

Függvényok konvergenciája

Def. $f_n: H \rightarrow \mathbb{R}$ $n \in \mathbb{N}$ függvényok

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^n f_k(x) \quad \text{n-dik részletösszeg}$$

• $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvény pontról pontig konvergens H -n és az

összegfüggvénye $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, ha $S_n(x) \rightarrow f(x) \quad \forall x \in H$

• $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ egyenletesen konvergens H -n és az

összegfüggvénye $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, ha $S_n \Rightarrow f \quad H$ -n.

jel mindkettőre: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$

Példák

① $a \in [0, 1)$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ egyenletesen konvergens $[-a, a]$ -n,

$$S_n(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x} = f(x)$$

$$\sup_{x \in [-a, a]} |S_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [-a, a]} \left| \frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| = \sup_{x \in [-a, a]} \frac{|x|^n}{1-x} \leq$$

$$\leq \frac{a^n}{1-a} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \Rightarrow \quad S_n \Rightarrow f$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad x \in [-a, a], a \in [0, 1)}$$

egyenletesen

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ nem egyenletesen konvergens $(-1, 1)$ -n:

$S_n(x)$ polinom $(-1, 1)$ -n (polinom), de $\frac{1}{1-x}$ nem polinom $(-1, 1)$ -n

$\Rightarrow |S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ nem teljesülhet $\forall \varepsilon > 0$ -n.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln x}{(x+n)(x+n+1)}$ $x > 0$ konvergens-e?

$$\frac{1}{(x+k)(x+k+1)} = \frac{A}{x+k} + \frac{B}{x+k+1} = \frac{A(x+k+1) + B(x+k)}{(x+k)(x+k+1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ A(k+1)+Bk=1 \end{cases} \leadsto \begin{cases} B=-A \\ A(k+1)-Ak=1 \Rightarrow A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow S_n(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{\ln x}{(x+k)(x+k+1)} = \ln x \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{x+k+1} \right) = \\ &= \ln x \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} + \dots + \frac{1}{x+n} - \frac{1}{x+n+1} \right) = \\ &= \ln x \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1} \right) \quad (\text{teleszkóp}) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \boxed{S(x) = \frac{\ln x}{x+1}} \end{aligned}$$

521)

Egyenletes-e a konvergencia $(0, \infty)$ -en?

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |S(x) - S_n(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \left| \frac{\ln x}{x+1} - \ln x \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+n+1} \right) \right| =$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{|\ln x|}{x+n+1} = +\infty$$

↑

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|\ln x|}{x+n+1} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x+n+1} = +\infty$$

$\begin{matrix} \nearrow -\infty \\ \downarrow n+1 \end{matrix}$

$\Rightarrow$ nem egyenletes a konvergencia

Megj: $\sum_n f_n(x)$ egyenletesen konv. H-n $\Rightarrow \sum_n f_n(x)$ pontként konv. H-n.

Eml: $\sum_n a_n$ numerikus 'ábszolút konvergencia' $\Leftrightarrow \sum_n a_n$ abszolút konvergens
 $(\sum_n |a_n| \text{ konvergens})$

⇓

Def: $\sum_n f_n(x)$ abszolút konvergens H-n, ha $\sum_n |f_n(x)|$ pontként konvergens H-n.

⇓

$\sum_n f_n(x)$ H ábszolút konvergens $\Rightarrow$ abszolút konvergens egyenlősséggel a határérték-nél.

Megj: abszolút konvergencia az az egyenletes konvergencia szigorú tulajdonsága.

522/
TÉTEL (Cauchy-kritérium)

$\sum_n f_n$ egyenletesen konvergens H -n $\Leftrightarrow S_n(x)$ Cauchy-konvergens H -n, azaz

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} :$$

$$|S_n(x) - S_m(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^m f_i(x) \right| < \varepsilon$$

$$\forall x \in H, N < n < m - n.$$

Biz. függvényrendszer konvergens Cauchy-kritériumát teljesíti! $\circ \circ$

TÉTEL: $\sum_n |f_n|$ egyenletesen konv. H -n $\Rightarrow \sum_n f_n$ is egyenletesen konv. H -n.

Sőt, minden ábrakészítés is egy konv. H -n.

Biz. Lebesgue-T.S's.

TÉTEL (Weierstrass-kritérium, M-test)

$K_n \ni (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valódi négyzetes, melyre $\sum_n a_n$ konvergens az

$$|f_n(x)| \leq a_n \text{ m.m. } H\text{-n, } \forall x \in H$$

$\Rightarrow \sum_n f_n(x)$ egyenletesen és abszolút is konvergens H -n.

$\forall \varepsilon > 0$ - her $\exists N \in \mathbb{N}$:

$$d_m(S_m, S_n) = \sup_{x \in H} |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_n(x)| \leq$$

$m > n$

$$\leq \sup_{x \in H} (|f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \dots + |f_n(x)|) \leq$$

$$\leq \sup_{x \in H} |f_{n+1}(x)| + \sup_{x \in H} |f_{n+2}(x)| + \dots + \sup_{x \in H} |f_n(x)| \leq$$

$$\leq a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_n < \varepsilon$$

bc $m > n > N$, weil $\sum a_n$ konvergenz, ist
 beliebig eine numerische Reihe von Funktionen
 Cauchy-Kriterium

$\Downarrow$

$(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Kriterium $\forall x \in H$

$\Downarrow$ Cauchy-Kriterium

$S_n \Rightarrow f$ H-n

0
 0 0

525)

Pöbelch.

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\sin(n^3 x + \pi)}{n^2 + 1}}_{f_n(x)}$$

zugelassen bzw. $\mathbb{R}$ -en:

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2 + 1} < \frac{1}{n^2} =: a_n \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \sum_n a_n = \sum_n \frac{1}{n^2} \text{ bzw.}$$

✓

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n e^{-n(|x|+1)}}_{f_n(x)}$$

zugelassen bzw. $\mathbb{R}$ -en:

$$|f_n(x)| = f_n(x) = \frac{n}{e^{n(|x|+1)}} < \frac{n}{e^n} =: a_n$$

$$\sum_n a_n = \sum_n \frac{n}{e^n}$$

größtentum: $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{e} \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \sum_n a_n \text{ bzw}$

!

THEOREM $x_0 \neq 0$ & $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ konvergenz $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolut
 & gleichmäßig konvergenz
 $[-q|x_0|, q|x_0|] - u$, also
 $0 < q < 1$.

Bew. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ konv. $\Rightarrow a_n x_0^n \rightarrow 0$ (nützlich!)

also $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, dass $|a_n x_0^n| \leq 1$
 $\forall n \geq n_0$

Da $x \in [-q|x_0|, q|x_0|] \Rightarrow |a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq 1 \cdot q^n$
 für $n \geq n_0$

$0 < q < 1$ also $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ konvergenz $\Rightarrow$ Weierstrass-Kriterium

!

THEOREM: $f_n \in C[a, b]$ & $\sum_n f_n = f$ gleichmäßig $[a, b] - u$
 $\Rightarrow f \in C[a, b]$

(Folgt aus p.-ch. gleichmäßig konvergenz von Folgen.)

Bew.

$f_n \in C[a, b] \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n f_k \in C[a, b]$ & $S_n \Rightarrow f$ $[a, b] - u$

+ fortwährende wachsende Teil $\Rightarrow$

!

Regg ha $x_0 \in [a, b]$ a tétel miatt.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)}_{\text{tétel}} = f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)}$$

$\Rightarrow$ vagyis $\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_n f_n(x)$ egyenletét egyenlő hármasra írhatjuk!

Példa:

$\sum_{k=1}^{\infty} (x^k - x^{k-1})$ egyenletét konvergencia a konvergencia vizsgálata?

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n (x^k - x^{k-1}) = x^1 - x^0 + x^2 - x^1 + \dots + x^n - x^{n-1} = x^n - 1$$

(tétel alapján)

$$S(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^n - 1) = \begin{cases} -1, & \text{ha } |x| < 1 \\ 0, & \text{ha } x = 1 \\ \neq & \text{más esetben} \end{cases}$$

$\Downarrow$

$$KT = [-1, 1]$$

KT-n a konvergencia nem lehet egyenlő, mert $f_k(x) = x^k - x^{k-1}$

pf-ban KT-n $\forall k \in \mathbb{N}$ -re, de $S(x)$ nem pf-ban $(-1, 1)$ -n

TETEL

deggen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bekötzen konvergenzrängen

$0 < R \leq \infty$, Ekher $\forall 0 < r < R$ setin

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ egerleken konvergenz $[-r, r]$ -n.

Bir

$x \in [-r, r]$ setin $|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$

derel $0 < r < R \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ konvergenz e'

magerle $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kon

$\parallel$ Weierstrass - test

• !

Pödle

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right)^2$. Ruknah meg, kög f p'lykes $\mathbb{R}$ -en!

A töl mit el megmetetn, kög egerleken konvergenz a kon $\mathbb{R}$ -en

deggen $t \in \mathbb{R}^+$ töl $M_n := \left(\frac{t^n}{n!} \right)^2 \quad n \geq 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{n+1}}{M_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \right)^2 \cdot \left(\frac{n!}{t^n} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{n+1} \right)^2 = 0 < 1$$

(hegyadoskritérium) $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} M_n$ konvergenz

e' $\forall x \in [-t, t]$ setin $\sum_n M_n$ magerle $\sum_n \left(\frac{x^n}{n!} \right)^2$ kon

$\Rightarrow$ a Weierstrass - kritérium mit a kon egerleken kon $[-t, t]$ -n
+ $t \in \mathbb{R}^+$ töl • !

Egyesletem konvergencia függvények tulajdonságai

TÉTEL (tagonként integrálhatóság)

T/ha $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ egyesletem konvergencia $[a, b]$ -n.

Ha f_n integrálható $[a, b]$ -n $\forall n$ -re, akkor

f is integrálható $[a, b]$ -n és

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx,$$

azaz $\int_a^b$ és $\sum_n$ felcserélhető.

Biz

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b S_n(x) dx =$$

to monotone
converging theorem

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n f_k(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx$$

veges összeg
mindenteg integrálható
az integrálható
(lineáris)

Pellich

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\sin(n^3 x^2 + \frac{\pi}{2})}{5^n + n^2 x^4}}_{f_n(x)} = ?$$

$$|f_n(x)| = \frac{|\sin(n^3 x^2 + \frac{\pi}{2})|}{5^n + n^2 x^4} \leq \frac{1}{5^n} =: a_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergenz (geometrisch)}$$

+ Weierstrass-Kriterium

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ gleichmäßig konv. } \mathbb{R} \text{-en} \xRightarrow{\text{absolut}} \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ gleichmäßig}$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n^3 x^2 + \frac{\pi}{2})}{5^n + n^2 x^4} &= \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(n^3 x^2 + \frac{\pi}{2})}{5^n + n^2 x^4} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$\uparrow$
positiv

$$(2) \text{ ditteich: } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \text{ für } |x| < 1 \text{ als 'Konvergenz'}$$

explizit $(-1, 1)$ + Zeit rechnerisch

$\mu \quad 0 \leq x < 1$

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \left[-\ln(1-t) \right]_0^x =$$

$$= -\ln(1-x) \underset{\text{p}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$[0, x]$ -n egyenlős
low + TETEL

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

heroldson $-1 < x \leq 0$ -ra is lehetne

$$\Rightarrow \boxed{\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1}$$

$$(3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{ha } |x| < 1$$

egyenlős a konvergencia $(-1, 1)$ -t feltételezzük

t/h $|x| < 1$

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \left[\arctan t \right]_0^x = \arctan x =$$

$$\underset{\text{p}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^x =$$

egy low
 $[0, x]$ -n
+ TETEL

531/

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

konvergenz $-1 < x \leq 0$ - nur (HF)

$$\Rightarrow \left| \text{antf}_x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad , |x| < 1 \right.$$

(4) Adjunk meg az

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots \quad \text{momentan soz onget}$$

(Konvergenz, mert Leibniz-nel)

ke $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots$$

egyenletet lesz $(-1,1)$ $\forall$ xmitenallunk

||

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^3} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{3n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{3n} dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1} = x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \dots \quad \forall x \in (-1,1)$$

534/

$\lim_{x \rightarrow 1-0}$ d. Σ Potenzreihe

$\Downarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \left(x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \dots \right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^3} dt = \frac{1}{3} \left[\ln \frac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}} + \sqrt{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) \right]$$

parabolische
Wurzel (HF)

$\Downarrow$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{3} \left[\dots \right] = \frac{1}{3} \left(\ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right)$$

=====

TEEL (Leibniz's rule)

gegeben f_n differenzierbar $[a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Th i) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = g(x)$ gegeben bzw $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

ii) $\exists x_0 \in [a, b], \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konvergenz

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ gegeben bzw $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$
 $\forall x \in [a, b]$

also f diffbar d.h. $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in [a, b]$

Regel

$\hookrightarrow \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \quad \forall x \in [a, b]$

Bem a Funktion f heißt diffbar wenn es eine Funktion g gibt, so dass:

$$\left. \begin{array}{l} f_n' \rightarrow g \\ f_n \rightarrow f \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ diffbar d.h. } f' = g$$

Beispiel

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = ?$

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ gegeben bzw $(-1, 1) \quad \forall x$ absolut konvergenz

$\Downarrow$

$x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ mit i) über

534)

$$\hookrightarrow \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \right)' = \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} =$$

TETEL

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (x^{n+1})' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad |x| < 1$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2} \quad , \quad |x| < 1}$$

② $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 3^n x^n = ?$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n = \frac{1}{1-3x} \quad , \quad |3x| < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{3}$$

ergibt sich bei $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ + Zeit rechnerisch

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} [(3x)^n]' = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (3x)^{n-1} \cdot 3 = \left(\frac{1}{1-3x} \right)' = \frac{3}{(1-3x)^2}$$

$$\hookrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n(3x)^n = \frac{3x}{(1-3x)^2} \quad \text{ergibt sich bei } n < T \text{ rechnerisch}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} n(3x)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (n(3x)^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} 3n^2(3x)^{n-1} = \left(\frac{3x}{(1-3x)^2} \right)' =$$

$$= \frac{3(1-3x)^2 - 3x \cdot 2(1-3x) \cdot (-3)}{(1-3x)^4} = \frac{9x+3}{(1-3x)^2}$$

$$\hookrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (3x)^n = \frac{3x(3x+1)}{(1-3x)^2}$$

Beispiel (mindestens polynom, noch um diff'bare f'gungen
Weierstrass 1861.)

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{2^{-k} \cos(10^k \pi x)}_{f_k(x)}$$

$$|f_k(x)| \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 \quad + \text{ Weierstrass - titel}$$

$$\Rightarrow \sum_k f_k(x) \text{ gleichförmig bzw. } \mathbb{R}\text{-en} \Rightarrow f \text{ polynom} \checkmark$$

$$! \quad x \in \mathbb{R} \text{ betr.: } x = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$$

Kegelmäßigkeit, dass x -en f um diff'bar:

$$\exists z_n \rightarrow x \text{ so dass } \left| \frac{f(z_n) - f(x)}{z_n - x} \right| \rightarrow \infty$$

$$! \quad n \geq 1 \quad \text{fix} \quad \leadsto \quad \left. \begin{array}{l} y_0 := x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \\ y_1 := y_0 + 10^{-n} \end{array} \right\} \Rightarrow y_0 \leq x \leq y_1$$

meg szeretnénk látni $|f(y_0) - f(y_1)| = ?$

$$10^n \pi y_0 \stackrel{!}{=} 10^n \pi y_1 \quad \pi \text{ egész többszöröse}$$

$$\cos(k\pi) = (-1)^k$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} f_n(y_0) = (-1)^{x_n} 2^{-n} \\ f_n(y_1) = (-1)^{x_n+1} 2^{-n} \end{cases} \Rightarrow |f_n(y_0) - f_n(y_1)| = 2^{1-n}$$

• ha $k > n \leadsto 10^k y_i \pi \quad (i=1,2) \text{ egész többszöröse } 2\pi\text{-nek}$

$$\hookrightarrow f_k(y_0) = f_k(y_1) = 2^{-k}$$

• $1 \leq k < n$ esetén

$$|f_k(y_0) - f_k(y_1)| = \left| \int_{y_0}^{y_1} f'_k(t) dt \right| \leq \int_{y_0}^{y_1} |f'_k(t)| dt \leq$$

$$\leq \left(\sup_{t \in [y_0, y_1]} |f'_k(t)| \right) \cdot \underbrace{|y_0 - y_1|}_{y_1 - y_0 = 10^{-n}} = 2^{-k} \cdot 10^k \pi \cdot 10^{-n} = 2^{-n} \pi 5^{k-n}$$

$\uparrow$

$$f'_k(t) = -2^{-k} \sin(10^k \pi x) \cdot 10^k \pi$$

537

$$|f(y_0) - f(y_1)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} (f_k(y_0) - f_k(y_1)) \right| = |f_n(y_0) - f_n(y_1)| + \sum_{k \neq n} (f_k(y_0) - f_k(y_1))$$

$$\geq |f_n(y_0) - f_n(y_1)| - \sum_{k \neq n} |f_k(y_0) - f_k(y_1)| \geq$$

↑

$$\bullet k > n \leadsto |f_k(y_0) - f_k(y_1)| = 0$$

$$\bullet 1 \leq k < n \leadsto |f_k(y_0) - f_k(y_1)| <$$

$$< 2^{-n} \pi 5^{k-n}$$

$$\geq 2^{1-n} - \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-n} \pi 5^{k-n} > 2^{-n} \left(2 - \frac{\pi}{5} \right) > 2^{-n}$$

$$\hookrightarrow |f(y_0) - f(x)| + |f(x) - f(y_1)| \geq |f(y_0) - f(y_1)| > 2^{-n}$$

$$\Rightarrow \text{Volumen ist n\u00e4her, mit } \frac{2^{-n}}{2} \quad i=0 \text{ u } 1 \text{ setzen}$$

⌊

$$|f(y_i) - f(x)| > 2^{-n-1}$$

Legen $z_n = y_i$ (wobei $|f(y_i) - f(x)| > 2^{-n-1}$)

$$\hookrightarrow |z_n - x| \leq |y_1 - y_0| = 10^{-n}$$

↑

$$y_0 \leq x \leq y_1$$

538 /

$$\Rightarrow \left| \frac{f(z_n) - f(x)}{z_n - x} \right| \geq \frac{2^{-n-1}}{10^{-n}} = \frac{5^n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

↳ f nicht diffbar! x-ben

0.