Paraméteres integrálok differenciálhatósága

Def. $D \subset \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz, $[a,b] \subset \mathbb{R}$

$f : D \times [a,b] \to \mathbb{R}$ $n+1$-változós folytonos fv.

↳ $\forall\ \underline{x} \in D$ rögzített esetén a

$$t \longmapsto f(\underline{x}, t) \qquad t \in [a,b]$$

függvény folytonos, így Riemann-integrálható.

A

$$\varphi(\underline{x}) := \int_a^b f(\underline{x}, t)\, dt \qquad \underline{x} \in D$$

módon értelmezett $\varphi : D \to \mathbb{R}$ függvényt az f függvény paraméteres integráljának nevezzük.

TÉTEL: A fenti jelölésekkel:

a) Az $f : D \times [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény $\varphi : D \to \mathbb{R}$ paraméteres integrálja folytonos függvény.

b) Ha a $D \times [a,b]$ halmazon léteznek a $\partial_i f$ $(i = 1, \dots, n)$ parciális deriváltak és folytonosak, akkor φ folytonosan deriválható D-n és

$$\partial_i \varphi(\underline{x}) = \int_a^b \partial_i f(\underline{x}, t)\, dt \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\underline{x} \in D$$

208/

<u>Biz</u>

a) $\underline{x}_0 \in D$ tetsz. ~~...~~ $\rightsquigarrow$ $B(\underline{x}_0, r) \subset D$ valamely r-re, sőt úgy,
hogy $\overline{B(\underline{x}_0, r)} \subset D$ mellett.

$\Rightarrow$ $\overline{B(\underline{x}_0, r)} \times [a,b]$ kompakt

$\Downarrow$ Heine-tétel

f egyenletesen folytonos $\overline{B(\underline{x}_0, r)} \times [a,b]$-n:

$\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta > 0$, hogy $\forall\, \underline{u}, \underline{v} \in \overline{B(\underline{x}_0, r)} \times [a,b]$, melyre

$$\|\underline{u} - \underline{v}\| < \delta \Rightarrow |f(\underline{u}) - f(\underline{v})| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Ha $0 < \delta \le r$

$\hookrightarrow$ $\forall\, t \in [a,b]$, $\underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta) \Rightarrow |f(\underline{x}, t) - f(\underline{x}_0, t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$

$\Downarrow$

$\forall\, \underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta)$-ra

$$|\varphi(\underline{x}) - \varphi(\underline{x}_0)| = \left| \int_a^b (f(\underline{x}, t) - f(\underline{x}_0, t))\, dt \right| \le \int_a^b \underbrace{|f(\underline{x}, t) - f(\underline{x}_0, t)|}_{< \frac{\varepsilon}{b-a}}\, dt <$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

vagyis $\varphi(\underline{x})$ folytonos $\underline{x}_0$-ban. ✓

203)

b) részletek.

$$\partial_i \varphi(\underline{x}) = \int_a^b \partial_i f(\underline{x}, t)\,dt \qquad i = 1, \dots, n$$
$$\underline{x} \in D$$

Th $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n$: ONB (ortonormált bázis $\mathbb{R}^n$-ben), mely az adott koordinátatengelyek irányában vannak felvéve

$$\Downarrow$$

$$\partial_i \varphi(\underline{x}) = \lim_{s \to 0} \frac{\varphi(\underline{x} + s\underline{e}_i) - \varphi(\underline{x})}{s} \qquad \text{(def.)}$$

$$\hookrightarrow \lim_{s \to 0} \left[\frac{\varphi(\underline{x} + s\underline{e}_i) - \varphi(\underline{x})}{s} - \int_a^b \partial_i f(\underline{x}, t)\,dt \right] =$$

$$= \lim_{s \to 0} \left[\int_a^b \left(\frac{1}{s}\big(f(\underline{x} + s\underline{e}_i, t) - f(\underline{x}, t)\big) - \partial_i f(\underline{x}, t) \right) dt \right] \qquad (*)$$

$$g(z) := f(\underline{x} + z\underline{e}_i, t) \qquad z \in [0, s]$$

$\Downarrow$ Lagrange-féle középértéktétel 1 változóban

$\exists\, \vartheta \in (0,1)$, melyre

$$\frac{g(s) - g(0)}{s} = \frac{f(\underline{x} + s\underline{e}_i, t) - f(\underline{x}, t)}{s} = \partial_i f(\underline{x} + \vartheta s\underline{e}_i, t)$$

Mivel $\partial_i f$ folytonos, ezért $\forall\, \varepsilon>0$-hoz $\exists\, \delta>0$, hogy

$$\forall\, s\in\mathbb{R},\ |s|<\delta \Rightarrow \left|\partial_i f(\underline{x}+\vartheta s\underline{e}_i, t)-\partial_i f(\underline{x},t)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\Downarrow$$

$$\left|\int_a^b \left(\partial_i f(\underline{x}+\vartheta s\underline{e}_i, t)-\partial_i f(\underline{x},t)\right) dt\right| \leq$$

$$\leq \int_a^b \underbrace{\left|\partial_i f(\underline{x}+\vartheta s\underline{e}_i, t)-\partial_i f(\underline{x},t)\right|}_{<\frac{\varepsilon}{b-a}} dt < \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot (b-a) = \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

(*)

$$\lim_{s\to 0}\left[\int_a^b \left(\underbrace{\frac{1}{s}\left(f(\underline{x}+s\underline{e}_i,t)-f(\underline{x},t)\right)}_{\partial_i f(\underline{x}+\vartheta s\underline{e}_i, t)}-\partial_i f(\underline{x},t)\right) dt\right] < \varepsilon \qquad \forall\, \varepsilon>0$$

vagyis

$$\lim_{s\to 0}\left[\frac{\varphi(\underline{x}+s\underline{e}_i)-\varphi(\underline{x})}{s}-\int_a^b \partial_i f(\underline{x},t)\, dt\right]=0$$

$$\Downarrow$$

$$\partial_i \varphi(\underline{x}) = \int_a^b \partial_i f(\underline{x},t)\, dt \qquad i=1,\dots,n,\ \underline{x}\in D$$

folytonosságuk a)-ból adódik

!

2011/

Példák

(1) Számítsuk ki a $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx$ integrált!

Trükk: $$F(y) = \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(1+yx)}{1+x^2}\,dx}_{\int_0^1 f(x,y)\,dx} \quad \text{paraméteres int.}$$

$$F'(y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TÉTEL}}}{=} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\ln(1+yx)}{1+x^2}\right)dx = \int_0^1 \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)}\,dx \; (=)$$

$$\frac{-y}{(1+y^2)(1+xy)} + \frac{1}{1+y^2}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2}\,\frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{-y(1+x^2) + x(1+xy) + y(1+xy)}{(1+y^2)(1+xy)(1+x^2)} =$$

$$= \frac{\cancel{-y} - \cancel{yx^2} + x + \cancel{x^2y} + \cancel{y} + xy^2}{(1+y^2)(1+xy)(1+x^2)} = \frac{x(1+y^2)}{(1+y^2)(1+xy)(1+x^2)} = \frac{x}{(1+xy)(1+x^2)}$$

$$(=) -\frac{y}{1+y^2}\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1+xy}\,dx}_{\left[\frac{\ln(1+xy)}{y}\right]_{x=0}^{1}} + \frac{1}{1+y^2}\underbrace{\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx}_{\left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1} + \frac{y}{1+y^2}\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx}_{\left[\operatorname{arctg} x\right]_0^1} =$$

212/

$$= -\frac{1}{1+y^2}\underbrace{\left[\ln(1+xy)\right]_{x=0}^{1}}_{\ln(1+y)} + \frac{1}{1+y^2}\frac{\ln 2}{2} + \frac{y}{1+y^2}\frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{1}{1+y^2}\left(-\ln(1+y) + \frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4}y\right)$$

$$\int_0^1 F'(y)\,dy = \left[F(y)\right]_0^1 = F(1) - \underset{0}{\overset{!}{F(0)}} = \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx}_{\text{őt keressük}} =$$

$$= -\underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{1+y^2}\,dy}_{\text{éppen a keresett integrál}} + \frac{\ln 2}{2}\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1+y^2}\,dy}_{\left[\operatorname{arctg} y\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}} + \frac{\pi}{4}\underbrace{\int_0^1 \frac{y}{1+y^2}\,dy}_{\frac{1}{2}\left[\ln(1+y^2)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}}$$

<u>rendezve</u>

$$2\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi \ln 2}{8} + \frac{\pi \ln 2}{8}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi \ln 2}{8}}$$

2/13

(2) Számítsuk ki a $\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx$ integrált, az $\boxed{\alpha > 0}$

$$F(\beta) := \int_0^\infty e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx \quad , F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$$

paraméteres integrál segítségével!

$$F'(\beta) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial\beta}\left(e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}\right)dx = \int_0^\infty -x e^{-\beta x}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx =$$

$$= -\int_0^\infty e^{-\beta x}\sin\alpha x\,dx$$

$$\underline{\underline{I}} := \int e^{-\beta x}\sin\alpha x\,dx \underset{\text{parc. int.}}{=} -\frac{e^{-\beta x}\sin\alpha x}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{-\beta x}\cos\alpha x\,dx \underset{\text{parc. int.}}{=}$$

$u'(x) = e^{-\beta x} \rightsquigarrow u(x) = \frac{e^{-\beta x}}{-\beta}$

$v(x) = \sin\alpha x \qquad v'(x) = \alpha\cos\alpha x$

$u' = e^{-\beta x} \rightsquigarrow u = \frac{e^{-\beta x}}{-\beta}$

$v = \cos\alpha x \rightsquigarrow v' = -\alpha\sin\alpha x$

$$= -\frac{e^{-\beta x}\sin\alpha x}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}\left\{-\frac{e^{-\beta x}\cos\alpha x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{-\beta x}\sin\alpha x\,dx\right\} =$$

$$= -\frac{e^{-\beta x}\sin\alpha x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta^2}e^{-\beta x}\cos\alpha x - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\underline{\underline{I}}$$

$$I\underbrace{\left(1+\frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)}_{\frac{\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}} = -\frac{e^{\beta x}\sin\alpha x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta^2}e^{-\beta x}\cos\alpha x$$

$$\Rightarrow I = \frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\left(-\frac{e^{\beta x}\sin\alpha x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta^2}e^{-\beta x}\cos\alpha x\right)$$

2.13/

$$I = -\frac{e^{-\beta x}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\beta\sin\alpha x + \alpha\cos\alpha x\right) = \int e^{-\beta x}\sin\alpha x\,dx$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-\beta x}\sin\alpha x\,dx \underset{\text{nepr.}}{=} \lim_{\Omega\to\infty}\int_0^\Omega e^{-\beta x}\sin\alpha x\,dx =$$

$$= \lim_{\Omega\to\infty}\underbrace{\left[-\frac{e^{-\beta x}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\beta\sin\alpha x+\alpha\cos\alpha x\right)\right]_0^\Omega}_{} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$-\frac{e^{-\beta\Omega}}{\alpha^2+\beta}\underbrace{\left(\beta\sin\alpha\Omega+\alpha\cos\alpha\Omega\right)}_{\text{hod}} + \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\alpha$$

$$\Omega\to\infty \downarrow 0$$

$$F'(\beta) = -\int_0^\infty e^{-\beta x}\sin\alpha x\,dx = -\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$\int_{-\infty}^{t} F'(\beta)\,d\beta = \left[F(\beta)\right]_{-\infty}^{t} = F(t)-F(-\infty) =$$

$$= -\int_{-\infty}^{t}\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\,d\beta = -\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{t}\frac{1}{1+\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)}\,d\beta = -\frac{1}{\alpha}\left[\frac{\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{1}{\alpha}}\right]_{-\infty}^{t} =$$

$$= -\operatorname{arctg}\frac{t}{\alpha} + \underbrace{\cancel{\operatorname{arctg}(-\infty)}}_{=\,-\frac{\pi}{2}} + \underbrace{\operatorname{arctg} 0}_{=\,0}$$

215/

$$\Rightarrow \quad F(t) = -\operatorname{arctg}\frac{t}{\alpha} + F(0)$$

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{t\to\infty}\left(-\operatorname{arctg}\frac{t}{\alpha} + F(0)\right) \underset{\alpha>0}{\overset{\uparrow}{=}} -\frac{\pi}{2} + F(0) = 0$$

$$\lim_{\beta\to\infty} e^{-\beta x} = 0$$

$$\Rightarrow F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$\circ$!

③ Biz be, hogy $x \neq 0$ esetén

$$\frac{d}{dx}\int_1^2 \frac{e^{xy}}{y}\,dy = \frac{e^{2x}-e^{x}}{x}$$

TÉTEL

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\int_1^2 \frac{e^{xy}}{y}\,dy = \int_1^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{xy}}{y}\right)dy =$$

$$= \int_1^2 \frac{y\,e^{xy}}{y}\,dy = \int_1^2 e^{xy}\,dy =$$

$$= \left[\frac{e^{xy}}{x}\right]_{y=1}^{2} = \frac{e^{2x}-e^{x}}{x}$$

$\circ$!

216/

(5)

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{\ln(1+xy)}{y}\,dy = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

TÉTEL

↳ $$\frac{d}{dt}\int_0^1 \frac{\ln(1+xy)}{y}\,dy = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\ln(1+xy)}{y}\right)dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{(1+xy)\cdot y}\cdot y\,dy = \int_0^1 \frac{1}{1+xy}\,dy =$$

$$= \left[\frac{\ln(1+xy)}{x}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{\ln(1+x)}{x}}}$$

y

0 !

217

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvények

$D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}^m$ vektor-vektor függvény

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \longmapsto \underline{y} = f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\underline{x}) \\ f_2(\underline{x}) \\ \vdots \\ f_m(\underline{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$f_i(\underline{x})$ <u>i-dik koordinátafüggvény</u> $i = 1, \dots, m$

$f_i : D \to \mathbb{R}$ n-változós függvény

A kiindulási tér: $(\mathbb{R}^n, \|.\|_{\mathbb{R}^n})$ normált tér

az érkezési tér: $(\mathbb{R}^m, \|.\|_{\mathbb{R}^m})$ —"—

A két téren bármilyen normát tekinthetünk, leggyakrabban $\|.\|_p$ normákat (p dimenziónként)

Mi főleg Euklideszi-metrikával fogunk dolgozni.

<u>Megj</u>: ekvivalens normákat tekintve „mindegy", hogy melyikkel számolunk.

<u>Def</u> $H \subset D \subset \mathbb{R}^n$, $\underline{a} \in H'$ (H torlódási pontja)

$f: D \to \mathbb{R}^m$ függvény <u>határértéke</u> $\underline{a}$-ban a H halmazra vonatkozólag (H-ra szorítkozva) $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$, ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, \delta > 0$, hogy $\forall\, \underline{x} \in H$, $0 < \|\underline{x} - \underline{a}\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ esetén

$\|f(\underline{x}) - \underline{b}\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$. <u>Jel</u>: $\lim\limits_{\substack{\underline{x} \to \underline{a} \\ \underline{x} \in H}} f(\underline{x}) = \underline{b}$

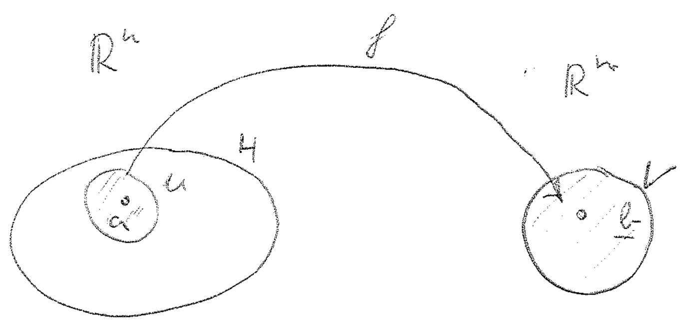
Megj. $H = D_f$ esetén a „H-ra szorítkozva"-t elhagyjuk:

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x}) = \underline{b}$$

Megj. (környezetes definíció)

$\lim_{\substack{\underline{x} \to \underline{a} \\ \underline{x} \in H}} f(\underline{x}) = \underline{b} \iff \underline{b}$ $\forall$ V környezetéhez $\exists$ $\underline{a}$-nak U környezete, hogy

$$f(\underline{x}) \in V \quad , \text{ha } \underline{x} \in H \cap \dot{U}$$



TÉTEL: $H \subset D \subset \mathbb{R}^n$, $\underline{a}$ H torlódási pontja, $\underline{b} = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$

$f : H \to \mathbb{R}^m$

$\lim_{\substack{\underline{x} \to \underline{a} \\ \underline{x} \in H}} f(\underline{x}) = \underline{b} \iff f$ függvény minden koordinátafüggvényére

$$\lim_{\substack{\underline{x} \to \underline{a} \\ \underline{x} \in H}} f_i(\underline{x}) = b_i \quad i = 1, \dots, n$$

Biz. egyszerűen következik a definícióból és, hogy

$\forall$ $\underline{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ esetén

$$\|\underline{y} - \underline{b}\|_{\mathbb{R}^m} \le |y_1 - b_1| + \dots + |y_m - b_m| \quad \text{és} \quad |y_i - b_i| \le \|\underline{y} - \underline{b}\|_{\mathbb{R}^m}$$

$$\forall i = 1, \dots, m \quad .!$$

215/

<u>Köv</u> ① <u>Átviteli elv</u>

$$\lim_{\substack{\underline{x}\to\underline{a}\\ \underline{x}\in H}} f(\underline{x}) = \underline{b} \iff \forall\ (\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H\setminus\{\underline{a}\}\text{, melyre}$$

$$\underline{x}_n \to \underline{a} \implies f(\underline{x}_n) \to \underline{b}$$

② <u>Határérték tulajdonságai</u>

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{\underline{x}\to\underline{a}\\ \underline{x}\in H}} f(\underline{x}) = \underline{b} \in \mathbb{R}^n \\ \\ \lim\limits_{\substack{\underline{x}\to\underline{a}\\ \underline{x}\in H}} g(\underline{x}) = \underline{c} \in \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \implies$$

- $\lim\limits_{\substack{\underline{x}\to\underline{a}\\ \underline{x}\in H}} (f(\underline{x}) + g(\underline{x})) = \underline{b} + \underline{c}$
- $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$

  $\lim\limits_{\substack{\underline{x}\to\underline{a}\\ \underline{x}\in H}} (\lambda\cdot f(\underline{x})) = \lambda\cdot\underline{b}$
- $\lim\limits_{\substack{\underline{x}\to\underline{a}\\ \underline{x}\in H}} \langle f(\underline{x}), g(\underline{x})\rangle = \langle\underline{b}, \underline{c}\rangle$

<u>Def</u> Legyen $\underline{a} \in H \subset D \subset \mathbb{R}^n$.

$f: D \to \mathbb{R}^m$ <u>folytonos</u> $\underline{a}$-ban H halmazra vonatkozóan, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ \delta > 0$, hogy $\forall\ \underline{x} \in H$, $\|\underline{x}-\underline{a}\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$ esetén

$\|f(\underline{x}) - f(\underline{a})\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$.

Ha $H = D_f \implies H$-ra vonatkozó kitételt elhagyjuk.

Köv: f folytonos $\underline{a}$-ban H-ra vonatkozva

$\Longleftrightarrow$ f $\forall$ koordinátafüggvénye folytonos $\underline{a}$-ban H-ra vonatkoztatva.

Megj: f pontosan akkor folytonos $\underline{a}$-ban H-ra vonatkozólag, ha

(i) $\underline{a}$ izolált pontja H-nak

vagy (ii) $\underline{a} \in H \cap H'$ és $\lim\limits_{\substack{\underline{x} \to \underline{a} \\ \underline{x} \in H}} f(\underline{x}) = f(\underline{a})$.

Hasonlóan az eddigiekhez bizonyíthatók a következő tételek:

① f és g folytonos $\underline{a}$-ban H-ra vonatkozólag, akkor $f+g$, $\lambda \cdot f$ $(\lambda \in \mathbb{R})$, $\langle f, g \rangle$ mind folytonos $\underline{a}$-ban H-ra vonatkozólag

② összetett függvény:

Tét (i) $H \subset \mathbb{R}^n$, $g: H \to \mathbb{R}^m$, $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{a}} g(\underline{x}) = \underline{c}$, $\underline{a} \in H'$

(ii) $g(H) \subset D \subset \mathbb{R}^m$, $f: D \to \mathbb{R}^k$, $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{c}} f(\underline{x}) = \underline{b}$

(iii) $g(\underline{x}) \neq \underline{c}$ az $\underline{a}$ egy pontozott környezetében vagy $\underline{c} \in D$ és f folytonos $\underline{c}$-ben a $g(H)$ halmazra vonatkozva

$\Longrightarrow$ $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{a}} f(g(\underline{x})) = \underline{b}$

!

221)

<u>Köv</u> g folytonos $\underline{a}$-ban H-ra vonatkozóan és f folytonos $g(\underline{a})$-ban $g(H)$-ra vonatkozóan, akkor $f \circ g$ is folytonos $\underline{a}$-ban H-ra nézve.

<u>Megj</u> Ha Weierstrass-tételt szeretnénk általánosítani $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvényekre, akkor nem beszélhetünk minimumról és maximumról, mert $\mathbb{R}^m$-ben $\nexists$ rendezés, de korlátosságról beszélhetünk.

<u>TÉTEL</u> $H \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f: H \to \mathbb{R}^m$ folytonos
$\Longrightarrow f(H)$ kompakt $\mathbb{R}^m$-ben.

<u>Biz.</u> Weierstrass-tétel f koordinátafüggvényeire $\Longrightarrow f(H)$ korlátos ✓

<u>Zártság</u>

tfh $(\underline{y}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset f(H)$, melyre $\underline{y}_n \to \underline{b}$

Válasszunk olyan $(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ pontokat, melyre $f(\underline{x}_n) = \underline{y}_n$

$(\underline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos, mert H része $\xRightarrow{\text{Bolzano-W.}} \exists\ (\underline{x}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergens részsorozata

Ha $\underline{x}_{n_k} \to \underline{a} \Longrightarrow \underline{a} \in H$, mert H zárt

f folytonos $\Longrightarrow \underline{b} = \lim_{k\to\infty} \underline{y}_{n_k} = \lim_{k\to\infty} f(\underline{x}_{n_k}) = f(\underline{a})$

$\Longrightarrow \underline{b} \in f(H)$, tehát $f(H)$ zárt.

222)

Def: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ injektív (egy-egy értelmű), ha

$$\forall\, \underline{x}, \underline{y} \in D_f,\ \underline{x} \neq \underline{y} \implies f(\underline{x}) \neq f(\underline{y})$$

TÉTEL: $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos

Ha f injektív D-n, akkor f^{-1} inverz folytonos $f(D)$-n.

Biz: t/h $\underline{y}_n \in f(H)$ és $\underline{y}_n \to \underline{b}$.

$\implies \underline{b} \in f(H)$, vagyis $\underline{b} = f(\underline{a})$ alkalmas $\underline{a} \in H$-ra

$\underline{x}_n := f^{-1}(\underline{y}_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

be kell látni, hogy $\underline{x}_n \to f^{-1}(\underline{b}) = \underline{a}$ f^{-1} folytonosságához

indirekt: t/h ez nem áll fenn

Ekkor $\exists\ \varepsilon > 0$, hogy $\underline{x}_n \notin B(\underline{a}, \varepsilon)$, vagyis $\|\underline{x}_n - \underline{a}\|_{\mathbb{R}^n} \geq \varepsilon$ végtelen sok n-re

Hagyjuk el a sorozat többi tagját: $\|\underline{x}_n - \underline{a}\|_{\mathbb{R}^n} \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$(\underline{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ korlátos (része H-nak) $\overset{B-W}{\implies} \exists\ (\underline{x}_{n_k})$ konvergens részsorozat

$\underline{x}_{n_k} \to \underline{c}$

$\hookrightarrow \underline{c} \in H$, mert H zárt és $\underline{c} \neq \underline{a}$, mert

$$\|\underline{c} - \underline{a}\|_{\mathbb{R}^n} = \lim_{k \to \infty} \|\underline{x}_{n_k} - \underline{a}\| \geq \varepsilon$$

f folytonossága $\implies$ $f(\underline{c}) = \lim_{k \to \infty} f(\underline{x}_{n_k}) = \lim_{k \to \infty} \underline{y}_{n_k} = \underline{b} = f(\underline{a})$

$\lightning$ mert f injektív

223/

Megj. (1) H korlátossága nem elhagyható:

zárt halmazon folytonos és injektív függvény inverze nem szükségképpen folytonos.

pl. $n=m=1$, $D:=\mathbb{N}$, $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x=0 \\ \frac{1}{n}, & \text{ha } x=n \end{cases}$$

$\Rightarrow$
- D zárt, mert D-ben minden konvergens sorozat valahonnan kezdve konstans
- f folytonos D-n, mert D minden pontja izolált
- f injektív

De f^{-1} nem folytonos:

$$0 = f^{-1}(0) \neq \lim_{n\to\infty} f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

(2) A zártság szintén nem elhagyható

(3) f egyenletes $\overset{\text{folyt.}}{}$ $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazon, ha $\forall \varepsilon > 0$-hoz

$\exists\, \delta > 0$ függetlenül a helytől, hogy ha $\underline{x}, \underline{y} \in H$,

$\|\underline{x}-\underline{y}\|_{\mathbb{R}^n} < \delta \Rightarrow \|f(\underline{x}) - f(\underline{y})\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$.

Heine-tétel itt is igaz:

kompakt halmazon folytonos függvény egyenletesen is folytonos.

224/

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvények differenciálhatósága

Def. $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény lineáris leképezés, ha

$\forall\ \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$-re $\quad A(\underline{x}+\underline{y}) = A(\underline{x}) + A(\underline{y})$ és

$\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$-re $\quad A(\lambda \underline{x}) = \lambda A(\underline{x})$

Megj. $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris $\Longleftrightarrow$ minden koordináta függvénye lineáris függvény, vagyis

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A(\underline{x}) = \begin{pmatrix} A_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ A_m(\underline{x}) \end{pmatrix} \quad \text{esetén}$$

$$A_i(\underline{x}) = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \qquad \forall\, i = 1, \ldots, m$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) \quad \text{az } A \text{ leképezés mátrixa, mellyel}$$

$$A(\underline{x}) = \underline{\underline{A}}\, \underline{x}$$

225/

Def $D \subset \mathbb{R}^n$, $\underline{a} \in \operatorname{int} D$, $f: D \to \mathbb{R}^m$ <u>differenciálható</u> az $\underline{a}$ pontban, ha ott lineárisan közelíthető, azaz $\exists$ $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, melyre

$$f(\underline{x}) = f(\underline{a}) + A(\underline{x}-\underline{a}) + \varepsilon(\underline{x}) \cdot \|\underline{x}-\underline{a}\|_{\mathbb{R}^n} \quad \forall \underline{x} \in D\text{-re},$$

ahol $\varepsilon: D \to \mathbb{R}^m$, melyre $\varepsilon(\underline{x}) \to \underline{0}$, ha $\underline{x} \to \underline{a}$.

Ekvivalens módon:

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} \frac{\| f(\underline{x}) - f(\underline{a}) - A(\underline{x}-\underline{a})\|_{\mathbb{R}^m}}{\|\underline{x}-\underline{a}\|_{\mathbb{R}^n}} = 0 .$$

Ekkor $A = f'(\underline{a})$ f deriváltja $\underline{a}$-ban.

Def $df(\underline{a}, \underline{x}-\underline{a}) := f'(\underline{a})(\underline{x}-\underline{a})$ f $\underline{a}$-beli <u>első differenciálja</u> $\underline{x}-\underline{a}$-ban

Megj $f: \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{D}} \to \mathbb{R}^m$ diffható $\underline{a} \in \operatorname{int} D$-ben

$\iff$ $f(\underline{x}) - f(\underline{a}) = A(\underline{x}-\underline{a}) + \omega(\underline{x})$, ahol

$\omega: D \to \mathbb{R}^m$, melyre

$$\lim_{\underline{x}\to\underline{a}} \underbrace{\frac{\omega(\underline{x})}{\|\underline{x}-\underline{a}\|_{\mathbb{R}^n}}}_{\varepsilon(\underline{x})} = 0$$

TÉTEL: $D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}^m$ diff.ható $\underline{a} \in \operatorname{int} D$-ben

$\iff$ f mindegyik f_i koordinátafüggvénye diff.ható $\underline{a}$-ban.

Ekkor

$$(\underline{A})_{ij} = a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\underline{a}) = \partial_j f_i(\underline{a}) \quad \forall\, i = 1,\dots,m \quad j = 1,\dots,n.$$

Biz: Tfh f diff.ható $\underline{a}$-ban, azaz

$$f(\underline{x}) = f(\underline{a}) + A(\underline{x}-\underline{a}) + \varepsilon(\underline{x})\|\underline{x}-\underline{a}\|_{\mathbb{R}^n}, \quad \varepsilon(\underline{x}) \to \underline{0} \text{ ha } \underline{x} \to \underline{a}$$

két vektor egyenlő $\iff$ komponensei egyenlők

$$f_i(\underline{x}) = f_i(\underline{a}) + A_i(\underline{x}-\underline{a}) + \varepsilon_i(\underline{x}) \cdot \|\underline{x}-\underline{a}\|_{\mathbb{R}^n} \quad \forall\, \underline{x} \in D \quad i = 1,\dots,m$$

A_i lineáris és $\varepsilon_i(\underline{x}) \to 0$, ha $\underline{x} \to \underline{a}$

$$\left(|\varepsilon_i(\underline{x})| \le \|\varepsilon(\underline{x})\| \quad \forall\, \underline{x} \in D \right)$$

$\Downarrow$

f_i diff.ható $\underline{a}$-ban $\quad (f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$

$\Downarrow$

$$\operatorname{grad} f_i(\underline{a}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\underline{a}), \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(\underline{a}), \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(\underline{a}) \right)$$

$\Downarrow$

A_i j-edik együtthatója $= \partial_j f_i(\underline{a})$ ✓

$$\Rightarrow \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\underline{a}) & \partial_2 f_1(\underline{a}) & \dots & \partial_n f_1(\underline{a}) \\ \vdots & & & \\ \partial_1 f_m(\underline{a}) & \partial_2 f_m(\underline{a}) & \dots & \partial_n f_m(\underline{a}) \end{pmatrix}$$

227/

Tth f mindegyik f_i koordinátafüggvénye deriválható $\underline{a}$-ban

$$\Updownarrow$$

$$f_i(\underline{x}) = f_i(\underline{a}) + A_i(\underline{x}-\underline{a}) + \omega_i(\underline{x}), \text{ ahol}$$

$$A_i(\underline{x}) = \partial_1 f_i(\underline{a})x_1 + \partial_2 f_i(\underline{a})x_2 + \dots + \partial_n f_i(\underline{a})x_n$$

és $\varepsilon_i(\underline{x}) \to 0$, ha $\underline{x} \to \underline{a}$

$$A(\underline{x}) := (A_1(\underline{x}), \dots, A_m(\underline{x})) \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n\text{-re}$$

$$\omega(\underline{x}) := (\omega_1(\underline{x}), \dots, \omega_m(\underline{x})) \quad \forall \underline{x} \in D_f\text{-re}$$

$\Rightarrow$ $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris és $\omega(\underline{x}) \to \underline{0}$, ha $\underline{x} \to \underline{a}$.

ezzel:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{a}) + A(\underline{x}-\underline{a}) + \omega(\underline{x}-\underline{a}), \text{ ahol } \omega(\underline{x}-\underline{a}) \to \underline{0}$$

ha $\underline{x} \to \underline{a}$,

azaz f diffható $\underline{a}$-ban

!

Köv Ha f diffható $\underline{a}$-ban, akkor A lineáris leképezés egyértelmű.

228/

<u>Def</u>: $D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}^m$, tfh f diff.ható $\underline{a} \in \text{int}\, D$-ben.

Ekkor $f'(\underline{a}) = A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ~~lineáris~~ derivált mátrix

$$Df(\underline{a}) \equiv \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\underline{a}) \ldots & \partial_n f_1(\underline{a}) \\ \vdots & \\ \partial_1 f_m(\underline{a}) \ldots & \partial_n f_m(\underline{a}) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$$

f $\underline{a}$-beli <u>Jacobi-mátrix</u> (derivált mátrix)

n-változós függvények deriválhatóságát tételekből azonnal adódik:

<u>TÉTEL</u>: (i) Ha f diff.ható $\underline{a}$-ban, akkor folytonos is $\underline{a}$-ban, és f mindegyik koordinátafüggvényének mindegyik változó szerinti parciális deriváltja $\exists$ és véges $\underline{a}$-ban.

(ii) Ha f mindegyik koordinátafüggvényének mindegyik változó szerinti parciális deriváltja $\exists$ és véges $\underline{a}$ pont egy környezetében és folytonos $\underline{a}$-ban, akkor f diff.ható $\underline{a}$-ban.

$\circ$!

<u>Példa</u>: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)^T$

$\hookrightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \partial_1 f_1(x,y) = e^x \cos y, \; \partial_2 f_1(x,y) = -e^x \sin y \\ \partial_1 f_2(x,y) = e^x \sin y, \; \partial_2 f_2(x,y) = e^x \cos y \end{array}\right\}$ folytonosak

$\Rightarrow$ $\underline{a} = (a,b)$-beli Jacobi-mátrix:

$$Df(a,b) = \begin{pmatrix} e^a \cos b & -e^a \sin b \\ e^a \sin b & e^a \cos b \end{pmatrix} \equiv \underline{\underline{A}}.$$

225/

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \begin{pmatrix} e^a \cos b & -e^a \sin b \\ e^a \sin b & e^a \cos b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^a \cos b \cdot x - e^a \sin b \cdot y \\ e^a \sin b\, x \quad e^a \cos b\, y \end{pmatrix}$$

kiegyj az A lineáris leképezés:

$$A(x,y) = \left(e^a (\cos b) x - e^a (\sin b) y \,,\, e^a \sin b \cdot x + e^a \cos b\, y \right)$$

Példa: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x^2 - y, x + 2y, y^2)$

$\hookrightarrow f_1(x,y) = x^2 - y$, $f_2(x,y) = x + 2y$, $f_3(x,y) = y^2$

$$\Rightarrow \quad Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

Megj láttuk: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diff.ható $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$-ben, akkor

$$Df(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(\underline{x}) \dots \partial_n f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ \partial_1 f_m(\underline{x}) \dots \partial_n f_m(x) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$$

Spec. $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diff.ható $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, $f(\underline{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$

$$Df(\underline{x}) = (\partial_1 f(\underline{x}), \partial_2 f(\underline{x}), \dots, \partial_n f(\underline{x})) \in \mathbb{R}^n$$
$$= \operatorname{grad} f(\underline{x})$$

230/

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ (térgörbék)

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)) \in \mathbb{R}^m$$

$$\hookrightarrow \quad Df(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ \vdots \\ f_m'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad \text{oszlopvektor}$$

<u>Def</u> $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ <u>folytonosan differenciálható</u> $\underline{a} \in D_f$-ben, ha

- $\exists$ olyan $B(\underline{a}, r) \subset D_f$ környezet, hogy $\forall \underline{x} \in B(\underline{a}, r)$ esetén f diffható $\underline{x}$-ben
- valamennyi $\partial_j f_i$ parciális derivált ($j = 1..n$, $i = 1..m$) folytonos $\underline{a}$-ban.

<u>Jel.</u> $f \in C^1(\underline{a})$

Ha f $\forall$ $\underline{a} \in D_f$-ben folytonosan diffható, akkor $f \in C^1$.

<u>Megj</u>

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\quad f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \dots, f_m(\underline{x})) \in \mathbb{R}^m$

$$\Rightarrow \quad Df(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(\underline{x}) \end{pmatrix}$$