Def. $A \subset \mathbb{R}^n$ zárt, ha $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ nyílt.

Példák

- $\mathbb{R}^n, \emptyset$ zárt halmazok (és nyílt halmazok)
- $\overline{B(\underline{a}, r)} := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\|\underline{x} - \underline{a}\|}_{d(\underline{x},\underline{a})} \leq r \}$ zárt halmaz

  $\underline{a}$ középpontú r sugarú zárt gömb
- Minden véges halmaz zárt.

Pl: $A := \{\underline{x}, \underline{y}\}$, $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \neq \underline{y}$

$\leadsto d(\underline{x}, \underline{y}) > 0$,

$\forall\, \underline{z} \in A^c \leadsto \underline{z} \neq \underline{x},\ \underline{z} \neq \underline{y} \Rightarrow d(\underline{z}, \underline{x}) > 0$, $d(\underline{z}, \underline{y}) > 0$

$\varepsilon := \min \{ d(\underline{z}, \underline{x}), d(\underline{z}, \underline{y}) \}$

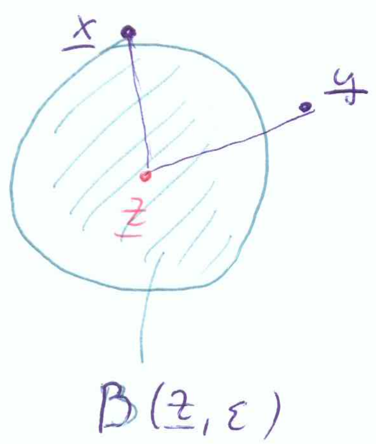
$\Rightarrow B(\underline{z}, \varepsilon) \subset A^c \Rightarrow \underline{z}$ belső pont

$\Downarrow$

$\underline{z}$ tetszőleges volt

$\Downarrow$

A^c nyílt $\Rightarrow A$ zárt



működik akárhány véges pontra

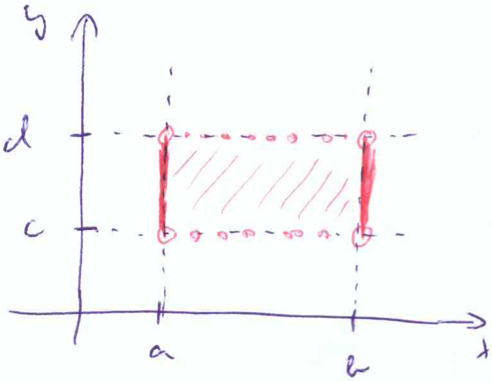
24)

Megj: (1) „nyílt" és „zárt" nem egymást kizáró fogalmak!

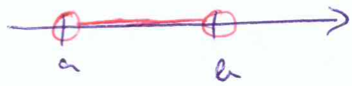
Pl: $\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ egyszerre zárt és nyílt

(2.) nem minden halmaz zárt vagy nyílt

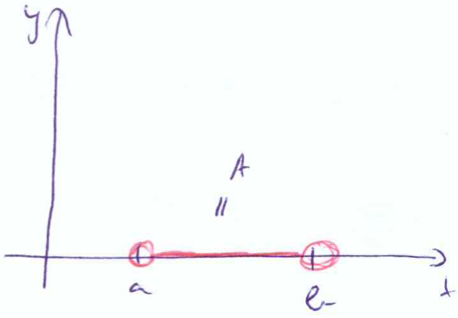
Pl: $[a,b]\times(c,d)\subset\mathbb{R}^2$ nem zárt és nem nyílt



(3) • $(a,b)\subset\mathbb{R}$ nyílt



• $\underset{A}{\underset{\shortparallel}{(a,b)}}\subset\mathbb{R}^2$ nem nyílt és nem zárt:



$\partial A=[a,b]\subset\mathbb{R}^2$

A de Morgan-azonosság azonnali következménye:

<u>TÉTEL</u> $\Gamma \neq \emptyset$ indexhalmaz, $A_\gamma \subset \mathbb{R}^n$ $(\gamma \in \Gamma)$ halmazok zártak, akkor

1) $\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ zárt (zárt halmazok tetszőleges metszete zárt)

2) Ha Γ véges, akkor $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ zárt

(véges sok zárt halmaz uniója zárt)

Sorozatok $\mathbb{R}^n$-ben

Kicsit általánosabban:

<u>Def.</u> (X, d) metrikus tér, $(\underline{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ sorozat <u>konvergens</u> és a <u>határértéke</u> $\underline{a} \in X$, ha

$$d(\underline{x}_n, \underline{a}) \to 0 \quad , \text{ha } n \to \infty$$

<u>Jel.</u> $\underline{x}_n \xrightarrow{d} \underline{a}$ vagy $\lim_n \underline{x}_n = \underline{a}$ (ha d egyértelmű)

<u>Megj.</u> Ha d-t $\|.\|$ norma indukálja, azaz $d(\underline{x}, \underline{y}) = \|\underline{x} - \underline{y}\|$, akkor

$$\underline{x}_n \xrightarrow{d} \underline{a} \iff \|\underline{x}_n - \underline{a}\| \to 0 \quad , \text{ha } n \to \infty$$

Mintha egy (X,d)-beli sorozat konvergenciáját visszavezettük valós sorozatok konvergenciájára, hiszen

$$\left(d(\underline{x}_n,\underline{a}) \right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ egy valós számsorozat},$$

ezért a következő triviálisan adódik.

TÉTEL: Az alábbi állítások ekvivalensek:

(X,d) metrikus tér, $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ sorozat

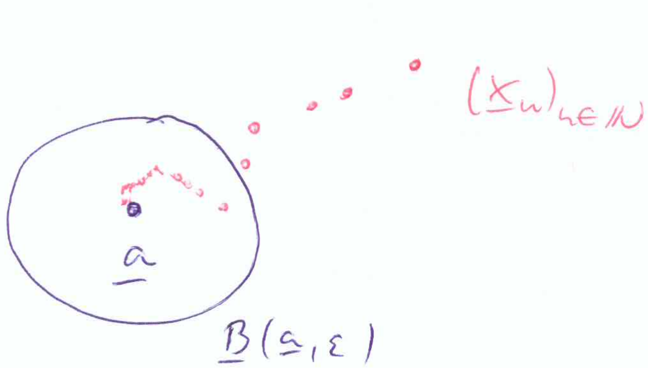
i) $\underline{x}_n \xrightarrow{d} \underline{a}$

ii) $\forall\, \varepsilon>0$-hoz $\exists\, N\in\mathbb{N}$ küszöbindex, hogy

$$d(\underline{x}_n,\underline{a})<\varepsilon, \text{ ha } n>N.$$

iii) $\forall\, \varepsilon>0$-hoz $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat majdnem minden (m.m.) tagja $B(\underline{a},\varepsilon)$-ban van

(csak véges sok tagja van $B(\underline{a},\varepsilon)$-on kívül)



27/

Megj $\underline{x} \in \mathbb{R}^n \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\|\underline{x}\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \Big)^{1/p} \qquad (p \geq 1)$$

$\hookrightarrow \quad \|\underline{x}\|_p^p = |x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p \geq |x_i|^p \quad \forall\, i = 1, \dots, n$

$\hookrightarrow \quad \boxed{|x_i| \leq \|\underline{x}\|_p} \quad \forall\, i = 1, \dots, n$

Másrészt

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{felbontásból}$$

$$\|\underline{x}\|_p = \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_p \underset{\Delta\text{-egy}}{\leq} \left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_p + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_p + \dots + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\|_p =$$

$$= \left(|x_1|^p \right)^{1/p} + \left(|x_2|^p \right)^{1/p} + \dots + \left(|x_n|^p \right)^{1/p} =$$

$$= |x_1| + \dots + |x_n|$$

vagyis $\boxed{\|\underline{x}\|_p \leq |x_1| + \dots + |x_n|} \quad (= \|\underline{x}\|_1)$

28/

Köv $(\underline{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ sorozatra, ahol

$$\underline{x}_k = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \|\underline{x}_k - \underline{a}\|_p \longrightarrow 0 \quad (k\to\infty)$$

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$\Longleftrightarrow$

$$x_i^{(k)} \to a_i, \text{ ha } k\to\infty \quad \forall\, i=1,\dots,n$$

Vagyis Egy $\mathbb{R}^n$-beli sorozat pontosan akkor konvergens, ha koordinátáit konvergens és a határértékük a koordinátáik határértékéből álló vektor.

Biz Tfh $\|\underline{x}_k - \underline{a}\|_p \to 0$ $\left(\underline{x}_k \xrightarrow{d_p} \underline{a}\right)$

Mivel $0 \le |x_i^{(k)} - a_i| \le \|\underline{x}_k - \underline{a}\|_p$

$$\|\underline{x}_k - \underline{a}\|_p \xrightarrow{\text{ha } k\to 0} 0$$

rendőrelv

$$\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i \quad \checkmark$$

25/

Megfordítva:

Ha $x_i^{(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} a_i$ $\forall\, i=1,\dots,n$, akkor

$$|x_i^{(k)} - a_i| \longrightarrow 0 \quad \text{, ha } k\to\infty$$

↳

$$0 \le \|\underline{x}_k - \underline{a}\|_p \le |x_1^{(k)}-a_1| + |x_2^{(k)}-a_2| + \dots + |x_n^{(k)}-a_n|$$

$\downarrow$ 0 $\quad$ $\downarrow$ 0 $\quad \dots \quad$ $\downarrow$ 0 $\quad$ ha $k\to\infty$

$\Downarrow$ rendőrelv

$$\|\underline{x}_k - \underline{a}\|_p \longrightarrow 0 \text{, akkor } \underline{x}_k \xrightarrow{d_p} \underline{a}$$

.!

Megj.

① Látható, hogy a bizonyítás második része nem működik, ha $n=\infty$ (akkor ∞ dimenziós teret vennénk)

(Megj.: nem is igaz! → ld Funkcionálanalízis c. könyv)

② Az $\boxed{|x_i| \le \|\underline{x}\|_p \le |x_1| + \dots + |x_n|}$ $i=1,\dots,n$ $\quad p\ge 1$ (igaz ha $p>0$)

becslést használtuk, ahol az alsó korlát és a felső korlát is független p-től $\Longrightarrow$ egy $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergenciáját csak a koordináták konvergenciája határozza meg, tehát mindegy, hogy melyik d_p metrikában dolgozunk.

ekvivalens metrikákban ugyanazok a konvergens sorozatok, ugyanazzal a határértékkel.

Példák

① $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^2$, $\underline{x}_n = \left(\frac{3n^2+1}{n^2}, \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^n \right)$

$$\lim_{n\to\infty} x_1^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n^2}\right) = 3 \quad (=a_1)$$

$$\lim_{n\to\infty} x_2^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1/2}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{3/2}{n}\right)^n} = \frac{e^{1/2}}{e^{-3/2}} = e^2 \; (=a_2)$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{3n^2+1}{n^2}, \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^n \right) \longrightarrow (3, e^2) \in \mathbb{R}^2$$

② $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^3$, $\underline{x}_n = \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}, \frac{n^2}{3^n}, \sqrt[n]{2n^2-n+2} \right)$

- $\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1} = \dfrac{n+1-n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \dfrac{2}{\underbrace{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}_{\downarrow\,\infty}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad (=a_1)$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{3^n} = 0 \quad (=a_2)$

- $\underbrace{\sqrt[n]{n^2}}_{\downarrow\,1} = \sqrt[n]{2n^2-n^2} \underset{n\ge 2}{\le} \underbrace{\sqrt[n]{2n^2-n+2}}_{= x_3^{(n)}} \underset{n\ge 2}{\le} \sqrt[n]{2n^2} = \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\downarrow\,1}\,\underbrace{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}_{\downarrow\,1^2} \to 1$

+ rendőrelv $\Rightarrow \sqrt[n]{2n^2-n+2} \to 1 \quad (=a_3)$ $\quad \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \underline{x}_n = (0,0,1)$

31/

(3)

$$\underline{x}_n = (\cos n\pi, \sin n) \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} \cos n\pi \quad \nexists \quad \left(\begin{array}{l} \cos(2k\pi) \to 1 \\ \cos((2k+1)\pi) \to -1 \end{array} \right)$$

$$\lim_{n\to\infty} \sin n \quad \nexists$$

$\Rightarrow \quad (\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergens.

Megj: A koordinátánkénti konvergencia miatt egy sor tétel öröklődik $\mathbb{R}^n$-beli sorozatokra:

(1) Ha $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens, akkor végig sok tag elhagyása, hozzávétele vagy a sorozat átrendezése nem befolyásolja a konvergenciát és a határértéket.

(2) Ha $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens, akkor a határérték egyértelmű.

(3) Ha $(\underline{x}_n)$ sorozat konvergens, akkor $\forall$ részsorozata is konvergens ugyanazzal a határértékkel.

(4)
$$\left.\begin{array}{l} \underline{x}_n \xrightarrow{d} \underline{a} \\ \underline{y}_n \xrightarrow{d} \underline{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \underline{x}_n + \underline{y}_n \xrightarrow{d} \underline{a} + \underline{b} \\ c \cdot \underline{x}_n \xrightarrow{d} c \cdot \underline{a} \end{array}$$

(5) $\underline{x}_n \xrightarrow{d} \underline{a}$, akkor $\underline{y}_n := \underline{x}_{n+k}$ <u>eltolt sorozata</u>

$$\underline{y}_n \xrightarrow{d} \underline{a}$$

32/ (6)

Áll. $(X, \langle .,. \rangle)$ Euklideszi-tér

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad \forall x \in X$$

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

Ha $x_n \to a$, $y_n \to b$ $n \in \mathbb{N}$, akkor

(i) $\langle x_n, \alpha \rangle \to \langle a, \alpha \rangle \quad \forall \alpha \in X$

(ii) $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle a, b \rangle$

Biz

(i)

$$\underset{\downarrow \atop 0}{0} \le |\langle x_n, \alpha\rangle - \langle a, \alpha\rangle| = |\langle x_n - a, \alpha\rangle| \underset{\text{C-S-B}}{\le}$$

$$\le \underbrace{\|x_n - a\|}_{\downarrow\, n\to\infty \atop 0} \cdot \|\alpha\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

+ rendőrelv $\langle x_n, \alpha\rangle \to \langle a, \alpha\rangle$

(ii)

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle a, b\rangle| \underset{\text{trükk}}{=} |\overbrace{\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, b\rangle} + \overbrace{\langle x_n, b\rangle - \langle a, b\rangle}|$$

$$\underset{\Delta\text{-egy}}{\le} |\langle x_n, y_n - b\rangle| + |\langle x_n - a, b\rangle| \underset{\text{CBS}}{\le}$$

+ rendőrelv.

$$\le \underbrace{\|x_n\|}_{\text{korl}} \cdot \underset{\downarrow \atop 0}{\|y_n - b\|} + \underset{\downarrow \atop 0}{\|x_n - a\|} \cdot \|b\| \to 0$$

!

33/

Def: $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ sorozat korlátos, ha $\exists$ olyan gömb, melybe a sorozat $\forall$ eleme beleesik.

Megj: ① $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ korlátos $\Longleftrightarrow$ $\{\|\underline{x}_n\| : n\in\mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ halmaz korlátos

② $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ konvergens $\Longrightarrow$ $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos

$\not\Longleftarrow$

pl: $\underline{x}_n = (\cos n\pi, \sin n) \subset \mathbb{R}^2$ sorozat korlátos,

hiszen $\|\underline{x}_n\| = \sqrt{\cos^2 n\pi + \sin^2 n} \leq \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ $\forall n$

vagyis $\underline{x}_n \in B(\underline{0}, \sqrt{2})$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

de $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergens.

③ Mivel $\mathbb{R}^n$-en $\nexists$ rendezés, ezért __nem__ beszélhetünk:

- monoton sorozatokról
- alsó és felső határértékről (sup, inf)
- $\pm\infty$-hez való tartásról

④ $\mathbb{R}^n$-ben, ha $n>1$ sorozatok szorzata, hányadosa nem értelmezett!

<u>Def</u> $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overset{(X,d)}{\cancel{\mathbb{R}^n}}$ <u>Cauchy-sorozat</u>, ha

$\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ N \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy

$d(\underline{x}_n, x_m) < \varepsilon$, ha $n, m > N$.

<u>TÉTEL</u> (<u>Cauchy-kritérium</u>)

$(\mathbb{R}^n, d_p)$ $(0 < p \le +\infty)$ térben $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.

<u>Biz</u>

- Tfh $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozat konvergens és $\underline{x}_k \xrightarrow{d} \underline{a}$,

akkor $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ N \in \mathbb{N}$, hogy

$d(\underline{x}_k, \underline{a}) < \frac{\varepsilon}{2}$, ha $k > N$.

Tfh $m, k > N \implies d(\underline{x}_k, \underline{x}_m) \le d(\underline{x}_k, \underline{a}) + d(\underline{a}, \underline{x}_m) <$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon$

$\Downarrow$

$(\underline{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat

<u>megj</u> ez bármely metrikus térben igaz!

• Tfh $\|\underline{X}_m - \underline{X}_k\|_p < \varepsilon$ ha $m, k > N$

$$\underline{X}_m = \left(x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}\right)$$

$$\underline{X}_k = \left(x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right)$$

<u>láttuk:</u> $$|x_i^{(m)} - x_i^{(k)}| \leq \|\underline{X}_m - \underline{X}_k\|_p \quad \forall\, i = 1, \dots, n$$

ha $m, k > N$.

↳ $(x_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ koordinátasorozatok Cauchy-sorozatok $\forall\, i = 1, \dots, n$-re

de $\mathbb{R}$-ben fennáll a Cauchy-kritérium, azaz az

$(x_i^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ koordinátasorozatok konvergensek

$$\Downarrow$$

$(\underline{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is konvergens

!

<u>Def</u>: Az (X, d) metrikus tér <u>teljes</u>, ha fennáll benne a Cauchy-kritérium, azaz X-ben minden Cauchy-sorozat konvergens.

36/

Megj: (1) $(\mathbb{R}^n, d_p)$ tér teljes.

(2) $\forall$ (X,d) metrikus térben igaz:

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens $\Rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy

(3) A megfordítás nem igaz általában: léteznek nem teljes metrikus terek.

Pl.) $X := \mathbb{Q}$, $d(x,y) = |x-y|$ $\rightsquigarrow$ (X,d) metrikus tér

$$x_0 := 2, \quad x_{n+1} := \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \quad n\in\mathbb{N}$$

Tfh $x_n \to \alpha$ $\Rightarrow$

$$\begin{array}{ccccc} x_{n+1} & = & \dfrac{x_n}{2} & + & \dfrac{1}{x_n} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \alpha & & \dfrac{\alpha}{2} & & \dfrac{1}{\alpha} \end{array} \rightsquigarrow \alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{\alpha}$$

$$\alpha = \sqrt{2}$$

belátható, hogy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton és korlátos $\Rightarrow$ konvergens $\mathbb{R}$-ben

$\Downarrow$

Cauchy-sorozat

Ha konvergens, lenne olyan $\beta\in\mathbb{Q}$ szám, akkor $\forall\, \varepsilon>0$-hoz $\exists\, N\in\mathbb{N}$: $|x_n-\beta|<\varepsilon$, ha $n>N$

de a limesz egyértelmű $\Rightarrow$ $\beta=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

$\hookrightarrow$ (x_n) nem konvergens X-ben. !

<u>TÉTEL</u> (Bolzano–Weierstrass)

$(\mathbb{R}^n, d_p)$-ben minden korlátos pontsorozatnak van konvergens részsorozata.

<u>Biz.</u> Tfh $(\underline{x}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ korlátos, $\underline{x}_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$

$\Downarrow$

$(x_i^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ koordinátasorozat korlátos $\forall i = 1,\dots,n$

$\Downarrow$ $\mathbb{R}$-beli Bolzano–Weierstrass $\boxed{i = 1\text{-re}}$

$\exists$ konvergens részsorozata

$$\left(x_1^{(k_\ell)}\right)_{\ell\in\mathbb{N}}$$

Tekintsük $(\underline{x}_{k_\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ $(\subset \mathbb{R}^n)$ részsorozatot, mely <u>korlátos</u>

$\underline{x}_{k_\ell} = \left(x_1^{(k_\ell)}, x_2^{(k_\ell)}, \dots, x_n^{(k_\ell)}\right)$ $\leadsto$ koordinátasorozatok korlátosak

$\Downarrow$ spec

$\left(x_2^{(k_\ell)}\right)_{\ell\in\mathbb{N}}$ $(\subset \mathbb{R})$ sorozat korlátos

$\Downarrow$ $\mathbb{R}$-beli Bolzano–Weierstrass

$\exists$ konvergens részsorozata: $\left(x_2^{(k_{\ell_m})}\right)_{m\in\mathbb{N}}$

$\Downarrow$

Tekintsük az ennek a sorozatnak megfelelő vektorrészsorozatot

$$(\underline{X}_{k_{\ell_m}})_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n \qquad \text{korlátos}$$

$$\underline{X}_{k_{\ell_m}} = \left(x_1^{(k_{\ell_m})}, x_2^{(k_{\ell_m})}, x_3^{(k_{\ell_m})}, \dots, x_n^{(k_{\ell_m})}\right)$$

konvergens, mert az előző konvergens részsorozat részsorozata

konvergens, az előző lépés miatt

⋮

folytatjuk az eljárást

$\Downarrow$

olyan részsorozatot kapunk n lépés után, melyben $\forall$ koordinátasorozat konvergens

$\Downarrow$

a vektorrészsorozat is konvergens

<u>Eml.</u> $(\underline{x}_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ sorozatnak $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ torlódási pontja, ha $\exists$ $(\underline{x}_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ részsorozata, mely a-hoz konvergál.

Nyílt és zárt halmazok további jellemzése

<u>Láttuk:</u> (X, d) metrikus térben

- tetszőleges számú zárt halmaz metszete zárt
- véges sok zárt uniója zárt.

→ Ha $A \subset X$ zárt, jelölje $\mathcal{Z}$ az összes olyan $B \subset X$ zárt halmazt, melyre $A \subset B$.

$$\mathcal{Z} = \{ B \subset X \text{ zárt} : A \subset B \}$$

$\mathcal{Z} \neq \emptyset$, mert $X \in \mathcal{Z}$

$$\boxed{\overline{A} := \bigcap_{B \in \mathcal{Z}} B}$$ zárt halmaz az előzőek miatt

- mivel $\forall\, B \in \mathcal{Z}$-re $A \subset B$ $\Rightarrow$ $A \subset \overline{A}$
- Ha $C \subset X$ zárt és $A \subset C$, akkor $\overline{A} \subset C$, mert $C \in \mathcal{Z}$.

$\Rightarrow$ $\overline{A}$: az A-t lefedő legszűkebb zárt halmaz:

<u>A lezártja</u>

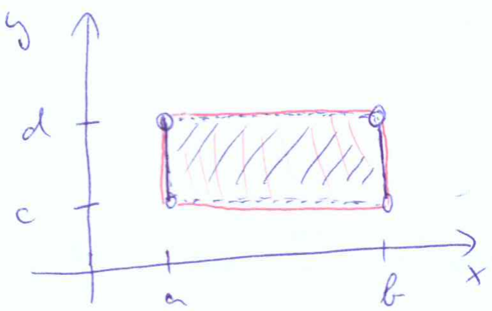
<u>Def</u> (X,d) metrikus tér, $A \subset X$, $\underline{x} \in X$ <u>torlódási pontja</u> ~~A~~ A-nak, ha $\forall\, r>0$ esetén

$$\mathring{B}(\underline{x}, r) \cap A \neq \emptyset$$

$$\mathring{B}(\underline{x}, r) \equiv B(\underline{x}, r) \setminus \{\underline{x}\}$$

($\underline{x}$ bármely környezetében van A-nak $\underline{x}$-től eltérő pontja)

<u>Pl</u> $A = [a,b] \times (c,d)$ torlódási pontjai $[a,b] \times [c,d]$



$A' := \{A$ torlódási pontjai$\}$ A <u>derivált halmaza</u>

<u>TÉTEL</u> (X,d) metrikus tér, $\emptyset \neq A \subset X$, $\underline{a} \in X$.

$\underline{a}$ torlódási pontja A-nak $\iff$ $\exists\ (\underline{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A \setminus \{\underline{a}\}$ sorozat, melyre

$$\lim_{n\to\infty} \underline{x}_n = \underline{a}$$

41)

Biz: $\Longrightarrow$: tfh $\underline{a} \in A'$.

Ekkor $\forall n \in \mathbb{N}^+$ esetén $B(\underline{a}, \frac{1}{n}) \setminus \{\underline{a}\} \neq \emptyset$,

azaz van benne egy elem pl $\underline{x}_n$

$$\Downarrow$$

$(\underline{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ sorozat, melyre

$$0 < d(\underline{x}_n, \underline{a}) < \underbrace{\frac{1}{n}}_{\xrightarrow{n \to \infty} 0} \qquad n \in \mathbb{N}$$

+ rendőrelv

$\Longrightarrow$ $\lim\limits_{n \to \infty} d(\underline{x}_n, \underline{a}) = 0$, azaz $\underline{x}_n \xrightarrow{d} \underline{a}$ ✓

$\Longleftarrow$: Tfh valamely $(\underline{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ sorozatra, $\lim\limits_{n \to \infty} \underline{x}_n = \underline{a}$

$$\Downarrow$$

$\underline{a}$ $\forall$ környezetébe $(\underline{x}_n)$ m.m. elem beleesik,

azaz $\forall$ $r > 0$-hoz $B(\underline{a}, r)$-hez $\exists$ $N \in \mathbb{N}$, hogy

$\underline{x}_k \in B(\underline{a}, r)$, ha $k > N$

$$\Downarrow$$

$\underline{x}_k \in \big(B(\underline{a}, r) \setminus \{\underline{a}\}\big) \cap A$

(hiszen $\underline{x}_n \in A$)

$$\Downarrow$$

$\underline{a} \in A'$

!

42/

TÉTEL (X,d) metrikus tér

$$A \subset X \text{ zárt} \iff A' \subseteq A$$

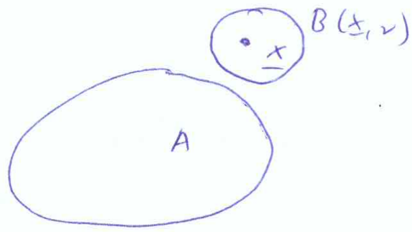
(A $\forall$ torlódási pontját tartalmazza)

Biz. $\Longrightarrow$: t.f.h. A zárt, $\underline{x} \in A'$

Ha $\underline{x} \notin A$, akkor $\underline{x} \in A^c$. Mivel A zárt, ezért A^c nyílt

↳ $\underline{x} \in A^c$ belső pontja, azaz $\exists\ r>0$, melyre

$$B(\underline{x},r) \subset A^c$$



$\Longrightarrow B(\underline{x},r) \cap A = \emptyset$: ↯, mert

$\underline{x} \in A'$ volt

$\Longrightarrow \underline{x} \in A$ ✓

$\Longleftarrow$: T.f.h. $A' \subseteq A$.

Ha A nem zárt, akkor A^c nem nyílt, azaz $\exists\ \underline{x} \in A^c$, mely nem belső pontja A^c-nek: $(\underline{x} \notin \operatorname{int} A^c)$

$$\Downarrow$$

$\forall\ r>0$ esetén $B(\underline{x},r) \not\subset A^c$, vagyis

$\exists\ y \in B(\underline{x},r)$, melyre $y \in A$

$r := \frac{1}{n}$-re alkalmazva $\Longrightarrow \exists\ y_n \in B(\underline{x},\frac{1}{n})$, melyre $y_n \in A$

Erre az $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra $d(\underline{x},y_n) < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(\underline{x},y_n) = 0$, azaz $y_n \to \underline{x}$ $\Longrightarrow$ $\underline{x}$ torlódási pont

$(y_n \in A)$

43/ tegyük $\underline{x} \in A' \subset A$: ↯ : feltettük, hogy $\underline{x} \notin A^c$.
$\quad$ feltétel

$\Downarrow$

A zárt

$\circ$!

Spec $\forall\ A \subset X$ véges zárt, mert $A' = \emptyset \subset A$.

TÉTEL (X,d) metrikus tér.

$\emptyset \neq A \subset X$ zárt $\iff \forall\ (\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ konvergens sorozatra $\lim(\underline{x}_n) \in A$.

Biz $\Rightarrow$: Tfh A zárt. Ekkor $A' \subset A$.

Legyen $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ konvergens, $\underline{\alpha} := \lim(\underline{x}_n)$

- Ha $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat csak véges értéket vesz fel, akkor van olyan részsorozata, melyre $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = \underline{a}$ valamely $\underline{a} \in A$-ra, de ekkor
$$\underline{\alpha} = \lim(\underline{x}_n) = \lim_k(\underline{x}_{n_k}) = \underline{a}$$
tehát $\underline{\alpha} \in A$ ✓

- Ha $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat ∞ sok értéket vesz fel

Tfh $\underline{\alpha} = \lim(\underline{x}_n) \notin A$

A zárt $\Rightarrow A^c$ nyílt és $\underline{\alpha} \in A^c \Rightarrow \exists\ r > 0$, melyre $B(\underline{\alpha}, r) \subset A^c$

De $\underline{x}_n \to \underline{\alpha}$, ezért $\underline{x}_n \in B(\underline{\alpha}, r)$ m.m. n-re : ↯ $\underline{x}_n \in A\ \forall n$

$\Rightarrow \lim(\underline{x}_n) \in A$

44)

TÉTEL (X,d) metrikus tér.

$A \subset X$ zárt $\Longleftrightarrow$ $\partial A \subset A$, azaz A minden határpontját tartalmazza

Biz.

$\Rightarrow$: Tfh A zárt, $\underline{a} \in \partial A$

↳ $\forall n \in \mathbb{N}^+$ $B(\underline{a}, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$

↳ $\forall n$-re válasszuk egy $\underline{x}_n \in B(\underline{a}, \frac{1}{n})$ elemet

$\Rightarrow (\underline{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ sorozat, melyre $\underline{x}_n \xrightarrow{d} \underline{a}$.

Mivel A zárt, ezért $\underline{a} \in A$ $\Rightarrow \partial A \subset A$ ✓

$\Leftarrow$: Tfh $\partial A \subset A$ és $\underline{x} \notin A$ $(\underline{x} \in A^c)$

↳ $\underline{x} \notin \text{int}\, A$ és $\underline{x} \notin \partial A$ $\Rightarrow \underline{x} \in \text{ext}\, A = \text{int}\, A^c$

$\Rightarrow \underline{A}^c$ $\forall$ pontja belső pont $\Rightarrow A^c$ nyílt

$\Downarrow$

A zárt !!

Köv Bármely halmaz határa zárt.

ugyanis $\partial A = (\underbrace{\text{int}\, A}_{\text{nyílt}} \cup \underbrace{\text{ext}\, A}_{\text{nyílt}})^c$ zárt.

44)

TÉTEL (X,d) metrikus tér.

$A \subset X$ zárt $\iff$ $\partial A \subset A$, azaz A minden határpontját tartalmazza.

Biz.

$\Rightarrow$: Tfh A zárt, $\underline{a} \in \partial A$

$\hookrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}^+$ $B(\underline{a}, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$.

$\hookrightarrow$ $\forall n$-re válasszunk egy $\underline{x}_n \in B(\underline{a}, \frac{1}{n})$ elemet

$\Rightarrow$ $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ sorozat, melyre $\underline{x}_n \xrightarrow{d} \underline{a}$.

Mivel A zárt, ezért $\underline{a} \in A$ $\Rightarrow$ $\partial A \subset A$ ✓

$\Leftarrow$: Tfh $\partial A \subset A$ és $\underline{x} \notin A$ $(\underline{x} \in A^c)$

$\hookrightarrow$ $\underline{x} \notin \operatorname{int} A$ és $\underline{x} \notin \partial A$ $\Rightarrow$ $\underline{x} \in \operatorname{ext} A = \operatorname{int} A^c$

$\Rightarrow$ $\underline{A}^c$ $\forall$ pontja belső pont $\Rightarrow$ A^c nyílt

$\Downarrow$

A zárt !

Köv Bármely halmaz határa zárt.

ugyanis $\partial A = (\underbrace{\operatorname{int} A}_{\text{nyílt}} \cup \underbrace{\operatorname{ext} A}_{\text{nyílt}})^c$ zárt.

45)

Összefoglalva

Ekvivalens állítások. (X,d) metrikus tér, $A \subset X$

(1) A zárt, azaz A^c nyílt. (def.)

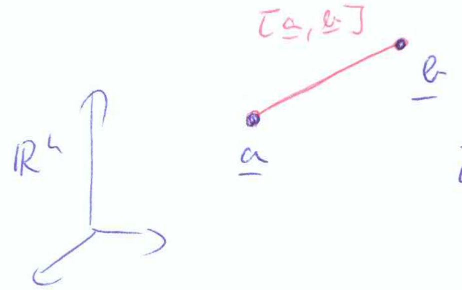
(2) $A' \subseteq A$

(3) $\partial A \subseteq A$

(4) $\forall\, (\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ konvergens sorozatra, $\lim_n \underline{x}_n \in A$

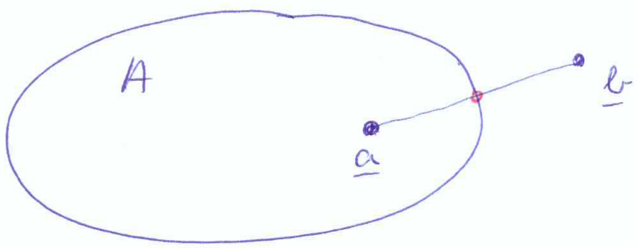
(5) $$\overline{A} = \bigcap_{\substack{B \text{ zárt} \\ A \subset B}} B = A \cup A' = \underbrace{A \cup \partial A}_{A \text{ lezártja}} = A$$

Pl: $\mathbb{R}^n$-ben, $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$ pontokat összekötő szakasz: $[\underline{a}, \underline{b}]$



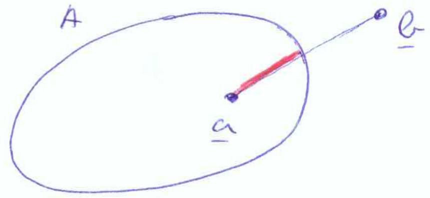
$$[\underline{a}, \underline{b}] = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} = \underline{a} + t(\underline{b} - \underline{a}) = (1-t)\underline{a} + t\underline{b},\ t \in [0,1] \}$$

TÉTEL $\forall\, A \subset \mathbb{R}^n$ halmazra teljesül, hogy ha $\underline{a} \in A$ és $\underline{b} \in A^c$, akkor $[\underline{a}, \underline{b}]$ metszi A határát, azaz $[\underline{a}, \underline{b}] \cap \partial A \neq \emptyset$.



46)

Biz. $T := \{t \in [0,1] : \underline{a} + t(\underline{b}-\underline{a}) \in A\}$



- $T \neq \emptyset$ $\quad (0 \in T)$
- T korlátos $\quad (T \subset [0,1])$

$\Downarrow$

$\exists$ legkisebb felső korlátja, $\sup T =: t_0$

áll: $\underline{x}_0 := \underline{a} + t_0(\underline{b}-\underline{a}) \in \partial A$

$\forall\ \varepsilon > 0$ -ra $\quad (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \cap T \neq \emptyset$

és $\quad (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \cap ([0,1] \setminus T) \neq \emptyset$

Ha $t \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \cap T \Rightarrow \underline{x} = \underline{a} + t(\underline{b}-\underline{a}) \in A$

és $\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \varepsilon \|\underline{b}-\underline{a}\|$

Ha $u \in (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon) \setminus T \Rightarrow \underline{y} = \underline{a} + u(\underline{b}-\underline{a}) \in A^c$

és $\|\underline{y} - \underline{x}_0\| < \varepsilon \|\underline{b}-\underline{a}\|$

$\hookrightarrow$ $\underline{x}_0$ $\forall$ környezete metszi A-t és A^c-t is

$\Downarrow$

$\underline{x}_0 \in \partial A$

!

47)

<u>Köv</u>: Ha $A \subset \mathbb{R}^n$ nyílt és zárt $\Longleftrightarrow$ $A = \emptyset$ vagy $A = \mathbb{R}^n$

<u>Biz</u>: Ha A nyílt $\Rightarrow$ $A \cap \partial A = \emptyset$
Ha A zárt $\Rightarrow$ $\partial A \subset A$
$\Longrightarrow \partial A = \emptyset$

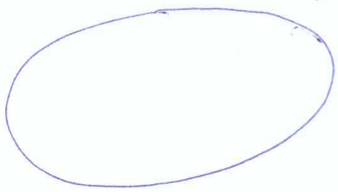
Márpedig az előző tétel szerint, ha $\emptyset \neq A \neq \mathbb{R}^n$, akkor
$\partial A \neq \emptyset$

$\Downarrow$

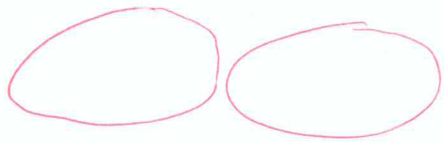
$A = \emptyset$ vagy $A = \mathbb{R}^n$!

<u>Def</u>: $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz <u>összefüggő</u>, ha G nem bontható fel két nem üres diszjunkt nyílt halmaz uniójára.

G nyílt, összefüggő



$\tilde{G}$ nyílt, <u>nem</u> összefüggő



<u>TÉTEL</u>

(i) G nyílt összefüggő $\Longleftrightarrow$ bármely két pontja összeköthető G-ben fekvő törött vonallal

(ii) $\forall$ nyílt halmaz felbontható páronként diszjunkt összefüggő nyílt halmazok uniójára.

<u>Biz</u>: Analízis 1.

48.)