

# Tételsor Kalkulus 2 tárgyból

2020/21., 2. félév

**Amelyik tétel mögött (B) szerepel, annak a bizonyítását kérdezhetem a szóbelin.**

## 1. Metrika és topológia $\mathbb{R}^n$ -en

$\mathbb{R}^n$ , mint euklideszi tér. Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij egyenlőtlenség (B). Távol-ság, környezet, halmaz belső, külső, határ, torlódási és izolált pontja. Ponsoro-zatok konvergenciája, torlódási pontja, korlátossága. Cauchy-kritérium. Bolzano-Weierstrass tétel (B). Halmazok nyíltsága, zártsága, korlátossága. Cantor-féle met-szettétel (B). Összefüggő és ívszerűen összefüggő halmazok. Kompakt halmazok, Borel-tétel.

## 2. Többváltozós függvények deriválása

Többváltozós függvények határértéke, folytonossága, egyenletes folytonossága. Kom-pakt halmazon folytonos függvények, Weierstrass-tétel. Parciális deriváltak. Több-változós függvények deriváltja, iránymenti deriváltja. A deriválhatóság szükséges és elégséges feltételei (B). Érintősík és gradiens, a gradiens geometriai értelmezése. Az iránymenti derivált és a gradiens kapcsolata (B). Lagrange-féle középértékté-tel. Implicit és összetett függvények deriválása. Differenciálok és hibaszámítás. Magasabbrendű deriváltak. Young-Schwarz tétel. Taylor-polinom.

## 3. Többváltozós függvények szélsőértéke

Lokális, globális és abszolút szélsőérték. Lokális szélsőérték létezésének szükséges és elégséges feltétele (B). Hesse-mátrix. Kvadratikus alak pozitív, negatív definitisége, pozitív, negatív szemidefinitisége. Definitiségi kritériumok. Feltételes szélsőérték, Lagrange-féle multiplikátoros módszer. Többváltozós függvények konvexitásának kritériumai. Paraméteres integrálok és deriválásuk.

## 4. $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ függvények

$\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$  függvények folytonossága, differenciálhatósága. A differenciálhatóság szükséges és elégséges feltételei (B). Jacobi-mátrix. Banach-Tyihonov-Cacciopoli-féle fixponttétel (B). Inverz- és implicitfüggvény tétel. A deriváltmátrix invariánsai (rotáció, divergencia). A nabla szimbólum.

## 5. Többváltozós függvények integrálása

Többváltozós függvények Riemann-integrálja. A Darboux-féle alsó- és felső-integrál, Darboux-tétel. Oszcillációs összeg. A Riemann-integrálhatóság kritériumai. A Riemann-integrál tulajdonságai. Fubini-tétel téglán **(B)**. Integrálás normáltartományon. Fubini-tétel normáltartományon. Jordan-féle külső és belső mérték, Jordan-mérhető halmazok, halmazok Jordan-mértéke. Jordan értelemben nullmértékű halmaz. Jordan-mérhetőség kritériumai. Jordan-mérték tulajdonságai. A Jordan-féle mérték- és integráltranszformáció, Jacobi-determináns. Polár-, henger-, gömbi-transzformáció. Többes integrálok alkalmazásai (térfogat, tömeg, súlypont).

## 6. Vektor-vektor függvények integrálása

Rektifikálható görbék, ívhossz. Elégséges feltétel görbék rektifikálhatóságára. Ívhossz szerinti paraméterezés. Vektor-vektor függvények vonalintegrálja. Newton-Leibniz tétel vonalintegrálra **(B)**. Potenciálfüggvény, potenciálos vektormező tulajdonságai. Paraméteres integrálra vonatkozó tétel. A potenciálfüggvény létezésének elégséges feltétele **(B)**. Green-tétel **(B)**. Felületek értelmezése és irányítása. A felszín értelmezése. Vektor-vektor függvények felületi integrálja, fluxus. Stokes-tétel **(B)**, Gauss-Osztrogradszkij tétel. A divergencia és a rotáció koordinátafüggetlen értelmezése.

## 7. Függvénysorozatok és függvénysorok

Függvénysorozatok pontonkénti és egyenletes konvergenciája, uniform metrika. Az egyenletes konvergenciára vonatkozó Cauchy-kritérium. Az egyenletes konvergencia következményei (folytonos függvények egyenletes limesze folytonos **(B)**, a limeszképzés felcserélhetősége az integrálással **(B)**, illetve a deriválással **(B)**). Dini-tétele a monoton konvergenciáról. Függvénysorok pontonkénti és egyenletes konvergenciája. Weierstrass-kritérium **(B)**. Egyenletes konvergencia következményei (a szumma felcserélhetősége az integrálással illetve a deriválással **(B)**).

## 8. Hatványsorok és Taylor-sorok

Hatványsorok konvergenciatartománya **(B)**, konvergenciasugár. Hatványsor egyenletes konvergenciája, az egyenletes konvergencia következményei **(B)**. Analitikus függvények, hatványsorok egyértelműsége **(B)**, Taylor-sor. Nevezetes Taylor-sorok ( $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$ , stb.). Binomiális sorfejtés.

## 9. Fourier-sorok

Trigonometrikus sorok és Fourier-sorok. Dirichlet-féle magfüggvény és integrál **(B)**. Fourier-sor pontonkénti és egyenletes konvergenciájának elégséges feltétele **(B)**. Dini-kritérium **(B)**, Lipschitz-kritérium, Dirichlet-Jordan tétel. Parseval-formula **(B)**. Riemann-lemma **(B)**. Fejér-féle összegzés. Fejér-féle magfüggvény. A Fejér-tétel és következményei. Alkalmazások (Izoperimetrikus probléma, Hővezetési probléma, Rezgő húr).