454

Függvénysorozatok konvergenciája

Def.: H tetszőleges halmaz

$f_n : H \to \mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat

pontonként konvergál $f : H \to \mathbb{R}$ függvényhez, ha

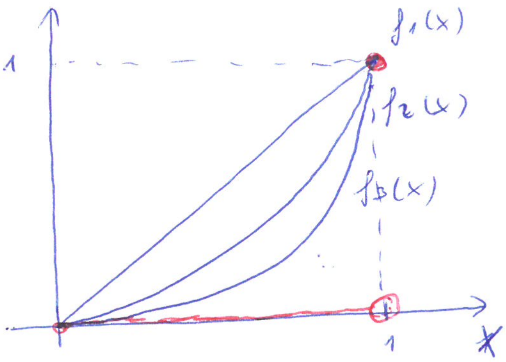
$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ $\forall\, x \in H$-ra. (mint numerikus sorozat)

Jel.: $f_n \to f$

Példák

(1) $H = [0,1] \subset \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$ $n \in \mathbb{N}$

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ ha } x \in [0,1) \\ 1 & , \text{ ha } x = 1 \end{cases}$$



$f_n \in C[0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$

de $f \notin C[0,1]$!

(2) $H = \mathbb{R}$, $f_n(x) := \dfrac{x^2+n}{2x^2+3n} = \dfrac{\frac{x^2}{n}+1}{\frac{2x^2}{n}+3} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{3} = f(x)$

$f_n \in C(\mathbb{R})$, $f \in C(\mathbb{R})$

455/

(3.) $H=\mathbb{R}$, $f_n(x) := \operatorname{arctg} nx \to f(x) = \begin{cases} -\pi/2 & , x<0 \\ 0 & , x=0 \\ \frac{\pi}{2} & , x>0 \end{cases}$

$f_n \in C(\mathbb{R})$, de $f \notin C(\mathbb{R})$

Látjuk: folytonos függvények sorozatának pontonkénti limesze nem feltétlenül folytonos!

Hol romlik el a dolog?

pl (1): $f_n(x) = x^n$, $a := 1$, $\varepsilon := \frac{1}{2}$

$$|f_n(x) - f_n(a)| = |x^n - 1| < \frac{1}{2} \iff x > \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$

Vagyis, ha $x < 1$ rögzített

$\Downarrow$

$$|f(x) - f_n(x)| = |0 - x^n| < \frac{1}{2} \iff x < \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$

$\Downarrow$

az ilyen x-ekre

$|f_n(x) - f_n(a)| \geq \frac{1}{2}$

$\Downarrow$

496)

<u>Def.</u> $f_n: H \to \mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ függvénysorozat <u>egyenletesen konvergál</u> $f: H \to \mathbb{R}$ függvényhez, ha

$\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ha $x \in H$ és $n > n_0$.

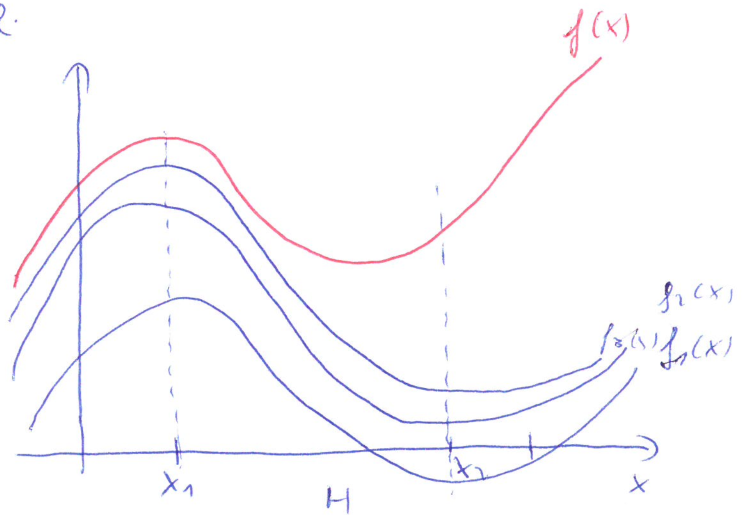
<u>jel.</u> $f_n \rightrightarrows f$ H-n.

<u>Megj:</u> Mi a fő különbség a pontonkénti és az egyenletes konvergencia között?

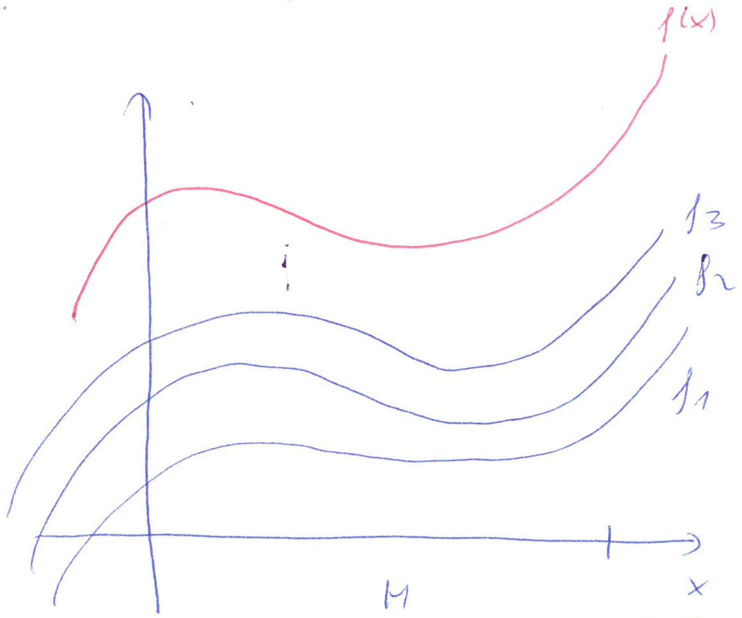
- $f_n \to f$ H-n, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$, hogy
  függ x-től
  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ha $x \in H$ és $n > n_0$.

- $f_n \rightrightarrows f$ H-n, ha $\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy
  nem függ x-től
  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ha $x \in H$ és $n > n_0$.

pl.



$f_n \to f$ $\quad n_0(\varepsilon, x_1) < n_0(\varepsilon, x_2)$



$f_n \rightrightarrows f$ közös (x-től független) küszöbindex

457)

Példák

(1) áll. $f_n(x) = \dfrac{2x^3n^2}{x^2n^2+5}$ egyenletesen konvergál $(2,5)$-n

$$\frac{2x^3n^2}{x^2n^2+5} = \frac{2x^3}{x^2+\frac{5}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2x^3}{x^2} = 2x =: f(x)$$

határfüggvény

$$|f_n(x)-f(x)| = \left|\frac{2x^3n^2}{x^2n^2+5} - 2x\right| = \left|\frac{2x^3n^2-2x^3n^2-10x}{x^2n^2+5}\right| =$$

$$= \left|\frac{-10x}{x^2n^2+5}\right| \underset{x\in(2,5)}{=} \frac{10x}{x^2n^2+5} \underset{x\in(2,5)}{\le} \frac{10\cdot 5}{2^2\cdot n^2+5} = \frac{50}{4n^2+5} <$$

$$< \frac{50}{4n^2} < \varepsilon \quad \rightsquigarrow \quad n > \sqrt{\frac{50}{\varepsilon}}$$

$$\Downarrow$$

$$n_0 := \left[\sqrt{\frac{50}{\varepsilon}}\right]$$ x-től független küszöbindex adható $(2,5)$-n

$$\Rightarrow \quad f_n \rightrightarrows f \quad (2,5)\text{-n}$$

198/

(2) ~~Konv~~ Hova konvergál és hogyan $f_n(x) = x^n$

a) $(0,c]$-n , $0<c<1$ konstans

b) $(0,1)$-n ?

a) $f_n(x) \to 0 \quad \forall\, x \in (0,1) \quad \rightsquigarrow f(x)=0$ határfv.

$(0,c]$-n: $\quad |f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n \underset{\substack{\uparrow \\ 0<x\le c<1}}{\le} c^n < \varepsilon$

$\ln c^n \cancel{<} \ln \varepsilon$

$n \ln c < \ln \varepsilon$

$n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln c} \quad (\ln c < 0)$

$n_0 := \left[\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln c} \right] \quad \Longleftarrow$

x-től független küszöbindex

$\Rightarrow \quad f_n \rightrightarrows 0 \quad (0,c]$-n

b) hasonlóan:

$|f_n(x) - f(x)| = x^n < \varepsilon \iff n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln x}$

$\uparrow$

$x \in (0,1)$

de $\quad \lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{\ln \varepsilon}{\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\ln x}} = \infty \quad \Rightarrow \quad \nexists \quad \forall\, x \in (0,1)$-re

alkalmas <u>közös</u> küszöbindex

$f_n \not\rightrightarrows f = 0 \quad (0,1)$-n !

Megj: $f_n \rightrightarrows f$ H-n $\Rightarrow$ $f_n \to f$ H-n.

Def. H tetszőleges, $H \to \mathbb{R}$ függvények terén

$$d(f,g) = \sup_{x \in H} |f(x) - g(x)| \qquad f,g : H \to \mathbb{R}$$

metrikát definiál $\Rightarrow$ uniform metrika

$$\boxed{f_n \xrightarrow{u} f \iff \sup_{x \in H} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

uniform metrikában vett konvergencia

TÉTEL: $f_n \rightrightarrows f$ H-n $\iff$ $f_n \xrightarrow{u} f$

Biz. $\Rightarrow$: tfh $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, ha $n > n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, $\forall x \in H$

$\hookrightarrow$ $\sup_{x \in H} |f_n(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, ha $n > n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$

$$\Downarrow$$

$$f_n \xrightarrow{u} f \quad ✓$$

$\Leftarrow$: tfh $f_n \xrightarrow{u} f$ (azaz $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\sup_{x \in H} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ha $n > n_0$)

$0 \le |f_n(x) - f(x)| \le \sup_{x \in H} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ha $n > n_0$ $\forall x \in H$

$$\Downarrow$$

$f_n \rightrightarrows f$ H-n

500/

Példák

(1) $f_n(x) := e^{5x} + \dfrac{2}{x^4+n^2+3} \qquad x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(e^{5x} + \frac{2}{x^4+n^2+3} \right) = e^{5x}$$

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| e^{5x} + \frac{2}{x^4+n^2+3} - e^{5x} \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{2}{x^4+n^2+3} = \frac{2}{n^2+3} \to 0$$

ha $n \to \infty$

$\Rightarrow \quad f_n \rightrightarrows f \quad \mathbb{R}$-en

(2) $f_n(x) = \dfrac{x^2+x+n}{x^2+n}$

a) $I_1 = [-2,5]$

b) $I_2 = [0,\infty)$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2+x+n}{x^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x^2+x}{n}+1}{\frac{x^2}{n}+1} = 1 = f(x) \quad (x\in\mathbb{R})$$

a) $I_1 = [-2,5]$

$$d(f_n, f) = \sup_{x\in[-2,5]} \left| \underbrace{\frac{x^2+x+n}{x^2+n} - 1}_{\frac{x^2+x+n-x^2-n}{x^2+n}} \right| = \sup_{x\in[-2,5]} \frac{|x|}{x^2+n} \leq \frac{5}{0^2+n} = \frac{5}{n} \to 0$$

$n\to\infty$

$\Downarrow$

$f_n \rightrightarrows f \quad I_1$-n

501)

a) $$d(f_n, f) = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{|x|}{x^2+n} = \sup_{x\in[0,\infty)} \frac{x}{x^2+n}$$

$$g_n(x) := \frac{x}{x^2+n}$$

- $g_n(0) = 0$
- $$\lim_{x\to\infty} g_n(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+n} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\underbrace{x+\frac{n}{x}}_{\infty}} = 0$$
- $g_n(x) \geq 0$ + $g_n(x)$ folytonos

$\Downarrow$

$$\sup_{x\in[0,\infty)} g_n(x) = \max_{x\in[0,\infty)} g_n(x)$$

$$g_n'(x) = \left(\frac{x}{x^2+n}\right)' = \frac{x^2+n-2x^2}{(x^2+n)^2} = \frac{n-x^2}{(x^2+n)^2} = 0 \iff x = \sqrt{n}$$

$(x>0)$

x	$(0,\sqrt{n})$	$\sqrt{n}$	$(\sqrt{n},\infty)$
g'	$+$	0	$-$
g	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

$\Downarrow$

$$g_n(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{n})^2+n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ $f_n \rightrightarrows f$ I_2-n

Egy hasznos elégséges feltétel egyenletes konvergenciához:

TÉTEL Ha $\exists\ (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ numerikus sorozat, hogy

az $r_n(x)=f(x)-f_n(x)$ maradéktag sorozatra

$|r_n(x)|\le c_n$ H-n m.m. n-re és $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=0$,

akkor $f_n \rightrightarrows f$ H-n.

Biz.

$c_n\to 0 \Rightarrow \forall\, \varepsilon>0\ \exists\, N\in\mathbb{N} : |c_n|<\varepsilon$, ha $n>N$

$\hookrightarrow$ $|r_n(x)|\le|c_n|<\varepsilon$, ha $n>N$ $\forall x\in H$

$\Rightarrow f_n \rightrightarrows f$ H-n.

Példák

① Egyenletesen konvergens-e a konvergenciatartományán (KT)

a) $\boxed{f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{n}}$

$f_n(x)\to 0\equiv f(x)\quad \forall x\in(-\infty,\infty)=KT$

$$|r_n(x)|=\left|\frac{\sin nx}{n}\right|\le \underbrace{\frac{1}{n}}_{=\,c_n}\to 0$$

$\Downarrow$

$f_n \rightrightarrows 0$ $\cancel{\forall x\in}$ $\mathbb{R}$-en.

503/

b)

$$\boxed{f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} x^n}{n}}$$

$$f_n(x) \to 0 \equiv f(x) \quad \forall\, x \in (-\infty, \infty) = KT$$

$$|r_n(x)| = \left|\frac{\operatorname{arctg} x^n}{n}\right| \le \frac{\frac{\pi}{2}}{n} = \underset{\underset{c_n}{|||}}{\frac{\pi}{2n}} \to 0$$

$$\Downarrow$$

$$f_n \rightrightarrows f \quad \mathbb{R}\text{-en}$$

<u>Megj</u> Ha $f_n \rightrightarrows f$ H-n $\Rightarrow$ $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ pontsorozatra

$$\lim_{n\to\infty} |r_n(x_n)| = 0$$

<u>Köv</u> Ha $\exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ pontsorozat, melyre $\lim\limits_{n\to\infty} |r_n(x_n)| \neq 0$

$$\Rightarrow \quad f_n \not\rightrightarrows f \quad H\text{-n}$$

<u>Példák</u>

① $f_n(x) = x^n - x^{2n} \to 0 \qquad I = (-1, 1]$ -en

$x_n := 1 - \frac{1}{n} \in I$ pontsorozat mentén

$$\lim_{n\to\infty} |r_n(x_n)| = \lim_{n\to\infty} \left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^n - \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}\right| = |e^{-1} - e^{-2}| \neq 0$$

$$\hookrightarrow \quad f_n \not\rightrightarrows 0 \quad I\text{-n}.$$

505)

(2) $f_n(x) := \frac{1}{nx} \to 0 \qquad KT = (-\infty,\infty)\setminus\{0\}$ -n

$x_n := \frac{1}{n} \in KT$

↳ $\lim\limits_{n\to\infty} |r_n(x_n)| = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n\cdot\frac{1}{n}} \right| = 1 \neq 0$

↳ $f_n \not\rightrightarrows 0$ KT-n.

(3) $f_n(x) := \frac{x}{n} \to f(x) \equiv 0 \qquad KT = (-\infty,\infty)$

Adjuk meg a legnagyobb intervallumot, ahol egyenletes a konv?

- $x_n = n \in KT \rightsquigarrow |r_n(x)| = \left|\frac{n}{n}\right| = 1 \not\to 0$

$\Downarrow$

$(-\infty,\infty)$-n nem egyenletes a konv.

- $I := [a,b]$ tetszőleges

↳ $0 \le |r_n(x)| \underset{x\in[a,b]}{\le} \frac{\max\{|a|,|b|\}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$f_n \rightrightarrows 0 \quad \forall\ [a,b] \subset \mathbb{R}$ korláton.

505/

TÉTEL (Cauchy-kritérium)

$f_n \rightrightarrows f$ H-n $\iff$ $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N \in \mathbb{N}$:

$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall\, x \in H,\ n,m > N.$

Biz:

$\Rightarrow$: tfh $f_n \rightrightarrows f$ H-n $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N \in \mathbb{N}$:

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, x \in H,\ n > N$

$\hookrightarrow$ $|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \underset{\substack{n,m>N \\ \forall x \in H}}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ✓

$\Leftarrow$: tfh RHS igaz $\rightsquigarrow$ $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat (numerikus) $\forall\, x \in H$-ra

$\Downarrow$ $\mathbb{R}$ teljes

$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens

$\hookrightarrow$ $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

Kell: $f_n \rightrightarrows f$ H-n

RHS $\rightsquigarrow$ $|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \underset{n>N}{\leq} \varepsilon \quad \forall\, x \in H$

$\Downarrow$ $\sup_{x\in H}$

$f_n \rightrightarrows f$ H-n

$\circ$!

506)

Miért jó bevezetni az egyenletes konvergenciát?

<u>TÉTEL</u> Tfh $f_n \rightrightarrows f$ H-n.

! $x_0 \in H'$ (H torlódási pontja)

Ha $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in H}} f_n(x) = A_n$ $\exists$ és véges $\forall n \in \mathbb{N}$-re, akkor

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in H}} f(x) = A$ $\exists$ és véges és $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = A$.

<u>Megj</u> A tétel jelentése:

Ha $f_n \rightrightarrows f$ H-n, akkor

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in H}}} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} A_n = A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in H}} f(x) = \underbrace{\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in H}} \lim_{n\to\infty}} f_n(x)$$

a limesek sorrendje felcserélhető!

Pontonkénti konvergenciánál ez nincs így!

<u>PL</u>

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1-0} x^n = 1 \neq 0 = \lim_{x \to 1-0} \lim_{n\to\infty} x^n$$

vagy

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 0+0} \operatorname{arctg}(nx) = 0 \neq \frac{\pi}{2} = \lim_{x\to 0+0} \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(nx)$$

507)

Bizonyítás:

$\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists N$: $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in H$
$n, m \geq N$
(Cauchy-krit.)

$\hookrightarrow |A_n - A_m| = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in H}} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \quad \forall n, m > N$

$\Downarrow$

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-sorozat

$\Downarrow$ $\mathbb{R}$ teljes

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergens : $A := \lim\limits_{n \to \infty} A_n$

$\forall\ \varepsilon > 0$-hoz $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in H$
és $|A_n - A| < \varepsilon$, ha $n > n_0$

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in H}} f_n(x) = A_n \implies \exists$ x_0-nak olyan $\dot{U} = U \setminus \{x_0\}$ pontozott környezete, hogy $|f_n(x) - A_n| < \varepsilon \quad \forall x \in H \cap \dot{U}$

$\Downarrow$

$$|f(x) - A| \leq \underset{\varepsilon}{\underset{\wedge}{|f(x) - f_n(x)|}} + \underset{\varepsilon}{\underset{\wedge}{|f_n(x) - A_n|}} + \underset{\varepsilon}{\underset{\wedge}{|A_n - A|}} \leq 3\varepsilon$$

$\forall x \in H \cap \dot{U}$
$n > n_0$

$\implies \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in H}} f(x) = A$

!

508)

Köv. Ha $f_n \rightrightarrows f$ H-n (⊂), $x_0 \in H'$ és f_n folytonos x_0-ban $\forall n$-re $\Rightarrow$ f folytonos x_0-ban.

(Vagyis folytonos függvénysorozat egyenletes limesze folytonos)

Biz.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f(x) \underset{\text{Tétel}}{=} \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

o.!

Megj: nem szükséges feltétel:

pl: $f_n(x) := x^n - x^{2n} \to 0$ $[0,1]$-n, de $f_n \not\rightrightarrows 0$ $[0,1]$-n.

TÉTEL (Dini-tétel)

$f_n \in C[a,b]$, $f_1(x) \le f_2(x) \le f_3(x) \le \dots$ $\forall x \in [a,b]$

Ha $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in [a,b]$ és $f \in C[a,b]$, akkor

$f_n \rightrightarrows f$ $[a,b]$-n.

Megj: tehát ebben a speciális esetben a limesz folytonosságából következik az egyenletes konvergencia.

(tehát $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ nem monoton növő pontonként)

505)

Biz: Tfh $f \equiv 0$ $[a,b]$-n (különben $(f_n - f)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatra bizonyítunk)

$\Rightarrow$ $f_n(x) \le 0$ $\forall x \in [a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$

indirekt: Tfh $f_n \not\rightrightarrows 0$. $\Rightarrow$ $\exists\, \varepsilon > 0$, hogy végtelen sok n-re $\exists\, x_n \in [a,b]$, melyre

$$|f_n(x_n) - 0| > \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$-f_n(x_n) > \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$f_n(x_n) < -\varepsilon \qquad (*)$$

- Tfh $\forall n$-re $\exists$ ilyen x_n (a többi fv-t (f_n-t) elhagyjuk a sorozatból)

- Tfh $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens ($(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ korlátos $\Rightarrow$ $\exists\, (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergens részsorozat $\Downarrow$ csak ezeket az indexeket tekintjük)

$\Downarrow$

$c := \lim_{n\to\infty} x_n \Rightarrow c \in [a,b]$ és f_n függvények folytonosak c-ben

$\Rightarrow$ $f_n(c) \to 0$ $\Rightarrow$ $\exists\, N \in \mathbb{N}$, melyre $-\varepsilon < f_N(c)$

5.10)

f_N folytonos c-ben $\Rightarrow$ c-nek $\exists$ olyan U környezete,

hogy $f_N(x) > -\varepsilon \quad \forall\, x \in U \cap [a,b]$

(feltevés)

$x_n \to c \Rightarrow x_n \in U$ elég nagy n-re

Legyen n index olyan, hogy $n \geq N$ és $x_n \in U$

$\hookrightarrow$

$$-\varepsilon < f_N(x_n) \leq f_n(x_n)$$

de $\quad f_n(x_n) < -\varepsilon \quad (*)$ x_n-et így választottuk

$$\Downarrow$$

$$\lightning \leadsto f_n \rightrightarrows f$$

!

Megj: itt $[a,b]$-re hivatkoztunk, igazából $f_n : K \to \mathbb{R}$, $f_n \in C(K)$

K kompakt fontos

$f_n(x) \nearrow$

A kompaktság nem hagyható el:

$$f_n(x) := \frac{1}{nx+1} \qquad x \in (0,1)$$

$f_n(x) \to 0$ és $f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \quad \forall\, n \geq 1$

de $\quad f_n \not\rightrightarrows 0 \quad (0,1)$-n

5.11)

Példa

$$\boxed{f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

- $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = e^x \qquad KT = (-\infty, \infty)$

$f_n \not\rightrightarrows f \quad (-\infty,\infty)$-n, mert

$x_n := n$-re $\quad |r_n(x_n)| = |f_n(x_n) - f(x_n)| = |2^n - e^n| \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

- $[a,b]$ kompaktban

$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \nearrow e^x \quad + \quad f_n$ és f is folytonos $[a,b]$-n

$\Downarrow$ Dini-tétel

$f_n \rightrightarrows f \quad [a,b]$-n.

5 12

A limesz képzés és az integrálás felcserélhetősége

Példa:

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x^n & , \text{ha } x \in [0,1) \\ 0 & , \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

$$f_n(x) \longrightarrow 0 \quad \forall\ x \in [0,1]$$

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 (n+1)x^n\,dx = \left[x^{n+1}\right]_0^1 = 1 \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

$$\hookrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)}_{= 0}\,dx$$

TÉTEL: Tfh $f_n \rightrightarrows f$ $[a,b]$-n. Ha f_n integrálható $[a,b]$-n $\forall n$-re, akkor f is integrálható $[a,b]$-n és

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \,,$$

vagyis a limesz képzés és az integrálás felcserélhető.

Köv. Ha az $[a,b]$-n vett integrálok nem konvergálnak a határfv integráljához, akkor a konvergencia nem lehet egyenletes.

5/13

Biz. ezt $f_n \in C[a,b]$-re bizonyítjuk

(általános f_n integrálhatóságra Pl. Pl. Laczkovich – T. Sós)

$$\Downarrow$$

$$f \in C[a,b] \Rightarrow \exists \int_a^b f(x)\,dx =: A$$

$$a_n := \int_a^b f_n(x)\,dx$$

$$|a_n - A| = \left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq$$

$$\leq \int_a^b \underbrace{\sup_{x \in [a,b]} |f_n(x) - f(x)|}_{= d(f_n, f)}\,dx = d(f_n, f)(b-a) < \varepsilon \text{, ha } n > N\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)$$

ugyanis: $f_n \rightrightarrows f \leadsto \forall\, \tilde{\varepsilon} > 0 \;\exists\, N(\tilde{\varepsilon})$ $d(f_n, f) < \tilde{\varepsilon}$, ha $n > N(\tilde{\varepsilon})$

$$\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{b-a}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx$$

!

5/13

Példák

(1)
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\sin(n^4x^2+3)}{x^3+n^3}\,dx=?$$

$$f_n(x)=\frac{\sin(n^4x^2+3)}{x^3+n^3}\in C[0,2\pi]$$

$$\Big\downarrow\ n\to\infty$$

$$f(x)=0$$

$$d(f_n,f)=\sup_{x\in[0,2\pi]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,2\pi]}\frac{|\sin(n^4x^2+3)|}{x^3+n^3}\leq\frac{1}{n^3}\to 0$$

$$\Rightarrow\quad f_n\rightrightarrows 0\quad [0,2\pi]\text{-n}$$

Tétel $\Rightarrow$
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}f_n(x)\,dx=\int_0^{2\pi}\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)dx=\int_0^{2\pi}0\,dx=0$$

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{x^2+n^2}\,dx=?$$

$$f_n(x)=\frac{\cos nx}{x^2+n^2}\in C[0,2\pi],\quad \cancel{f_n\rightrightarrows 0}\quad f_n(x)\to 0\quad x\in[0,2\pi]$$

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\frac{\cos nx}{x^2+n^2}\right|\leq\frac{1}{x^2+n^2}\to 0\quad\Rightarrow\ f_n\rightrightarrows f$$

Tétel $\Rightarrow$
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{x^2+n^2}\,dx=\int_0^{2\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\cos nx}{x^2+n^2}\,dx=0$$

A limeszképzés és a deriválás felcserélhetősége

Példa

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f_n(x) \to 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$d(f_n, f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sin nx}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \to 0$$

$$\Rightarrow \quad f_n \rightrightarrows 0 \quad \mathbb{R}\text{-en}$$

$$f_n'(x) = \cos nx \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) \neq \left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)'$ az egyenletes konvergencia ellenére!

516)

TÉTEL Legyenek f_n folytonosan differenciálhatók a korlátos I intervallumon!

Tfh i) $f_n' \rightrightarrows g$ I-n

ii) $\exists\ x_0 \in I$, melyre $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergens

$\Rightarrow$ $f_n \rightrightarrows f$, ahol f diffható I-n és

$$f'(x) = g(x) \qquad \forall\, x \in I$$

Megj A tétel feltételei mellett:

$$\underbrace{\frac{d}{dx}\lim_{n\to\infty} f_n(x)} = \frac{d}{dx} f(x) \underset{\text{Tétel}}{=} g(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx} f_n(x)}$$

$\Rightarrow$ a deriválás és a limeszképzés felcserélhető.

Biz spec esetben: $f_n \in C^1[a,b]$ $\qquad I := [a,b]$

(ált. eset: ld.: Laczkovich – T. Sós)

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n' = g \in C[a,b]$$

$\xRightarrow[x\in[a,b]]{\text{Tétel (int)}}$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)\,dt}_{f_n(x)-f_n(a)} = \int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)\,dt = \int_a^x g(t)\,dt \qquad \forall\, x\in[a,b]$$

517)

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left[f_n(x)-f_n(a)\right] = \int_a^x g(t)\,dt$$

T.f.h. x-ben konvergens $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$

$$\Downarrow$$

$$f(x)-f(a) = \int_a^x g(t)\,dt$$

$$\Downarrow \frac{d}{dx} \qquad , g \text{ folytonos}$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)-f(a)\right) = f'(x) = g(x)$$

!

Megj: Differenciálható függvények egyenletesen tarthatnak nem diffható függvényekhez is
(diffhatóság nem öröklődik a határfv-re)

pl:

$$f_n(x) = \sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}} \to |x|$$

mindenhol diffható

0-ban nem diffható

5/18)

<u>Megj</u>: Ha $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ f limeszfüggvénye nem diffható x_0-ban, akkor (f_n') nem lehet egyenletesen konvergens I-n, ha $x_0 \in I$.

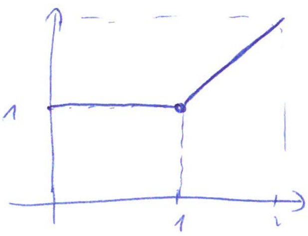
(ha $f_n' \rightrightarrows g$ lenne, akkor $g(x)=f'(x)$ lenne, de ez x_0-ban: ↯)

<u>Pl</u>: Egyenletesen konvergens-e (f_n') I-ben, ha

a) $f_n(x)=\sqrt[n]{1+x^n}$, $I=[0,2]$

$\downarrow$

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{ha } x\in[0,1] \\ x, & \text{ha } x\in[1,2] \end{cases}$$



↳ nem diffható $x_0=1$-ben

$\Rightarrow$ f_n' nem egyenletesen konvergens $[0,2]$-n

b) $f_n(x)=\dfrac{x^2e^{nx}+x}{e^{nx}+1}$ $\quad I=[-1,1]$

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{ha } x\geq 0 \\ x, & \text{ha } x<0 \end{cases} \Rightarrow \text{nem diffható } x_0=0\text{-ban}$$

$\Downarrow$

f_n' nem egyenletesen konvergens I-n.