MINTA VIZSGADOLGOZAT - Elméleti rész

KALKULUS 2 — 2021. május 20.
BSc Matematika — Munkaidő: 60 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

Név:

Neptun kód: | | | | | | | **Kurzuskód:** | |

Minden helyesen megválaszolt kérdés rövid indoklással 2 pontot, indoklás nélkül 1 pontot ér.

1. Bármely $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz lezártja, egyenlő a halmaz belsejének lezártjával.
2. Ha $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, és $H \subset \mathbb{R}^n$ zárt, akkor $G \setminus H$ nyílt.
3. Az $A = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ halmaz zárt.
4. Ha az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény parciális deriváltjai léteznek $a \in \mathbb{R}^n$ egy környezetében és folytonosak a-ban, akkor f differenciálható a-ban.
5. Ha az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény parciális deriváltjai léteznek $a \in \mathbb{R}^n$-ban, akkor f folytonos a-ban.
6. Ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható $a \in \mathbb{R}^n$-ben, akkor az $f''(a)$ Hesse-mátrix szimmetrikus.
7. Az $S = (\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \times (\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \subset \mathbb{R}^2$ halmaz Jordan-mérhető.
8. Az
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
mátrix pozitív definit.
9. Ha $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ mindenütt, akkor $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező bármely zárt görbére vett vonalintegrálja 0.
10. Ha $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ mindenütt, akkor $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező bármely felület mentén vett felületi integrálja 0.

11. Ha $P(x,y)$ és $Q(x,y)$ folytonosan differenciálhatóak, és fennáll az $P'_y = Q'_x$ egyenlőség a $\mathcal{D}$ értelmezési tartományon, akkor az $\int_{\mathcal{G}} P \,\mathrm{d}\,x + Q \,\mathrm{d}\,y$ vonalintegrál 0, minden $\mathcal{D}$-ben futó sima zárt $\mathcal{G}$ görbére.

12. Nem folytonos függvényekből álló függvénysorozat egyenletesen nem tarthat folytonos függvényhez.

13. Ha egy $[a,b]$-n egyenletesen konvergens függvénysor tagjai deriválhatóak $[a,b]$-n, akkor a függvénysor tagonként deriválható.

14. Nem létezik olyan hatványsor, melynek összege nem folytonos ott, ahol a sor konvergens.

15. Az $f(x) = \sin^2 x$ függvény Fourier-sora $\Phi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$.

16. Minden folytonos függvény felveszi a szélsőértékeit egy kompakt halmazon.

17. Ha $\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r})$, akkor $\mathbf{w}$ bármely, egyszeren összefüggő tartományt határoló, zárt felület mentén vett fluxusa zérus.

18. Az $\sum_n f_n$ függvénysor egyenletesen konvergens $I \subset \mathbb{R}$-en, ha $|f_n(x)| \le a_n$, majdnem minden n-re, ha $x \in I$ és $\lim_n a_n = 0$.

19. Ha $f_n \rightrightarrows f$ $I \subset \mathbb{R}$-en és $f_n, f \in C^1(I)$, akkor $f'_n \rightrightarrows f'$ szintén I-n.

20. Kétszer deriválható periodikus függvény Fourier-sora egyenletesen konvergál a függvényhez.