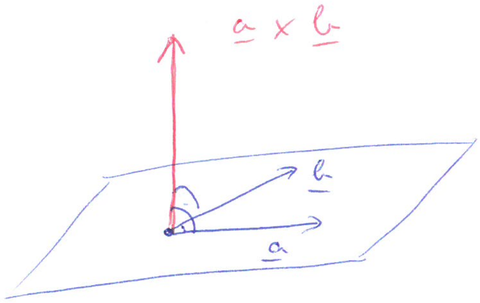
$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$

$\underline{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$

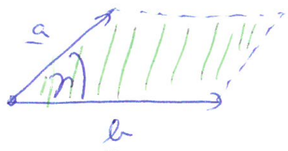
$\Rightarrow$ $\underline{a} \times \underline{b}$ vektoriális szorzat:

- merőleges $\underline{a}$-ra és $\underline{b}$-re
- $\|\underline{a} \times \underline{b}\| = \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\| \cdot \sin \varphi$

  φ: $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által bezárt szög



Megj.



$\|\underline{a} \times \underline{b}\| =$ $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által kifeszített paralelogramma területe

- $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{a} \times \underline{b}$ jobbsodrású rendszer

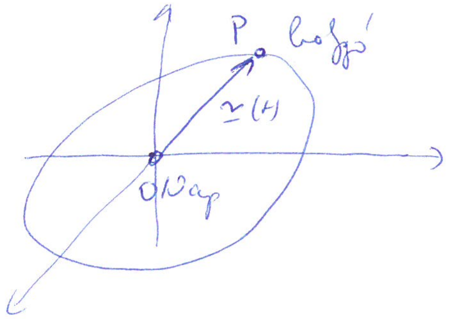
Megj.

- $\underline{b} \times \underline{a} = -(\underline{a} \times \underline{b})$
- $(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle \underline{b} - \langle \underline{b}, \underline{c} \rangle \underline{a}$
- $$\underline{a} \times \underline{b} = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} =$$

  $$= \underline{i}(a_2 b_3 - a_3 b_2) - \underline{j}(a_1 b_3 - a_3 b_1) + \underline{k}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$
- $\underline{a} \parallel \underline{b} \iff \underline{a} \times \underline{b} = \underline{0}$

3x1)

<u>Kepler 1. törvénye:</u> a bolygók ellipszis pályán mozognak, melyek egyik fókuszpontjában a Nap áll.



$\underline{r}(t) := \overrightarrow{OP}(t)$ a bolygó helyvektora, ahol az origóban a Nap áll (t időpontban)

<u>TÉTEL:</u> (Newton-törvénye):

Tfh $\underline{a}(t) = -\dfrac{\gamma M}{|\underline{r}|^3}\,\underline{r}(t)$ az M tömegű bolygó pályájának gyorsulásvektora.

Ekkor $\underline{r}(t)$ vagy ellipszis, vagy parabola, vagy hiperbola.

γ: gravitációs állandó (függ. a Nap tömegétől).

<u>Biz:</u> $\dot{\underline{r}}(t) = \underline{v}(t)$ sebességvektor

$\ddot{\underline{r}}(t) = \dot{\underline{v}}(t) = \underline{a}(t)$ gyorsulás vektor

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{r}(t)\times\underline{v}(t)\right) = \frac{d\underline{r}(t)}{dt}\times\underline{v}(t) + \underline{r}(t)\times\frac{d\underline{v}(t)}{dt} =$$

$$= \underbrace{\underline{v}(t)\times\underline{v}(t)}_{=\underline{0}} + \underbrace{\underline{r}(t)\times\underline{a}(t)}_{=\underline{0}} = \underline{0}$$

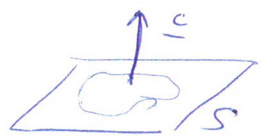
$\underline{v}(t) \parallel \underline{v}(t)$ $\qquad$ $\underline{r}(t) \parallel \underline{a}(t)$ (feltétel).

382)

$\Rightarrow \quad \underline{r}(t) \times \underline{v}(t) = \underline{c}$ konstans vektor

$$\Downarrow$$

$\underline{r}(t)$ és $\underline{v}(t)$ végig egy $\underline{c}$ normálvektorú S síkban marad $\Rightarrow$ síkmozgás



$\underline{r}(t) := r(t) \cdot \underline{e}(t) \qquad \|\underline{e}(t)\| = 1 \quad \forall t$ (egységvektor)

$$\hookrightarrow \quad \underline{v} = \frac{d(r(t)\cdot \underline{e}(t))}{dt} = \frac{dr(t)}{dt} \cdot \underline{e}(t) + r(t) \cdot \frac{d\underline{e}(t)}{dt}$$

$$\hookrightarrow \quad \underline{c} = \underline{r}(t) \times \underline{v}(t) = r(t)\underline{e}(t) \times \left(\frac{dr(t)}{dt} \underline{e}(t) + r(t) \cdot \frac{d\underline{e}(t)}{dt} \right) \underset{\text{lineáris}}{=}$$

$$= \underbrace{r(t)\underline{e}(t) \times \frac{dr(t)}{dt}\underline{e}(t)}_{=\underline{0}} + r(t)\underline{e}(t) \times r(t) \frac{d\underline{e}(t)}{dt} =$$

$$= (r(t))^2 \, \underline{e}(t) \times \frac{d\underline{e}(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{a} \times \underline{c} = \left(-\frac{\gamma M}{r(t)^2} \underline{e}(t) \right) \times \left(r(t)^2 \, \underline{e}(t) \times \frac{d\underline{e}(t)}{dt} \right) =$$

$$= -\gamma M \quad \underline{e}(t) \times \left(\underline{e}(t) \times \frac{d\underline{e}(t)}{dt} \right) =$$

$$= \gamma M \left(\underline{e}(t) \times \frac{d\underline{e}(t)}{dt} \right) \times \underline{e}(t) =$$

$$\underset{\uparrow}{=} \gamma M \Big[\underbrace{\langle \underline{e}(t), \underline{e}(t) \rangle}_{=1} \frac{d\underline{e}(t)}{dt} - \underbrace{\langle \underline{e}(t), \frac{d\underline{e}}{dt} \rangle}_{=0} \underline{e}(t) \Big] \;=$$

$$(\underline{a} \times \underline{b}) \times \underline{c} = \langle \underline{a}, \underline{c} \rangle \underline{b} - \langle \underline{b}, \underline{c} \rangle \underline{a}$$

mert $\quad \dfrac{d}{dt} \langle \underline{a}(t), \underline{b}(t) \rangle = \langle \dot{\underline{a}}(t), \underline{b}(t) \rangle + \langle \underline{a}(t), \dot{\underline{b}}(t) \rangle$

(Leibniz-szabály)

$$\hookrightarrow \underbrace{\frac{d}{dt} \langle \underline{e}(t), \underline{e}(t) \rangle}_{\|\underline{e}(t)\|^2 = 1} = \langle \dot{\underline{e}}(t), \underline{e}(t) \rangle + \langle \underline{e}(t), \dot{\underline{e}}(t) \rangle =$$

$$= 2 \langle \underline{e}(t), \dot{\underline{e}}(t) \rangle = 0$$

$$= \gamma \cdot M \frac{d\underline{e}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\gamma M \underline{e}(t) \right)$$

végül:

$$\boxed{\underline{a} \times \underline{c} = \frac{d}{dt} \left(\gamma M \underline{e}(t) \right)}$$

másrészt:

$$\underline{a} \times \underline{c} = \frac{d\underline{v}}{dt} \times \underline{c} = \frac{d}{dt} (\underline{v} \times \underline{c})$$

ha két függvény deriváltja megegyezik, akkor egy additív konstans erejéig megegyeznek

$$\boxed{\underline{v} \times \underline{c} = \gamma M \underline{e}(t) + \underline{d}}$$

$\underline{d}$ = konstans vektor

38 b)

$$\underline{v}\times\underline{c} = \gamma M\,\underline{e}(t)+\underline{d} \qquad /\times\underline{c}$$

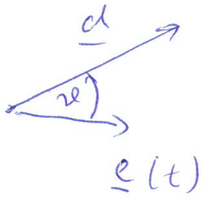
$$\underbrace{(\underline{v}\times\underline{c})\times\underline{c}}_{=\underline{0}} = (\gamma M\,\underline{e}(t)+\underline{d})\times\underline{c}$$

$\Downarrow$

$\gamma M\,\underline{e}(t)+\underline{d}$ is végig az S síkban van

$\Downarrow$

$\underline{d}$ is ~~végig~~ az S síkban van



ϑ: $\underline{d}$ és $\underline{e}$ által bezárt szög

$$\|\underline{c}\|^2 = \langle\underline{c},\underline{c}\rangle = \langle(\underline{r}\times\underline{v}),\underline{c}\rangle = \langle\underline{v}\times\underline{c},\underline{r}\rangle =$$

$\uparrow$

$(\underline{a}\times\underline{b})\circ\underline{c} = (\underline{b}\times\underline{c})\underline{a} = (\underline{c}\times\underline{a})\underline{b}$

$\uparrow$ skalárszorzat — ciklikus csere

$$= \langle\gamma M\,\underline{e}(t)+\underline{d},\underline{r}\rangle = \gamma M\underbrace{\langle\underline{e}(t),\underline{r}(t)\rangle}_{=r(t)} + \underbrace{\langle\underline{d},\underline{r}(t)\rangle}_{=r(t)\cdot\|\underline{d}\|\cdot\cos\vartheta} =$$

$$= \gamma M\, r(t) + r(t)\,\|\underline{d}\|\cos\vartheta$$

$c := \|\underline{c}\|$

$d := \|\underline{d}\|$

$$\Rightarrow \quad r(t) = \frac{c^2}{\gamma M + d\cos\vartheta} = \frac{p}{1+s\cdot\cos\vartheta}$$

$\uparrow$

$p = \dfrac{c^2}{\gamma M}$ konstansok

$s = \dfrac{d}{\gamma M}$

385)

$$x(t) = r(t)\cos\vartheta$$

$$y(t) = r(t)\sin\vartheta$$

$$\Rightarrow \quad p = r(t) + s\,r(t)\cos\vartheta = r(t) + s\,x(t)$$

$$\hookrightarrow \quad r(t) = p - s\,x(t)$$

$$[r(t)]^2 = [p - s\,x(t)]^2$$

$$x(t)^2 + y(t)^2 = p^2 - 2sp\,x(t) + s^2 x(t)^2$$

$$\Downarrow$$

$$(1-s^2)\,x(t)^2 + 2ps\,x(t) + y(t)^2 = p^2$$

Megj: kúpszeletek általános egyenlete:

$$C = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (1-s^2)x^2 + 2ps\,x + y^2 = p^2 \right\}$$

- ellipszis, ha $|s| < 1$
- parabola, ha $|s| = 1$
- hiperbola, ha $|s| > 1$

3-86)

Tfh $|s|<1$, $(1-s^2)x^2+2psx+y^2=p^2$ $\quad /:(1-s^2)$

$$x^2+\frac{2ps}{1-s^2}x+\frac{1}{1-s^2}y^2=\frac{p^2}{1-s^2}$$

teljes négyzetté alakítás:

$$\left(x+\frac{ps}{1-s^2}\right)^2+\frac{1}{1-s^2}y^2=\frac{p^2}{(1-s^2)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+\frac{ps}{1-s^2}}{\frac{p}{1-s^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\frac{p}{\sqrt{1-s^2}}}\right)^2=1$$

ellipszis, melynek centruma $\left(-\frac{ps}{1-s^2},0\right)$-ban van

$\Downarrow$

fókuszpontja az origó.

$\Downarrow$

Bizonyítottuk a Newton-törvényből Kepler-törvényét.

Szakaszonként sima utak egyesítése:

Def. $\varphi : [a, a+h] \to \mathbb{R}^n$ szakaszonként sima utak

$\psi : [b, b+k] \to \mathbb{R}^n$ $h, k > 0$

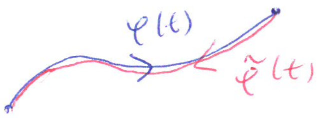
melyekre: $\varphi(a+h) = \psi(b)$

$$\Rightarrow \quad \Phi(t) := \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a, a+h] \\ \psi(t-a-h+b), & t \in [a+h, a+h+k] \end{cases}$$

φ és ψ utak egyesítése: $\Phi := \varphi \cup \psi$

megj. $\boxed{\varphi \cup \psi \neq \psi \cup \varphi}$

- $\tilde{\varphi}(t) := \varphi(2a+h-t)$ $t \in [a, a+h]$: φ-vel ellentétes irányítású út

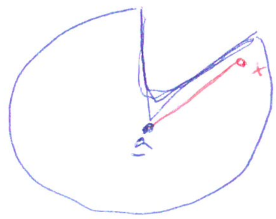


$\Rightarrow$ $\varphi \cup \tilde{\varphi}$ zárt út.

Eml: • $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, U összefüggő $\iff$ U bármely két pontja összeköthető U-ban haladó szakaszonként sima úttal.

• nyílt összefüggő halmazok = tartományok

Def: $U \subset \mathbb{R}^n$ az $\underline{a} \in U$ pontra nézve csillagtartomány, ha $\forall\ \underline{x} \in U$ esetén $[\underline{a}, \underline{x}] \subset U$.



$\Downarrow$

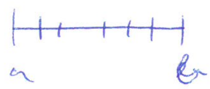
csillagtartomány mindig összefüggő.

Ívhossz

Def: $g:[a,b]\to\mathbb{R}^d$ görbe (megj. $g([a,b])$ képnek többféle paraméterezése lehetséges!)

Vegyük $[a,b]$ egy tetszőleges felosztását:

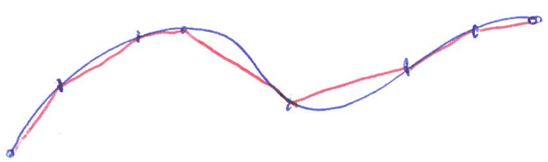
F: $a=t_0<t_1<t_2<\dots<t_n=b$



$\Downarrow$

a $g(t_0), g(t_1), \dots, g(t_n)$ pontokat összekötő töröttvonal:

g görbe F felosztáshoz tartozó húrpoligonja



$g([a,b])$

$$s(g) := \sup\left\{\sum_{i=1}^{n}\|g(t_i)-g(t_{i-1})\| : a=t_0<t_1<\dots<t_n=b\right\}$$

g rektifikálható (Jordan-) görbe, ha $s(g)<\infty$.

Ha g rektifikálható, akkor $s(g)$ a g görbe ívhossza.

390/

Megj: ① A rektifikálhatóságnak a folytonosság nem szükséges feltétele:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in [a,b) \\ 1, & \text{ha } x = b \end{cases}$$

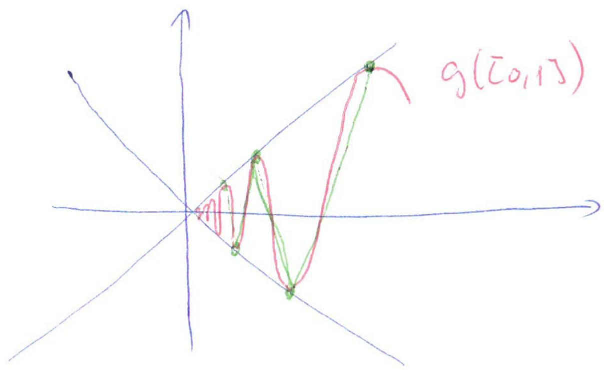
nem folytonos, de rektifikálható

② $g(t) := (t, f(t))$ $t \in [0,1]$ síkgörbe,

ahol

$$f(t) = \begin{cases} t \sin \frac{1}{t}, & \text{ha } t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

folytonos



F: $[0,1]$ felosztása:

$$x_i := \frac{2}{(2i+1)\pi} \quad i = 1, \dots, n$$

$$0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < 1$$

$$\Rightarrow f(x_i) = (-1)^i \frac{2}{(2i+1)\pi} \quad i = 1, \dots, n$$

$$\| g(x_i) - g(x_{i-1}) \| \geq | f(x_i) - f(x_{i-1}) | = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{2i-1} + \frac{1}{2i+1} \right) > \frac{2}{\pi} \frac{1}{i+1}$$

391)

$\Rightarrow$ az F felosztáshoz tartozó húrpoligon hossza:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \|g(x_i)-g(x_{i-1})\| > \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

↳ a g görbe folytonos, de nem rektifikálható!

TÉTEL (elégséges feltételek görbe rektifikálhatóságára)

i) ha egy görbe Lipschitz $\Rightarrow$ rektifikálható

ii) ha g görbe diffható és a koordinátafüggvények deriváltjai korlátosak $[a,b]$-n $\Rightarrow$ rektifikálható

iii) ha g görbe sima $\rightarrow$ rektifikálható

!

TÉTEL: Tfh $g:[a,b]\to\mathbb{R}^d$ diffható és a g koordinátafüggvényeinek deriváltjai integrálhatóak $[a,b]$-n. Ekkor g rektifikálható és

$$s(g) = \int_a^b \sqrt{(g_1'(t))^2+(g_2'(t))^2+\ldots+(g_d'(t))^2}\,dt .$$

Spec ha g sima görbe, akkor rektifikálható és az ívhossza:

$$\boxed{s(g) = \int_a^b \|\dot g(t)\|\,dt}$$

392/

Pl1 $g(t)=(R\cos t, R\sin t, mt)$ $t\in[0,2\pi]$ $m>0$

csavarvonal

$\hookrightarrow$ $\dot g(t)=(-R\sin t, R\cos t, m)$

$$\|\dot g(t)\| = \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t + m^2} = \sqrt{R^2+m^2}$$

$$s(g) = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2+m^2}\, dt = \underline{\underline{\sqrt{R^2+m^2}\cdot 2\pi}}$$

<u>ívhossz szerinti paraméterezés</u> (természetes paraméterezés)

- Rögzítjük a görbe kezdőpontját: O
- a görbe $\forall$ P pontjához az $\overset{\frown}{OP}$ ívhosszat rendeljük hozzá

eredeti paraméterezés: $g=g(t)$ $t\in[\alpha,\beta]$

ívhossz szerinti paraméterezés:

$$g=g(s)=g(s(t))$$

$$s(t)=\int_\alpha^t \|\dot g(t)\|\, dt$$

<u>TÉTEL</u>: $\boxed{\|g'(s)\|=1}$

393/

Biz.

$$s(g(t)) = \int_{\alpha}^{t} \|\dot{g}(t)\|\, dt$$

↳ $s(t)$ folytonosan diff.ható és $\frac{ds}{dt} = \|\dot{g}(t)\|$

$$g' = \frac{dg}{ds} = \frac{dg}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{g}(t)}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\dot{g}(t)}{\|\dot{g}(t)\|}$$

↳ $\|g'\| = \frac{\|\dot{g}(t)\|}{\|\dot{g}(t)\|} = 1$ $\circ$!

Vonalintegrál

Def. $U \subset \mathbb{R}^n$ tartomány

$\varphi : [a, b] \to U$ reguláris sima út

$f : U \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény (vektor-vektor fv)

$$\boxed{\int_a^b \langle f \circ \varphi, \varphi' \rangle \equiv \int_\varphi f}$$

f függvény φ útra vonatkozó vonalintegrálja

$$\int_\varphi f \equiv \int_a^b \langle f(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t) \rangle\, dt$$

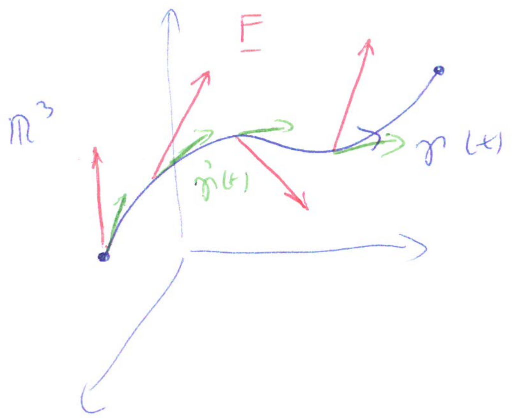
394/

Megj $\underline{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ erőtér

$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ görbe

$$\int_\gamma \underline{F} = \int_a^b \langle \underline{F}(\gamma(t)), \dot\gamma(t) \rangle \, dt$$

az $\underline{F}$ erő munkája a γ úton



Pél $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$\hookrightarrow \dot\gamma(t) = (-\sin t, \cos t)$

~~$F : (x,y) \mapsto (-y, x)$~~

$F(x,y) = (-y, x) \rightsquigarrow F(\gamma(t)) = (-\sin t, \cos t)$

$$\int_\gamma F = \int_0^{2\pi} \underbrace{\langle (-\sin t, \cos t), (-\sin t, \cos t) \rangle}_{\sin^2 t + \cos^2 t = 1} \, dt = \underline{\underline{2\pi}}$$

355/

TÉTEL: $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ tartomány, $\varphi : [a, a+h] \to \mathcal{U}$ $h>0$

$\psi : [b, b+k] \to \mathcal{U}$ $k>0$

$\varphi(a+h) = \psi(b)$

szakaszonként sima utak

- $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$
- $G : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$

folytonos vektor-vektor függvények

- $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ a) $\displaystyle\int_\varphi (\lambda_1 F + \lambda_2 G) = \lambda_1 \int_\varphi F + \lambda_2 \int_\varphi G$

b) $\displaystyle\int_\varphi F = -\int_{\tilde{\varphi}} f$ $\tilde{\varphi}$: φ ellentétes irányítással

c) $\displaystyle\int_{\varphi \cup \psi} F = \int_\varphi F + \int_\psi F$

d) $\displaystyle\left| \int_\varphi F \right| \le \max \{ \| F(x) \| : x \in \underbrace{\varphi([a, a+h])}_{= R_\varphi} \} \cdot \underbrace{s(\varphi)}_{\varphi \text{ ívhossza.}}$

Biz. def alapján nyilvánvaló.

396/

<u>Def:</u> $g:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ nemnorsolható sima görbe

$g=(g_1,g_2,\dots,g_n)$

$h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ n-változós fv, melyre

$g([a,b])\subset D_h$

$$\Rightarrow \int_g h\,dx_j = \int_a^b h(g(t))\cdot \dot g_j(t)\,dt$$ x_j-menti vonalintegrál

<u>Pél</u> $g(t)=(R\cos t, R\sin t)\quad t\in[0,2\pi]$

$$\int_g x^2 y\,dx = ?$$

$$\dot g(t)=(-R\sin t, R\cos t)$$

$$\int_g x^2 y\,dx = \int_0^{2\pi} R^2\cos^2 t\cdot R\sin t\cdot(-R\sin t)\,dt = -R^4\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\,dt =$$

$$= -\frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt = -\frac{R^4}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4t)\,dt = -\frac{R^4\pi}{4}$$

Def. $U \subset \mathbb{R}^n$ tartomány

$f: U \to \mathbb{R}^n$

Azt mondjuk, hogy $F: U \to \mathbb{R}$ függvény az f függvény primitív függvénye (potenciálfüggvénye), ha F diffható és $F' = f$.

megj. (1) $F'(\underline{x}) = \operatorname{grad} F(\underline{x}) = \langle \operatorname{grad} F, \underline{x} \rangle$

vagyis $\boxed{f(\underline{x}) = \operatorname{grad} F(\underline{x})}$

(2) F f primitív függvénye $\Rightarrow$ $F + c$ is primitív fv.

TÉTEL Ha F_1 és F_2 is f primitív függvénye $\Rightarrow$ $F_1 - F_2$ konstans.

Biz.

$F := F_1 - F_2 \rightsquigarrow F' = F_1' - F_2' = f - f = 0$

$\underline{a} \in U$ fix, $\underline{x} \in U$ tetsz.

$\Rightarrow \exists\ \varphi: [\alpha, \beta] \to U$ szakaszonként sima út, melyre

$\varphi(\alpha) = \underline{a}$, $\varphi(\beta) = \underline{x}$

$(F \circ \varphi)'(t) = \langle F'(\varphi(t)), \dot{\varphi}(t) \rangle = 0 \rightsquigarrow F \circ \varphi$ állandó!

$\hookrightarrow F(\underline{a}) = F(\varphi(t)) = F(\varphi(\beta)) = F(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in U$ $\circ$!

358/

TÉTEL (Newton–Leibniz tétel vonalintegrálokra)

$f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ folytonos, $F: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ f primitív függvénye

$\varphi: [\alpha, \beta] \to \mathcal{U}$ $\mathcal{U}$-ban haladó szakaszonként sima út.

Ekkor

$$\int_\varphi f = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

Biz. $\exists$ $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_m = \beta$

$F \circ \varphi$ $\forall$ $[t_{i-1}, t_i]$ intervallumban diffható és

$$(F \circ \varphi)'(t) = \langle F'(\varphi(t)), \varphi'(t) \rangle = \langle (f \circ \varphi)(t), \varphi'(t) \rangle$$

$t \in [t_{i-1}, t_i]$

$i = 1, \dots, m$

$$\int_\varphi f = \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} \langle (f \circ \varphi)(t), \varphi'(t) \rangle \, dt =$$

$$= \sum_{i=1}^m \left(F(\varphi(t_i)) - F(\varphi(t_{i-1})) \right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{teleszkóp} \\ \text{összeg}}}{=} F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))$$

$\circ$!

Köv Ha φ zárt, szakaszonként sima görbe és f-nek $\exists$ primitív függvénye, akkor

$$\int_\varphi f = 0$$

395)

A megfordítás is igaz:

Tfh $f: \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{U}} \to \mathbb{R}^n$ folytonos és $\forall\ \gamma(t) \subset U \quad t \in [\alpha, \beta]$

zárt görbére vett vonalintegrál 0:

$$\int_\gamma f = 0$$

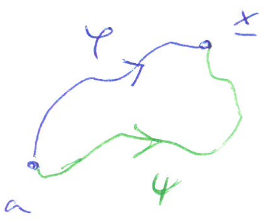
! $\underline{a} \in U$ fix, $\underline{x} \in U$, $\varphi : [\alpha, \beta] \to U$ $\underline{a}$-t $\underline{x}$-nel összekötő szakaszonként sima út:

$\varphi(\alpha) = \underline{a}$, $\varphi(\beta) = \underline{x}$

$\Rightarrow$ $\forall\ \psi \subset U$ $\underline{a}$-t $\underline{x}$-nel összekötő sima útra:

$$\int_\varphi f = \int_\psi f$$

ugyanis $0 = \int\limits_{\underset{\text{zárt görbe}}{\varphi \cup \tilde{\psi}}} f = \int_\varphi f - \int_\psi f$



$\Rightarrow$ $\int_\varphi f$ csak $\underline{x}$-től függ.

$\parallel$

$\Phi(x) := \int_a^x f \quad x \in U$ integrálfüggvény

400)

<u>TÉTEL:</u> $U \subset \mathbb{R}^n$ tartomány

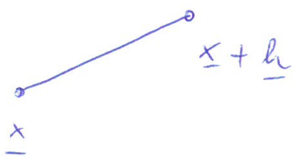
$f: U \to \mathbb{R}^n$ folytonos

Tfh f-nek $\forall$ U-ban haladó, szakaszonként sima, zárt útra vett vonalintegrálja 0. Ekkor Φ integrálfüggvény f-nek primitív függvénye ($\underline{a}$-ban eltűnő).

<u>Biz:</u> $\underline{x} \in U$, $\exists\, r>0 : B(\underline{x}, r) \subset U$

! φ $\underline{a}$-t $\underline{x}$-szel összekötő szakaszonként sima út U-ban

$\underline{h} \in \mathbb{R}^n : 0 < \|\underline{h}\| < r$



$\psi(t) := \underline{x} + t\underline{h} \qquad t \in [0,1]$

$$\Phi(\underline{x}+\underline{h}) = \int_{\underline{a}}^{\underline{x}+\underline{h}} f = \int_\varphi f + \int_\psi f = \int_{\underline{a}}^{\underline{x}} f + \int_\psi f = \Phi(\underline{x}) + \int_\psi f$$

$$\Rightarrow \Phi(\underline{x}+\underline{h}) - \Phi(\underline{x}) = \int_0^1 \langle f(\underline{x}+t\underline{h}), \underline{h} \rangle \, dt$$

f folytonos $\Rightarrow$ $\varepsilon(\underline{h}) := \sup\{\|f(\underline{x}+t\underline{h}) - f(\underline{x})\| : t \in [0,1]\}$

$\Rightarrow$ $\varepsilon(\underline{h}) \to 0$, ha $\underline{h} \to \underline{0}$

40 1)

és
$$\left|\underline{\Phi}(\underline{x}+\underline{h})-\underline{\Phi}(\underline{x})-\langle f(\underline{x}),\underline{h}\rangle\right| = \left|\int_0^1 \langle f(\underline{x}+t\underline{h})-f(\underline{x}),\underline{h}\rangle dt\right|$$
$$\leq \varepsilon(\underline{h})\cdot\|\underline{h}\|$$

$$\Downarrow$$

$\underline{\Phi}$ diff.ható és $\underline{\Phi}' = f$

∘!

Emlék: Intervallumon értelmezett folytonos függvénynek ∃ primitív fv-e (integrálfv)

Többváltozós esetben további feltételek szükségesek:

! $f: \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\cap}{U}} \to \mathbb{R}^n$ diff.ható

Ha f-nek ∃ primitív függvénye $(F' = f) \Rightarrow F$ kétszer diff.ható

↳ $F: U \to \mathbb{R}$ primitív fv kétszer diff.ható

$\Downarrow$ Young–Schwarz tétel

$$\partial_i f_j = \partial_i \partial_j F = \partial_j \partial_i F = \partial_j f_i \qquad 1 \leq i,j \leq n$$

$f = (f_1, \ldots, f_n)$

$$\Downarrow$$

$(\partial_j f_i)_{i,j=1}^{n}$ deriváltmátrix (Jacobi) szimmetrikus

402)

Köv. ha $f: U \to \mathbb{R}^n$ deriválható fv-nek $\exists$ primitív függvénye, akkor a deriváltmátrixa szimmetrikus
($U \subset \mathbb{R}^n$ tartomány)

További feltételek mellett a feltétel elégséges:

TÉTEL $U \subset \mathbb{R}^n$ valamely $\underline{a} \in U$-ra nézve csillagtartomány

$f: U \to \mathbb{R}^n$ folytonosan diffható

Ha f deriváltmátrixa szimmetrikus, azaz $\partial_i f_j = \partial_j f_i$ $\forall i,j = 1 \ldots n$

akkor f-nek $\exists$ primitív függvénye.

Pl: $\underset{\in U}{\underline{x}} \mapsto \int_{\underline{a}}^{\underline{x}} f$ egy $\underline{a}$-ban eltűnő primitív fv.

Eml: (paraméteres integrál)

$U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$

$f: U \times I \to \mathbb{R}$ folytonos

$\Rightarrow$ $\forall$ $\underline{x} \in U$ fix esetén $\underset{\in I}{t} \mapsto f(\underline{x}, t) \in \mathbb{R}$ egyváltozós fv folytonos

integrálható

403/

$$\underline{x} \mapsto \varphi(\underline{x}) := \int_a^b f(\underline{x}, t)\, dt \qquad f \text{ paraméteres integrálja}$$
$$\underline{x} \in U$$

<u>TÉTEL</u> (cont): Ha $U \times I$-n léteznek a $\partial_i f$ $i = 1, 2, \dots, n$ parciális deriváltak és folytonosak $\Rightarrow$ φ folytonosan deriválható U-n és

$$\partial_i \varphi(\underline{x}) = \int_a^b \partial_i f(\underline{x}, t)\, dt \qquad i = 1, \dots, n$$
$$\underline{x} \in U$$

(„be lehet deriválni az integráljel mögé") !

<u>Biz</u> (primitív fv létezésének elégséges feltétele)

$$\underline{x} \mapsto F(\underline{x}) := \int_{\underline{a}}^{\underline{x}} f = \int_0^1 \langle f(\underline{a} + t(\underline{x} - \underline{a})), \underline{x} - \underline{a} \rangle\, dt$$
$$\underline{x} \in U$$

$\int_{\underline{a}}^{\underline{x}}$ ⇑ $[\underline{a}, \underline{x}]$ mentén integrálunk ⤳ ezért kellett csillagszerű tartomány

$\| \quad \underline{a} + t(\underline{x} - \underline{a}) \quad t \in [0, 1]$

$\partial_i f_j$ folytonos $i, j = 1, \dots, n$ $\Rightarrow$ paraméteres integrálokra vonatkozó előző tétel alkalmazható

$$(\partial_i F)(\underline{x}) = \int_0^1 \partial_i \langle f(\underline{a} + t(\underline{x} - \underline{a})), \underline{x} - \underline{a} \rangle\, dt \quad =$$

404)

$$\overset{\circ}{=} \int_0^1 \partial_i \left(\sum_{j=1}^n f_j(\underline{a}+t(\underline{x}-\underline{a}))\cdot(x_j-a_j)\right) dt =$$

$$= \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^n t\, \partial_i f_j(\underbrace{\underline{a}+t(\underline{x}-\underline{a})}_{(a_1+t(x_1-a_1),\dots,a_n+t(x_n-a_n))})(x_j-a_j) + f_i(\underline{a}+t(\underline{x}-\underline{a}))\right] dt$$

$\partial_i f_j = \partial_j f_i$

$\downarrow$

$$\overset{\circ}{=} \int_0^1 \left[\underbrace{\sum_{j=1}^n t\, \partial_j f_i(\underline{a}+t(\underline{x}-\underline{a}))(x_j-a_j)}_{t\cdot \frac{d}{dt} f_i(\underline{a}+t(\underline{x}-\underline{a}))} + f_i(\underline{a}+t(\underline{x}-\underline{a}))\right] dt$$

$$= \int_0^1 \left(t\, \frac{d}{dt} f_i(\underline{a}+t(\underline{x}-\underline{a})) + f_i(\underline{a}+t(\underline{x}-\underline{a}))\right) dt$$

$$\underset{\uparrow}{=} \Big[t\, f_i(\underline{a}+t(\underline{x}-\underline{a}))\Big]_{t=0}^1 - \int_0^1 f_i(\underline{a}+t(\underline{x}-\underline{a}))\, dt + \int_0^1 f_i(\underline{a}+t(\underline{x}-\underline{a}))\, dt$$

parc. int.

$u = t \quad \rightsquigarrow \quad u' = 1$

$v' = \frac{d}{dt} f_i(\underline{a}+t(\underline{x}-\underline{a})) \rightsquigarrow v = f_i(\underline{a}+t(\underline{x}-\underline{a}))$

$$= f_i(\underline{x})$$

4.0.5)

Vagyis $(\partial_i F)(\underline{x}) = f_i(\underline{x}) \qquad \forall\, i = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow \quad F' = f$$

$$\|$$

$$(\partial_1 F, \partial_2 F, \dots, \partial_n F) = \operatorname{grad} F.$$

Megj.:

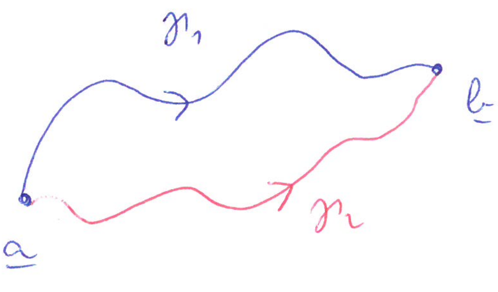
① <u>TERMINOLÓGIA</u>

$U \subset \mathbb{R}^3$ tartomány, $f : U \to \mathbb{R}^3$ <u>erőtér</u>

f primitív függvényei $\equiv$ f <u>potenciálfüggvényei</u>

Ha f-nek $\exists$ potenciálfüggvénye, akkor az erőtér <u>potenciálos</u> vagy <u>konzervatív</u>.

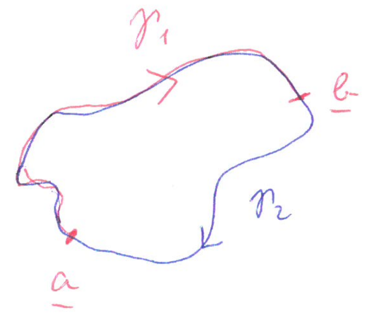
Az ilyen erőtérben végzett munka csak a végpontoktól függ



$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f = F(\underline{b}) - F(\underline{a}) \qquad \text{(Newton–Leibniz)}$$

406)

f konzervatív $\iff$ $\forall$ zárt görbe menti integrál 0



$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

f konzervatív $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_{\gamma_1} f = \int_{\tilde{\gamma}_2} f = -\int_{\gamma_2} f$

$\tilde{\gamma}_2$: megfordítottja

$\hookrightarrow$ $\displaystyle\int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f = 0$

(2) $f : U \to \mathbb{R}^3$ differenciálható

$U \subset \mathbb{R}^3$ nyílt

deriváltmátrix

$$f' = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \partial_3 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \partial_3 f_2 \\ \partial_1 f_3 & \partial_2 f_3 & \partial_3 f_3 \end{pmatrix}$$ szimmetrikus

$\Updownarrow$

$\partial_i f_j = \partial_j f_i \quad i,j = 1,\dots,3$

$\iff$ $\operatorname{rot} f : U \to \mathbb{R}^3$

$\operatorname{rot} f = (\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1)$ f rotációja

$\operatorname{rot} f = \underline{0}$

407)

Emel:

TÉTEL $U \subset \mathbb{R}^3$ csillagtartomány

$f: U \to \mathbb{R}^3$ folytonosan diffható

Ekkor f-nek $\exists$ potenciálja $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rot} f = \underline{0}$.

Kitérő: Tenzorok invariánsai

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezés $\left(T(\alpha \underline{x}) = \alpha T(\underline{x}) \quad \alpha \in \mathbb{R} \right.$

$\equiv$ $\quad T(\underline{x}+\underline{y}) = T(\underline{x}) + T(\underline{y})$

tenzor $\quad \left. \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^3 \right)$

Ha $\mathbb{R}^3$-ben rögzítünk egy bázist, akkor T egy $\underline{\underline{T}}$ mátrixszal reprezentálható és $T(\underline{x}) = \underline{\underline{T}}\,\underline{x} \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^3$.

T mátrixa függ a bázisválasztástól

$\Downarrow$

T invariánsai = azon tenzorra jellemző adatok, melyek a bázis választásától függetlenek.

Def.: T tenzor szimmetrikus $\Longleftrightarrow$ $\underline{\underline{T}}$ szimmetrikus, azaz $\underline{\underline{T}}^T = \underline{\underline{T}}$

- T tenzor antiszimmetrikus $\Longleftrightarrow$ $\underline{\underline{T}}$ antiszimmetrikus, azaz $\underline{\underline{T}}^T = -\underline{\underline{T}}$

Áll. $\forall\ \underline{\underline{A}} \in M_n(\mathbb{R})$ mátrixra

$$\underline{\underline{A}} = \underbrace{\frac{\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T}{2}}_{\underline{\underline{S}} \text{ szimmetrikus}} + \underbrace{\frac{\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}}^T}{2}}_{\underline{\underline{T}} \text{ antiszimmetrikus}} = \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{T}}$$

Főtengelytétel: Ha $\underline{\underline{S}}$ szimmetrikus, akkor a sajátértékei valósak és a sajátvektorok ortogonálisak.

$$\underline{\underline{S}}\,\underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i \qquad i = 1, 2, 3$$

$$\lambda_i \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = 0, \text{ ha } i \neq j$$

Könnyű megjegyezni, hogy a sajátértékek mindig invariánsak (bázisfüggetlenek), de a sajátvektorok nem!

409)

<u>Pél:</u> Az S szimmetrikus tenzor $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sajátértékeiből álló tett

1) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

2) $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$

3) $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$

mennyiségeket az S szimmetrikus tenzor első-, második- ill. harmadik <u>skalárinvariánsának</u> nevezik.

<u>Megj:</u> ① $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{Tr}\, \underline{\underline{S}}$ erre mondják általában hogy skalárinvariáns

② Miért pont ezek?
Főtengelytétel $\rightsquigarrow$ $\underline{\underline{S}}$ főtengelyre transzformálható, azaz a sajátbázisban:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Karakterisztikus polinom:

$$\det(\underline{\underline{S}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \det \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & & 0 \\ & \lambda_2 - \lambda & \\ 0 & & \lambda_3 - \lambda \end{pmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) =$$

$$\cancel{= -\lambda^3 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 +}$$

$$= -\lambda^3 + \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}_{1.}\lambda^2 - \underbrace{(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)}_{2.}\lambda + \underbrace{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_{3.}$$

410/

beláthatló, hogy $\forall$ bázisban számolva a karakterisztikus polinomot, az együtthatók ugyanazok!

Def: Egy T tenzor skalárinvariánsa = a szimmetrikus részének az első skalárinvariánsa.

Ha $\underline{\underline{T}}$ antiszimmetrikus $\leadsto$
$$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} \\ -t_{12} & 0 & t_{23} \\ -t_{13} & -t_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \leadsto \underline{\underline{T}}\,\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} \\ -t_{12} & 0 & t_{23} \\ -t_{13} & -t_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{12} x_2 + t_{13} x_3 \\ -t_{12} x_1 + t_{23} x_3 \\ -t_{13} x_1 - t_{23} x_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \leadsto \underline{v} \times \underline{x} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \underline{i}(v_2 x_3 - v_3 x_2) - \underline{j}(v_1 x_3 - v_3 x_1) + \underline{k}(v_1 x_2 - v_2 x_1)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T}}\,\underline{x} = \underline{v} \times \underline{x}$$, ahol $$\underline{v} = \begin{pmatrix} -t_{23} \\ t_{13} \\ -t_{12} \end{pmatrix}$$

4.11)

$\Rightarrow$ **Áll** $\forall$ T antiszimmetrikus tenzorhoz $\exists!$ $\underline{v} \in \mathbb{R}^3$, mellyel $\underline{\underline{T}}\,\underline{x} = \underline{v} \times \underline{x}$ $\quad \forall\, \underline{x} \in \mathbb{R}^3$.

Belátható, hogy $\underline{v}$ invariáns $=$ <u>vektorinvariáns</u>

<u>Def.</u> Egy T tenzor vektorinvariánsa, az antiszimmetrikus részének vektorinvariánsa.

Alkalmazzuk a fentieket egy $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény deriváltmátrixára:

$$Df \equiv f' = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \partial_3 f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \partial_3 f_2 \\ \partial_1 f_3 & \partial_2 f_3 & \partial_3 f_3 \end{pmatrix}$$

$f = (f_1, f_2, f_3)$

- Df skalárinvariánsa $\equiv$ f <u>divergenciája</u>

$$\boxed{\operatorname{div} f = \operatorname{Tr} Df = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}}$$

- Df vektorinvariánsa?

$$(Df)^T = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_1 f_2 & \partial_1 f_3 \\ \partial_2 f_1 & \partial_2 f_2 & \partial_2 f_3 \\ \partial_3 f_1 & \partial_3 f_2 & \partial_3 f_3 \end{pmatrix}$$

↳ antiszimmetrikus rész:

$$\frac{1}{2}\left(Df - (Df)^T\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \partial_2 f_1 - \partial_1 f_2 & \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3 \\ \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1 & 0 & \partial_3 f_2 - \partial_2 f_3 \\ \partial_1 f_3 - \partial_3 f_1 & \partial_2 f_3 - \partial_3 f_2 & 0 \end{pmatrix}$$

ettől eltekintünk (ha egy vektor vektorinvariáns, akkor a kétszerese is)

$\Rightarrow$ vektorinvariáns kiolvasható:

$$(\partial_2 f_3 - \partial_3 f_2, \partial_3 f_1 - \partial_1 f_3, \partial_1 f_2 - \partial_2 f_1) = \operatorname{rot} f \;!$$

$\Rightarrow$ ~~A def~~: Az $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ leképezés deriváltmátrixának vektorinvariánsa $\operatorname{rot} f$.

Milyen vektorral vett vektoriális szorzatként adható meg a hatása?