413/

Számolási szabályok

$\underline{u}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\qquad$ $\underline{u}(\underline{r}) = (u_1(x,y,z), u_2(x,y,z), u_3(x,y,z))$

$\uparrow$

$\underline{r} = (x,y,z)$

$\underline{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\qquad$ $\underline{v}(\underline{r}) = (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))$

$$\mathrm{div}\, \underline{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}$$

$$\mathrm{rot}\, \underline{u} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial z}, \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial u_3}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

TÉTEL:

1) $\mathrm{div}(\underline{u}+\underline{v}) = \mathrm{div}\,\underline{u} + \mathrm{div}\,\underline{v}$

2) $\mathrm{div}(\lambda \underline{u}) = \lambda\, \mathrm{div}\,\underline{u}$

3) $\mathrm{rot}(\underline{u}+\underline{v}) = \mathrm{rot}\,\underline{u} + \mathrm{rot}\,\underline{v}$

4) $\mathrm{rot}(\lambda \underline{u}) = \lambda\, \mathrm{rot}\,\underline{u}$

$S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\qquad$ n-változós fv

5) $\mathrm{div}(S\underline{u}) = S\, \mathrm{div}\,\underline{u} + \underbrace{\underline{u} \circ \mathrm{grad}\, S}_{\langle \underline{u}, \mathrm{grad}\, S \rangle}$

6) $\mathrm{rot}(S\underline{u}) = S \cdot \mathrm{rot}\,\underline{u} - \underline{u} \times \mathrm{grad}\, S$

7) $\mathrm{div}(\underline{u} \times \underline{v}) = \underline{v} \circ \mathrm{rot}\,\underline{u} - \underline{u} \cdot \mathrm{rot}\,\underline{v}$

8) $\mathrm{rot}(\underline{u} \times \underline{v}) = \underline{u} \cdot \mathrm{div}\,\underline{v} - \underline{v}\, \mathrm{div}\,\underline{u} + \frac{du}{dx}\underline{v} - \frac{dv}{dx}\underline{u}$

4/14/

A nabla operáció

szimbolikusan bevezethető az alábbi, számolást segítő vektor

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \qquad \underline{\text{nabla vektor}}$$

$\underline{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$

↳ • $\operatorname{div} \underline{v} = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} + \dfrac{\partial v_3}{\partial z} = \nabla \circ \underline{v} \qquad \left(= \langle \nabla, \underline{v} \rangle \right)$

• $\operatorname{rot} \underline{v} = \nabla \times \underline{v} = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} =$

$$= \underline{i} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) - \underline{j} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) + \underline{k} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)$$

Szorzási szabályok nablával:

$$\frac{d}{dt}(uv) = u \frac{d}{dt} v + v \frac{d}{dt} u$$

2

1

• $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\operatorname{grad} F = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}, \dfrac{\partial F}{\partial y}, \dfrac{\partial F}{\partial z} \right) = \nabla F$

① Ha ∇ egy kéttényezős szorzat előtt áll, akkor az két tag összegére bomlik, melyben ∇ az egyikben csak a egyik, a másikban, csak a másik tényezőt éri meg.

4/15)

(2) A ∇ egy vektor, így átvezetéskor a vektorokkal kapcsolatos műveleti szabályok érvényesek:

↳ 1) ~~[illegible]~~

$$\mathrm{div}\,(\underline{u}+\underline{v}) = \nabla\cdot(\underline{u}+\underline{v}) = \nabla\cdot\underline{u}+\nabla\cdot\underline{v} = \mathrm{div}\,\underline{u}+\mathrm{div}\,\underline{v}$$

2) $$\mathrm{div}\,(\lambda\underline{u}) = \nabla\cdot(\lambda\underline{u}) = \lambda\,\nabla\cdot\underline{u} = \lambda\,\mathrm{div}\,\underline{u}$$

3) $$\mathrm{rot}\,(\underline{u}+\underline{v}) = \nabla\times(\underline{u}+\underline{v}) = \nabla\times\underline{u}+\nabla\times\underline{v} = \mathrm{rot}\,\underline{u}+\mathrm{rot}\,\underline{v}$$

4) $$\mathrm{rot}\,(\lambda\underline{u}) = \nabla\times(\lambda\underline{u}) = \lambda(\nabla\times\underline{u}) = \lambda\,\mathrm{rot}\,\underline{u}$$

5) $$\mathrm{div}\,(\underset{\substack{\uparrow\\ \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}}}{s}\cdot\underline{u}) = \nabla(s\cdot\underline{u}) = s\,\nabla\cdot\underline{u}+\underline{u}\cdot\nabla s =$$

$$= s\,\mathrm{div}\,\underline{u}+\underline{u}\cdot\mathrm{grad}\,s$$

felcserélték a sorrendet

6) $$\mathrm{rot}\,(s\underline{v}) = \nabla\times(s\underline{v}) = s(\nabla\times\underline{v}) - \underline{v}\times(\nabla s) =$$

$$= s\,\mathrm{rot}\,\underline{v} - \underline{v}\times\mathrm{grad}\,s$$

7) $$\mathrm{div}\,(\underline{u}\times\underline{v}) = \underbrace{\nabla\cdot(\underline{u}\times\underline{v})}_{\text{vegyesszorzat}} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ciklikusság}\\ +\text{ sorrendcsere}}}{=} -\underline{u}(\nabla\times\underline{v})+\underline{v}(\nabla\times\underline{u}) =$$

$$= \underline{v}\circ\mathrm{rot}\,\underline{u} - \underline{u}\circ\mathrm{rot}\,\underline{v}$$

8) hasonlóan + kifejtési tétel

4/18)

Def.

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Laplace-operátor

Ha $u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ fv-re $\Delta u = 0$, akkor u harmonikus függvény.

TÉTEL:

1) $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u$

$u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

2) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \underline{0}$ $\quad u \in C^2$

3) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \underline{v} = 0$ $\quad \underline{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

4) Ha ~~$u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ és~~ $\underline{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ kétszer folytonosan deriválható, akkor

$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{v} - \Delta \underline{v}$.

Biz.

1) $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla \cdot (\nabla u) = \nabla^2 u = \Delta u$

2) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \nabla \times (\nabla u) = \underline{0}$ $\rightsquigarrow$ „∇ és ∇u párhuzamosak"

3) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \underline{v} = \nabla \cdot \underbrace{(\nabla \times \underline{v})}_{\text{„merőleges } \nabla\text{-re"}} = 0$

4) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \underline{v} = \nabla \times (\nabla \times \underline{v}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{v}) - \nabla^2 \underline{v} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{v} - \Delta \underline{v}$.

4/17)

<u>Def</u> $\underline{v} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$

- örvénymentes, ha
$$\operatorname{rot} \underline{v} = \underline{0}$$
- forrásmentes (összenyomhatatlan), ha
$$\operatorname{div} \underline{v} = \underline{0}$$

<u>Megj</u>

1) Ha $\underline{v} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ potenciálos (konzervatív), azaz

$\exists \quad F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ potenciálfv, melyre $F \in C^2$ és

$$\underline{v}(\underline{r}) = \operatorname{grad} F(\underline{r}) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(\underline{r}), \frac{\partial F}{\partial y}(\underline{r}), \frac{\partial F(\underline{r})}{\partial z} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{rot} \underline{v}(\underline{r}) = \operatorname{rot} \operatorname{grad} F(\underline{r}) = \underline{0}$$

Azaz <u>minden konzervatív erőtér örvénymentes.</u>

2) Ha $\underline{v} \in C^2$, akkor $\operatorname{div} \operatorname{rot} \underline{v} = 0$

$$\Downarrow$$

$\forall$ vektormező rotációja forrásmentes erőtér.

Példák

(1) $\underline{v}(\underline{r}) = (2x - 4xyz)\,\underline{i} + (3z^3 - 2x^2 z)\,\underline{j} + (9yz^2 - 2x^2 y)\,\underline{k}$

- konzervatív-e?
- ha igen, adjuk meg a potenciálfüggvényét!

$$\operatorname{rot} \underline{v} = \nabla \times \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x - 4xyz & 3z^3 - 2x^2 z & 9yz^2 - 2x^2 y \end{vmatrix} =$$

$$= \underline{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(9yz^2 - 2x^2 y) - \frac{\partial}{\partial z}(3z^3 - 2x^2 z) \right) - \underline{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}(9yz^2 - 2x^2 y) - \frac{\partial}{\partial z}(2x - 4xyz) \right)$$

$$+ \underline{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(3z^3 - 2x^2 z) - \frac{\partial}{\partial y}(2x - 4xyz) \right) =$$

$$= \underline{i}\left(9z^2 - 2x^2 - (9z^2 - 2x^2) \right) - \underline{j}\left(-4xy + 4xy \right) + \underline{k}\left(-4xz + 4xz \right) = \underline{0}$$

$\Rightarrow$ $\underline{v}$: • $\mathbb{R}^3$-on értelmezett (csillagtartomány)

• $\mathbb{R}^3$-on örvénymentes ($\operatorname{rot} \underline{v} = \underline{0}$)

$\Downarrow$

$\underline{v}$ potenciálos:

$\exists\ U : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ potenciálfv, melyre $\underline{v}(\underline{r}) = \operatorname{grad} U(\underline{r})$.

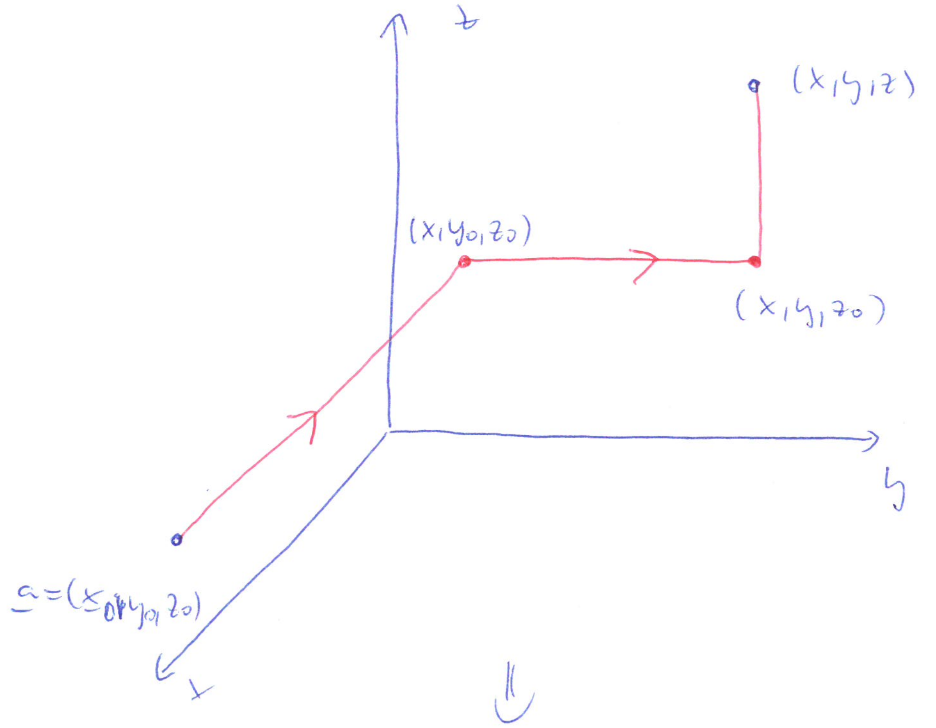
4.19)

Láttuk: ekkor egy rögzített $\underline{a} \in \mathbb{R}^3$ vektor esetén

$$u(\underline{x}) = \int_{\underline{a}}^{\underline{x}} \underline{v} \quad \text{egy } \underline{a}\text{-ban eltűnő potenciálfv}$$

tetsz. $\underline{a}$-t $\underline{x}$-szel összekötő szakaszonként sima út

↳ érdemes az utat úgy megválasztani, hogy megkönnyítsük a számolást ⇝ a koordinátatengelyekkel párhuzamos szakaszokból álló törött vonalat választunk.



↓

az egyes szakaszokon csak azok a koordináták változnak, amelyik tengellyel párhuzamosan haladunk

⇓

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} (2x - 4x y_0 z_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} (3z_0^3 - 2x^2 z_0)\,dy + \int_{z_0}^{z} (9y z^2 - 2x^2 y)\,dz$$

$$= \left[x^2 - 2x^2 y_0 z_0\right]_{x_0}^{x} + (3z_0^3 - 2x^2 z_0)\left[y\right]_{y_0}^{y} + \left[3yz^3 - 2x^2 yz\right]_{z_0}^{z} =$$

420/

$\circled{=}\ x^2+3yz^3-2x^2yz - \underbrace{(x_0^2+3y_0z_0^3-2x_0^2y_0z_0)}_{\Downarrow \atop c}$

$(u(x_0,y_0,z_0)=0)$

$\underline{v}(\underline{r})$ potenciálfüggvénye:

$$u(\underline{r}) = x^2+3yz^3-2x^2yz + c$$

ell.

$$\text{grad}\, u(\underline{r}) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \left(2x-4xyz,\ 3z^3-2x^2y,\ 9yz^2-2x^2y\right)$$

✓

② $\underline{v}(\underline{r}) = yz\,\underline{i} + zx\,\underline{j} + xy\,\underline{k}$

$$\text{rot}\,\underline{v} = \nabla\times\underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = \underline{i}(x-x) - \underline{j}(y-y) + \underline{k}(z-z) = \underline{0}$$

$\Downarrow$

potenciálos

$\exists\ u: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v(\underline{r}) = \text{grad}\, u(\underline{r})$

$\Downarrow$

potenciálfv keresés vonalmenti integrálással:

4(A))

$$\underline{v} = \operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) \rightsquigarrow \quad v_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_3 = \frac{\partial u}{\partial z}$$

<u>Ugyanis</u> :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yz, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = zx, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = xy$$

$$\Downarrow$$

$$u(x,y,z) = \int yz \, dx = xyz + C(y,z)$$ (legáltalánosabb fv, melyre $u'_x = yz$)

$$\Downarrow \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = xz + \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} \underset{\text{kell}}{=} zx \rightsquigarrow \frac{\partial C(y,z)}{\partial y} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$C(y,z) = C(z)$$

$\hookrightarrow$ $u(x,y,z) = xyz + C(z)$ (legáltalánosabb fv, melyre $u'_x = yz$ és $u'_y = zx$)

$$\Downarrow \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xy + \frac{dC(z)}{dz} \underset{\text{kell}}{=} xy \Rightarrow \frac{dC(z)}{dz} = 0$$

$$\Downarrow$$

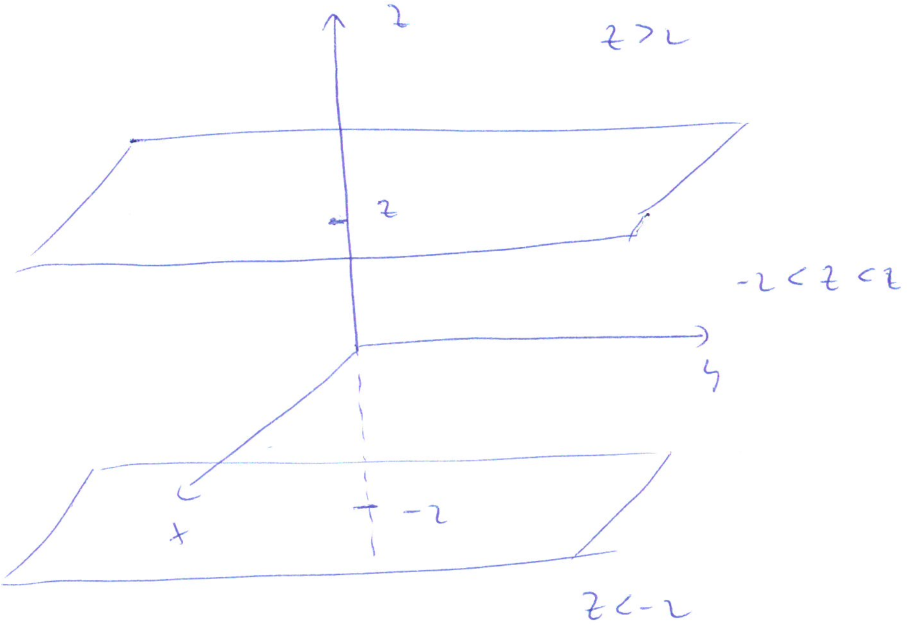
$$C(z) = C = \text{konstans}$$

$$\underline{\underline{u(x,y,z) = xyz + C}}$$

422/

(3) $$\underline{v}(\underline{r}) = \frac{2xy}{4-z^2}\,\underline{i} + \frac{x^2}{4-z^2}\,\underline{j} + \frac{2x^2yz}{(4-z^2)^2}\,\underline{k}$$

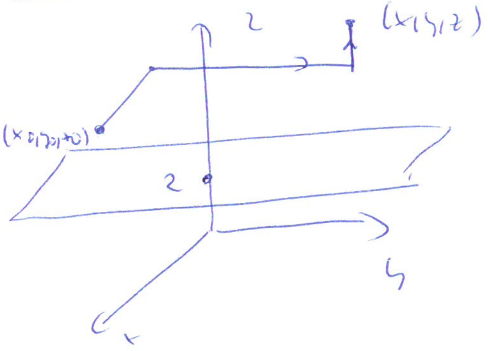
↳ $z \neq \pm 2$ ⇝ ez a feltétel a teret 3 részre osztja



$\mathrm{rot}\,\underline{v} = \underline{0}$ (HF)

A potenciálfv-t mindenhol az egyes tartományokra külön-külön meg kell keresni:

<u>Pl)</u> $z>2$



$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} \frac{2xy_0}{4-z_0^2}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{x^2}{4-z_0^2}\,dy + \int_{z_0}^{z} \frac{2x^2yz}{(4-z^2)^2}\,dz = \ldots = \frac{x^2y}{4-z^2} + C$$

ha $z>2$

423/

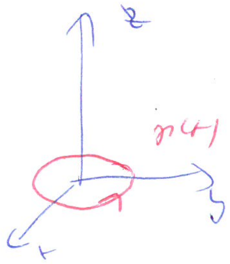
(5) $\underline{v}(\underline{r}) = \dfrac{-y\,\underline{i} + x\,\underline{j}}{x^2+y^2}$ $\qquad (x,y) \neq (0,0)$

$$\operatorname{rot} \underline{v} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}(0-0) - \underline{j}(0-0) +$$

$$+ \underline{k}\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2}}_{\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{x^2+y^2}}_{\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2}} \right) = \underline{0}$$

DE

$\underline{\gamma}(t) := (\cos t, \sin t, 0) \qquad t \in [0, 2\pi]$



$\dot{\underline{\gamma}}(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$

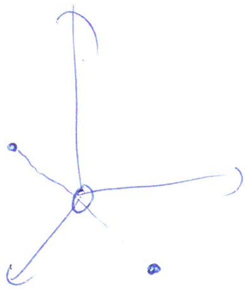
$\underline{v}(\underline{\gamma}(t)) = \dfrac{-\sin t\,\underline{i} + \cos t\,\underline{j}}{\sin^2 t + \cos^2 t} = (-\sin t, \cos t, 0)$

$$\int_{\gamma} \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \int_0^{2\pi} \langle \underline{v}(\underline{\gamma}(t)), \dot{\underline{\gamma}}(t) \rangle\, dt = 2\pi$$

$$\langle \underline{v}(\underline{\gamma}(t)), \dot{\underline{\gamma}}(t) \rangle = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

pedig zárt görbén integráltunk

OK: nem csillagtartomány $((0,0) \notin D_v)$



az átellenes pontok nem érhetők el a tartományban fekvő egyenesszakasszal.

42b)

(5) gravitációs erőtér (origóba helyezett vonzócentrum esetén)

$$\underline{v}(\underline{r}) = -\frac{\underline{r}}{|\underline{r}|^3} \qquad \underline{r} \neq \underline{0}$$

$\rightsquigarrow$ $\operatorname{rot} \underline{v} = \underline{0}$ (HF)

$$u(\underline{r}) = \int_{\underline{a}}^{\underline{r}} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{r} \underset{\uparrow}{=} - \int_{(1,0,0)}^{(x,y,z)} \frac{x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\, d\underline{r} =$$

$\underline{a}: (1,0,0)$

$$= -\left[\int_1^x \frac{x}{\left(\sqrt{x^2+0+0}\right)^3}\, dx + \int_0^y \frac{y}{\left(\sqrt{x^2+y^2+0}\right)^3}\, dy = \int_0^z \frac{z}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}\, dz \right]$$

$$= \dots = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \underbrace{1}_{c} = \frac{1}{|\underline{r}|} + 1$$

$$\boxed{u(\underline{r}) = \frac{1}{|\underline{r}|} + c}$$

itt pl. van potenciálja!

a vonalintegrálos előállítás csak elégséges, de nem szükséges felt.

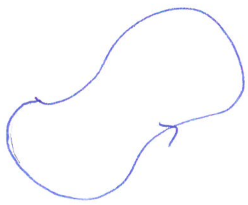
425/

Green-tétel

Def $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ <u>egyszerű zárt görbe</u>, ha

folytonos, zárt és injektív $[a,b)$-n:

$(\ a \le t < u \le b \ \Rightarrow \ g(t) = g(u) \iff t = a \text{ és } u = b \ )$



egyszerű, zárt görbe

<u>nem</u> egyszerű zárt görbe

Legyen $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ egyszerű zárt síkgörbe. Ekkor $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma([a,b])$ két ~~[illegible]~~ összefüggő komponensből áll, az egyik korlátos, ~~[illegible]~~ a másik nem (Jordan-tétel)

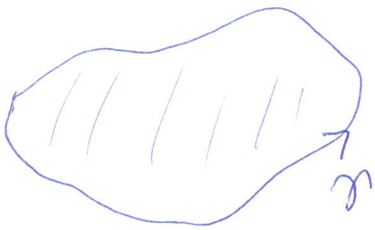
$\Downarrow$

a korlátos tartomány: γ által határolt korlátos tartomány

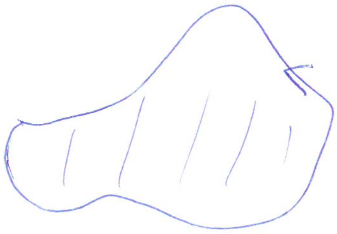
$\Downarrow$

<u>γ irányítása</u>: a γ görbén végighaladva, ha a határolt tartomány baloldalra esik $\Rightarrow$ γ + irányítású

jobb oldalra esik $\Rightarrow$ γ − irányítású



+ irányítású



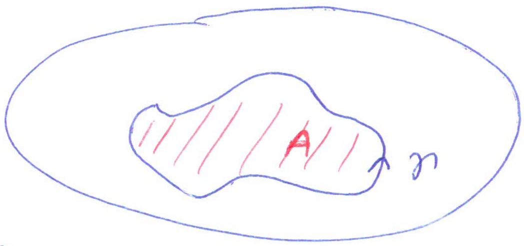
− irányítású

TÉTEL (Green-tétel).

! γ folytonos, rektifikálható, pozitív irányítású zárt síkgörbe.

A: γ által határolt korlátos tartomány, $\bar{A} \subset G$ nyílt

$f : G \to \mathbb{R}$ folytonos (2 változós fv)



i) Ha $\frac{\partial f}{\partial y}$ $\exists$ és folytonos $\bar{A}$-n, akkor

$$\boxed{\int_\gamma f\,dx = -\iint_A \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy}$$

ii) Ha $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\exists$ és folytonos $\bar{A}$-n, akkor

$$\boxed{\int_\gamma f\,dy = \iint_A \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy}$$

427/

Megj: a két formula ekvivalens:

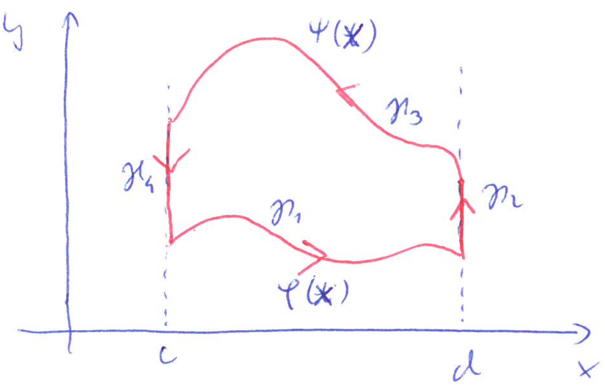
$x \leftrightarrow y$ csere $\iff$ $y = x$ egyenesre való tükrözés

$\Downarrow$

megváltoztatja a görbe irányítását (ezért jön be / tűnik el a mínusz jel)

Biz. (vázlatos)

1. lépés: t/h A egy normáltartomány belseje



φ, ψ folytonosak $[c,d]$-n

és $\forall\, x \in (c,d)$:

$\varphi(x) < \psi(x)$

$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 = \partial A$, ahol

$A = \{(x,y) : c \leq x \leq d,\ \varphi(x) < y < \psi(x)\}$

$\hookrightarrow$ $$\int_{\gamma_1} f\,dx = \int_c^d f(x, \varphi(x))\,dx$$

$$\int_{\gamma_3} f\,dx = \int_d^c f(x, \psi(x))\,dx = -\int_c^d f(x, \psi(x))\,dx$$

4.28)

$$\int_{\gamma_2} f\,dx = 0 \quad , \quad \int_{\gamma_4} f\,dx = 0$$

γ_2-n $x = d = \text{const}$

$\hookrightarrow dx = 0$

γ_4-n $x = c = \text{const}$

$\hookrightarrow dx = 0$

$\hookrightarrow$

$$\int_{\gamma} f\,dx = \int_c^d \left(f(x,\varphi(x)) - f(x,\psi(x)) \right) dx$$

<u>másrészt</u>

$$\underline{\underline{-\iint_A \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy}} = -\int_c^d \Bigg(\underbrace{\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f}{\partial y}\,dy}_{\left[f(x,y)\right]_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)} = f(x,\psi(x)) - f(x,\varphi(x))} \Bigg) dx =$$

$$= -\int_c^d \left(f(x,\psi(x)) - f(x,\varphi(x)) \right) dx =$$

$$= \int_c^d \left(f(x,\varphi(x)) - f(x,\psi(x)) \right) dx = \underline{\underline{\int_{\gamma} f\,dx}}$$

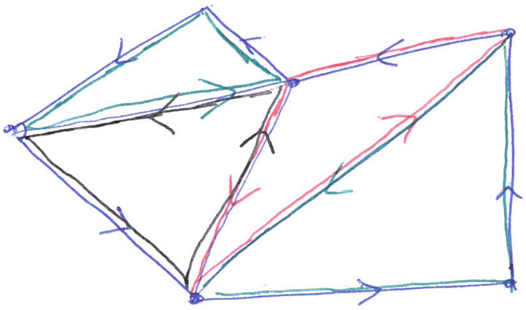
$\hookrightarrow$ normáltartományokra igaz.

125/

$\forall$ háromszög normáltartomány $\Rightarrow$ $\forall$ Δ-re igaz

2. lépés $\rightsquigarrow$ $\forall$ sokszögre igaz: felbontható Δ-ekre

$\Downarrow$

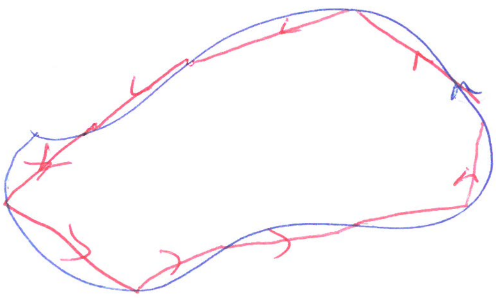


γ

a belső utakon
vett integrál
kiesik, mert
$\forall$ belső élen
kétszer megyünk
végig, ~~egyszer~~ ellentétes
irányítással

3. lépés

rektifikálható görbék $\rightarrow$ poligonokkal közelítünk.



ii) Ugyanígy, ezek a

$$A = \{(x,y) : c < y < d : \varphi(y) < x < \psi(y)\}$$

normáltartományra

$\varphi(y) < \psi(y) \quad y \in [c,d)$ folytonos.

430)

Alternatív formalizálás:

<u>TÉTEL</u> (Green)

γ: folytonos, rektifikálható, pozitív irányítású egyszerű síkgörbe

A: γ által határolt korlátos tartomány $(\partial A = \gamma)$

$\bar{A} \subset G$ nyílt

$P : G \to \mathbb{R}$
$Q : G \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálhatók (2 változósak)

$P = P(x,y)$
$Q = Q(x,y)$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy}$$

<u>Biz.</u> Alkalmazzuk az előző tételt P-re ill. Q-ra:

$$\left.\begin{aligned} \int_\gamma P\,dx &= -\iint_A \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy \\ \int_\gamma Q\,dy &= \iint_A \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy \end{aligned}\right\} + \oint \Rightarrow \int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

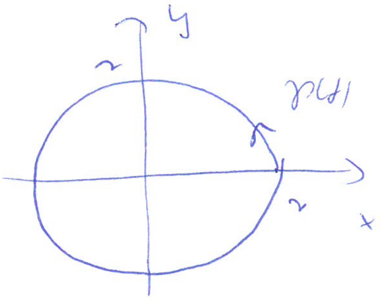
!

431/

Példák

(1) $\underline{v}(\underline{r}) = y\,\underline{i} - x\,\underline{j}$

$\gamma(t)$: origó középpontú r sugarú kör pozitív irányítással



$$\oint_\gamma \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = ?$$

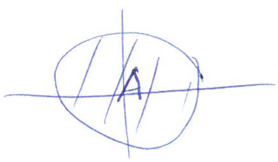
Green-tétellel: legyen $P(x,y) = x$, $Q(x,y) = -x$

↳ $\underline{v}(\underline{r}) = P\,\underline{i} + Q\,\underline{j}$

$\underline{r} = (x,y)$ ⇓ $d\underline{r} = (dx, dy)$

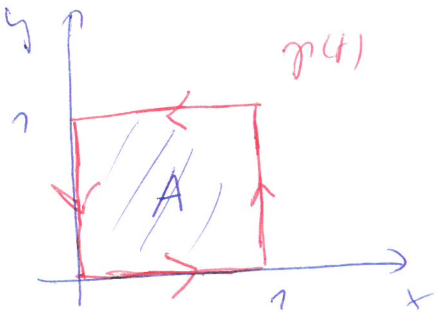
$$\Rightarrow \quad \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = P\,dx + Q\,dy$$

$$\oint_\gamma \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \int_\gamma (P\,dx + Q\,dy) \underset{\text{Green}}{=} \iint_A \Big(\underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}_{-1-1=-2}\Big)\,dx\,dy =$$



$$= -2 \underbrace{\iint_A dx\,dy}_{\text{mes}(A)} = \underline{\underline{-2r^2\pi}}$$

432)

② 

$$I = \oint_\gamma (y^4+x^3)\,dx + 2x^6\,dy = ?$$

Green-tétellel könnyebb:

$$P(x,y) := y^4+x^3 \rightsquigarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 4y^3$$

$$Q(x,y) = 2x^6 \rightsquigarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 12x^5$$

$$I = \int_\gamma (P\,dx + Q\,dy) = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \iint_A (12x^5 - 4y^3)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\int_0^1 (12x^5-4y^3)\,dx}_{\left[2x^6-4y^3x\right]_{x=0}^{1} = 2-4y^3}\,dy = \int_0^1 (2-4y^3)\,dy = \left[2y-y^4\right]_0^1 = 2-1 = \underline{\underline{1}}$$

Megj. 1) $P=0,\ Q=x \rightsquigarrow \frac{\partial P}{\partial y}=0,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=1$

$$\int_\gamma x\,dy = \iint_A dx\,dy = \text{mes } A$$

2) $P=-y,\ Q=0 \rightsquigarrow \frac{\partial P}{\partial y}=-1,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=0$

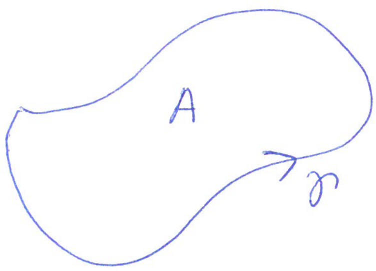
$$-\int_\gamma y\,dx = \iint_A \cancel{-1}\,dx\,dy = \text{mes } A$$

433/

3) $P = -y$, $Q = x$ $\rightsquigarrow$ $\frac{\partial P}{\partial y} = -1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$

$$\hookrightarrow \frac{1}{2} \int_\gamma x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2} \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \frac{1}{2} \iint_A 2\,dx\,dy = \text{mes } A$$

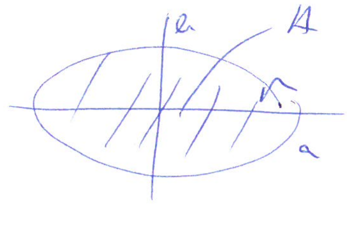
Köv Green-tétel alkalmazható területszámításra:



$$\boxed{\text{mes } A = \int_\gamma x\,dy = -\int_\gamma y\,dx = \frac{1}{2} \int_\gamma x\,dy - y\,dx}$$

Példák

① $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipszis lelgével területe



$\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$

$t \in [0, 2\pi]$

$$\text{mes } A = \frac{1}{2} \int_\gamma x\,dy - y\,dx \overset{}{=}$$

$x = a\cos t \rightsquigarrow dx = -a\sin t\,dt$

$y = b\sin t \quad\quad dy = b\cos t\,dt$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(a\cos t \cdot b\cos t - (b\sin t)(-a\sin t) \right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab\,dt = \underline{\underline{ab\pi}}.$$

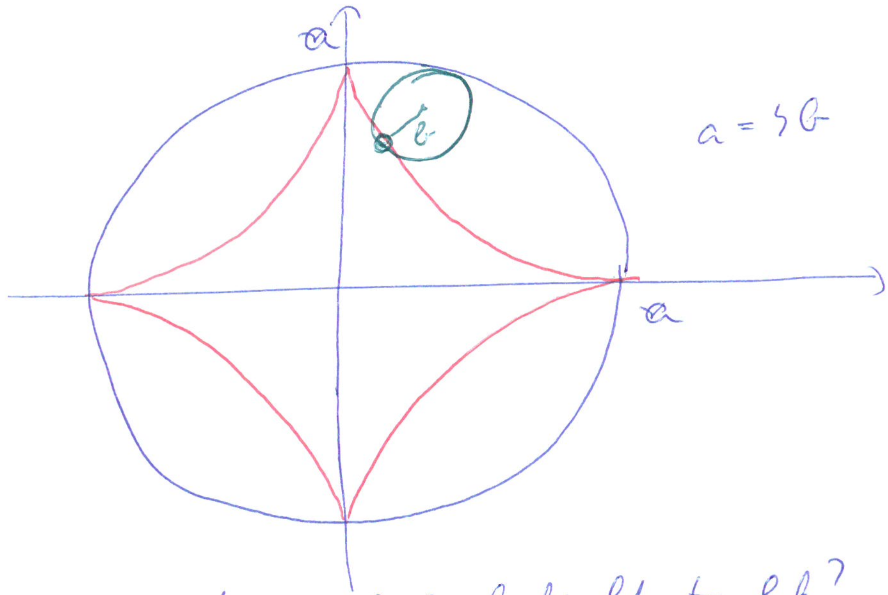
434)

2

$\underline{r}(t) := \underline{i}\, a\cos^3 t + \underline{j}\, b\sin^3 t$ $\qquad a>0,\; b>0$

$t \in [0, 2\pi]$

ASZTROIS : egy rögzített körön belül csúszás nélkül legördülő 4-szer kisebb sugarú kör egy rögzített pontja által leírt görbe.



Mekkora az asztrois által határolt terület?

$x(t) = a\cos^3 t \rightsquigarrow \frac{dx}{dt} = -3a\cos^2 t\sin t$

$y(t) = b\sin^3 t \rightsquigarrow \frac{dy}{dt} = 3b\sin^2 t\cos t$

$$\text{mes}\, A = \frac{1}{2}\oint_{r} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a\cos^3 t\cdot 3b\sin^2 t\cos t + b\sin^3 t\, 3a\cos^2 t\sin t\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3ab\,\underbrace{(\cos^4 t\sin^2 t + \sin^4 t\cos^2 t)}_{\cos^2 t\sin^2 t}\,dt = \frac{3ab}{8}\int_0^{2\pi}\underbrace{\sin^2 2t}_{\frac{1-\cos 4t}{4}}\,dt = \ldots = \frac{3ab\pi}{8}$$

435/

<u>Éml.</u> szükséges feltétel potenciálfv létezésére:

$G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $f: G \to \mathbb{R}^n$ diffható.

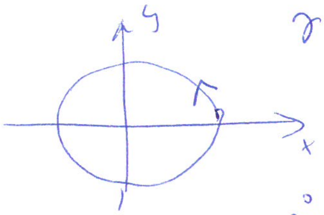
Ha f-nek $\exists$ primitív fv-e G-n, akkor

$$\partial_i f_j(x) = \partial_j f_i(x) \qquad \forall x \in G$$
$$i,j = 1,\dots,n$$

<u>Állítás.</u> nem elégséges:

pl. $f(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$

↳ $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$, de



$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$

$\dot\gamma(t) = (-R\sin t, R\cos t)$

$f(\gamma(t)) = \left(-\frac{\sin t}{R}, \frac{\cos t}{R} \right)$

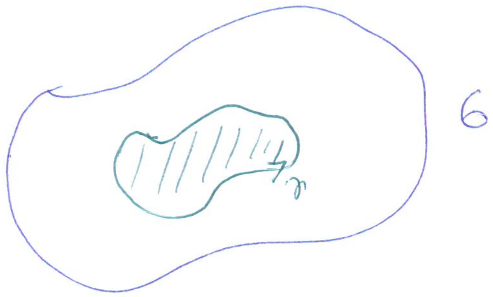
↳ $\oint_\gamma f(\gamma)\,d\gamma = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = 2\pi \neq 0$

$\Downarrow$

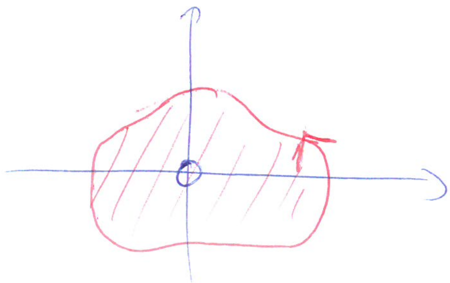
$\nexists$ primitív fv-e
(nem konzervatív erőtér)

436/

Def: $G \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz egyszeresen összefüggő, ha G összefüggő és $\forall$ G-ben fekvő egyszerű zárt görbe által határolt tartomány része G-nek.



előbb $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nem egyszeresen összefüggő



TÉTEL:
- $G \subset \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő nyílt halmaz
- $f = (f_1, f_2) : G \to \mathbb{R}^2$ folytonosan diffható

f-nek $\exists$ primitív függvénye G-n $\iff$ $\partial_2 f_1(x,y) = \partial_1 f_2(x,y)$ $\forall (x,y) \in G$

437)

Biz. szükségességet láttuk.

elégségességhez:

elég látni: $\oint_\gamma f = 0$

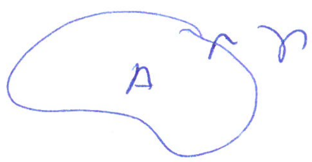
$\forall \gamma$ G-ben futó sokszögre

(a többi rektifikálható görbe közelíthető sokszögekkel)

! $\gamma : [a,b] \to G$ a sokszög szakaszonként sima paraméterezése + irányítással

$$\oint_\gamma f = \int_\gamma f_1\,dx + \int_\gamma f_2\,dy \underset{\text{Green-tétel}}{=} -\iint_A \frac{\partial f_1}{\partial y}\,dx\,dy + \iint_A \frac{\partial f_2}{\partial x}\,dx\,dy =$$

G egyszeresen összefüggő $\Rightarrow A \subset G$



$$= -\iint_A \frac{\partial f_2}{\partial x}\,dx\,dy + \iint_A \frac{\partial f_2}{\partial x}\,dx\,dy = 0$$

$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$

!

Visszatérés a példára:

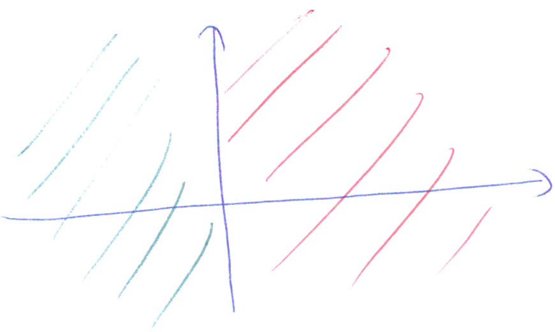
$$f(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2} \,,\, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$$

f-re teljesülnek a feltételek $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$-n.

$$\Downarrow$$

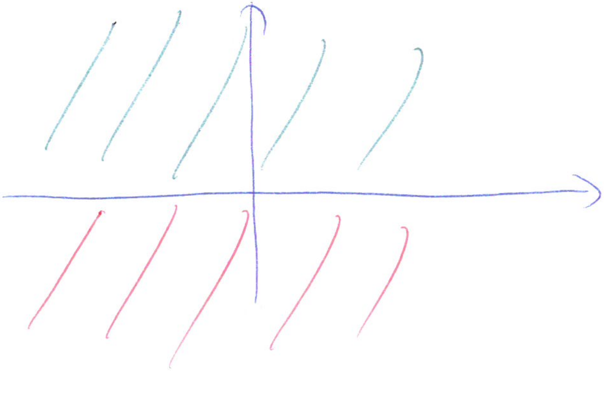
f-nek $\exists$ primitív függvénye G $\forall$ egyszeresen összefüggő részhalmazán.

Pl) • Ha $\{(x,y) : x > 0\}$ vagy $\{(x,y) : x < 0\}$ félsíkok (nyíltak)



$F(x,y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C$ potenciálfv (HF)

• Ha $\{(x,y) : y > 0\}$ vagy $\{(x,y) : y < 0\}$



$F(x,y) = -\operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ potenciálfv (HF)

139/

$$\Downarrow$$

$\forall$ síknegyedben csak egy konstansban térhetnek el egymástól

$$\Downarrow$$

konstruálható potenciálfv $\forall$ origón átmenő félegyenes elhagyásával keletkező halmazon, de $\mathbb{R}^2$-n nem!

<u>Megj</u>

$$f(x,y) := P(x,y)\underline{i} + Q(x,y)\underline{j}$$

$$\to \operatorname{rot} f = \nabla \times f = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \underline{i}\cdot 0 - \underline{j}\cdot 0 + \underline{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

ennek az ismeretében a Green-tétel:

$$\oint_{\gamma} f\, d\underline{r} = \iint_{A} \operatorname{rot} f\, dA \qquad \partial A = \gamma$$

(az általában is igaz lesz $\equiv$ Stokes-tétel)

vagyis a Green-tétel a Stokes-tétel speciális (síkbeli) alakja.

450)

Általánosítás $\mathbb{R}^n$-re

Def. $G \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $\varphi : [\alpha, \beta] \to G$ G-ben fekvő pofs. zárt görbe.

φ görbe G-ben összehúzható, ha megadható

$Q = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \xi \le 1, 0 \le \eta \le 1\}$ négyzetlapnak

G-be vezető folytonos $q: Q \to G$ leképezése, hogy

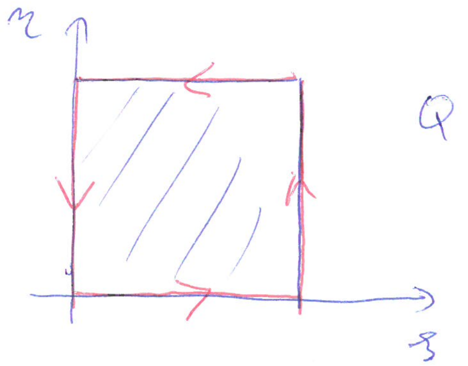
$\forall\ t \in [0,1]$-re :

$$q(t,0) = \varphi\left(\alpha + t\,\frac{\beta-\alpha}{4}\right)$$

$$q(1,t) = \varphi\left(\alpha + (1+t)\,\frac{\beta-\alpha}{4}\right)$$

$$q(1-t,1) = \varphi\left(\alpha + (2+t)\,\frac{\beta-\alpha}{4}\right)$$

$$q(0,1-t) = \varphi\left(\alpha + (3+t)\,\frac{\beta-\alpha}{4}\right)$$



$\Rightarrow$ Q határát végigjárva $q(\xi,\eta)$ φ görbéjét járja végig

$\Downarrow$

$q(Q)$ felületdarab pereme φ képe (görbe)

441)

Megj: Miért hívják önmagukra húzhatónak?

$0 \leq \lambda \leq 1$ esetén

$$q_\lambda(\xi,\eta) := ((1-\lambda)\xi, (1-\lambda)\eta) \qquad (\xi,\eta)\in Q$$

$h_\lambda := q \circ q_\lambda \rightsquigarrow$ • $\lambda=0$ esetén $h_0 = q$

• $\lambda = 1$ esetén h_1 Q-t $q(0,0)$-ba viszi

$\Longrightarrow$ $q(Q)$ felületdarabot (és vele φ görbe képét) úgy lehet folytonosan deformálni, hogy λ 0-ról 1-re növelésekor G-n belül maradunk és a görbe 1 pontra húzódik össze.

$\Downarrow$

Def. $T \subset \mathbb{R}^2$ egyszeresen összefüggő tartomány, ha összefüggő nyílt halmaz és ha $\forall$ T-ben fekvő folytonos zárt görbe T-ben önmagára húzható.

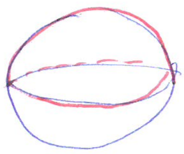
Megj: (alternatív def)

Az egyszerű F felületdarab egyszeresen összefüggő, ha egyszeresen összefüggő $D \subset \mathbb{R}^2$ síktartomány folytonos képe.

442

Pl

- félgömb (felület): egyszeresen összefüggő

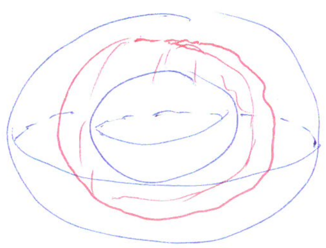


- lyukas félgömb: nem egyszeresen összefüggő

Def. $V \subset \mathbb{R}^3$ <u>egyszeresen összefüggő térbeli tartomány</u>, ha

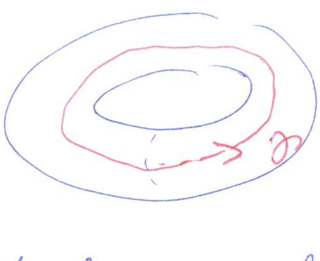
$\forall\ \gamma \subset V$ önmetszésmentes sima, egyszerű zárt görbére található V-ben fekvő egyszeresen összefüggő F felületdarab, amelynek határa γ.

Pl:
- 2 koncentrikus gömbfelület közötti térrész egyszeresen összefüggő.



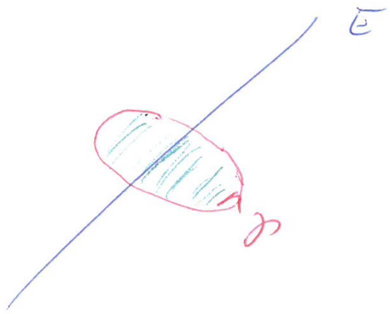
- tórusz nem egyszeresen összefüggő (kétszeresen összefüggő)

↑ 1 vágással egyszeresen összefüggő



- $\mathbb{R}^n$-ben $\forall$ konvex nyílt halmaz egyszeresen összefüggő
- $\mathbb{R}^3$-ban $\forall$ E egyenes elhagyásával kapott térrész <u>nem</u> egyszeresen összefüggő

443/



TÉTEL Ha $T \subset \mathbb{R}^n$ egyszeresen összefüggő és

$f: T \to \mathbb{R}^n$ diffható, melyre

$$\partial_i f_j = \partial_j f_i \quad \forall\, i,j = 1,\dots,n,$$ akkor

f-nek T-ben $\exists$ primitív függvénye.

Biz: nélkül – ld diffgeo 2. – differenciálformák.