539/

Taylor-sorok és hatványsorok

Eml: Taylor-polinom:

f n-szer diffható x_0-ban

$\hookrightarrow$ $$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$ f x_0 körüli n-ed fokú Taylor-polinomja

Taylor-tétel:

ha f $(n+1)$-szer diffható $[x_0,x]$ vagy $[x,x_0]$ intervallumban

$\hookrightarrow$ $\exists\ \xi$ x_0 és x között, hogy

$$f(x)=\underbrace{f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{T_n(x)}+\underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}$$

Lagrange-féle maradéktag

$\Downarrow$

Def: Legyen f akárhányszor diffható x_0-ban. A

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$ függvénysort az f függvény x_0 ponthoz tartozó Taylor-sorának nevezzük.

Megj: $x_0=0$ körüli Taylor-sor $\equiv$ Mc Laurin-sor

540)

Példák

① $\forall$ p polinomot, $\forall$ x_0 ponthoz tartozó Taylor-sora mindenütt előállítja

Tfh $\deg p = n$ (n-ed fokú polinom) $\rightsquigarrow$ $p^{(k)} \equiv 0$ $\quad k > n$

$$\hookrightarrow \quad p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

② $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ $\qquad x_0 = 0$ körüli Taylor-sora?

$f(0) = 1$

$f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ $\qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = +\dfrac{2}{(1-x)^3}$ $\qquad f''(0) = 2$

$f'''(x) = \dfrac{2\cdot 3}{(1-x)^4}$ $\qquad f'''(0) = 2\cdot 3$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ $\qquad f^{(n)}(0) = n!$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad x \in (-1,1)$$

geometriai sor

541/

(3) $f(x)=e^x$ $x_0=0$ körüli Taylor-sora

$f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1$

$\hookrightarrow$ $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ (KT ellenőrizhető)

Áll: Ha f akárhányszor deriválható az I intervallumban és $\exists$ $K>0$, hogy $|f^{(n)}(x)|\le K$ $\forall x\in I$ $\forall n\in\mathbb{N}$ (egyenletesen korlátosak),

akkor $\forall$ $x_0\in I$-beli Taylor-sora f-et minden $x\in I$-ben

$\Downarrow$

$e^x, \sin x, \cos x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$ függvényeket előállítja a Taylor-soruk $x_0=0$ körül.

Nem minden függvényt állít elő az x_0-beli Taylor-sora x_0 pont körnvy. kisi környezetben:

Pl1 $g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{2^k}\cos\left(k^2x+\frac{\pi}{4}\right)$ egyenletesen konvergens

$\hookrightarrow$ • mindenütt akárhányszor diff.ható

• belátható:
$$|g^{(n)}(0)|>\frac{n^{2n}}{2^n}\quad \forall n\text{-re}$$

532/

$\Downarrow$

$x \neq 0$

$$\left|\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n\right| > \frac{n^{2n}}{2^n\cdot n^n}\cdot|x|^n = \left(\frac{n|x|}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

$\Downarrow$

g függvény 0-beli Taylor-sora egyetlen $x \neq 0$ pontban sem konvergens

Megj: (1) $\exists$ olyan akárhányszor diff.ható függvény, melynek $\forall\, x_0$-beli Taylor-sora egyetlen $x \neq x_0$ pontban sem konvergens.

(2) $\exists$ olyan fv, melynek Taylor-sora konvergens, de nem állítja elő a függvényt.

pl: $f(x) = e^{-1/x^2}$ $x \neq 0$

$f(0) = 0$

$\Downarrow$

f akárhányszor deriválható és $f^{(n)}(0) = 0$ $\forall\, n$-re

$\Downarrow$

f 0-körüli Taylor-sora $\equiv 0$ fv.

$\Downarrow$

nem állítja elő f-et egyetlen $x \neq 0$ pontban sem.

543/

<u>Def</u>: Az f függvény <u>analitikus x_0-ban</u>, ha f akárhányszor differenciálható x_0-ban és az x_0-beli Taylor-sora előállítja f-et az x_0 pont egy környezetében.

<u>Pl</u>: $e^x, \sin x, \cos x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x$ $\forall$ pontban analitikusak

<u>TÉTEL</u>: Legyen f akárhányszor differenciálható az I intervallumban és t.f.h. $\exists\, c>0$, melyre $|f^{(n)}(x)| \le (cn)^n$ $\forall x\in I$, $n>0$

$\Rightarrow$ f I $\forall$ pontjában analitikus.

<u>Biz</u>: $x_0 \in I$ tetsz.

Taylor-tétel

$\hookrightarrow$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $x\in I\setminus\{x_0\}$ $\exists\, \xi\in I$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| = \left| \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \right| \cdot |x-x_0|^n \le \frac{(cn)^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n} |x-x_0|^n =$$

$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$

$= (ec)^n \cdot |x-x_0|^n$

+ feltétel $\leadsto$ $|f^{(n)}(\xi)| \le (cn)^n$

$\Rightarrow$ ha $|x-x_0| < \frac{1}{ec} = \eta$ és $x\in I$

$$\Longrightarrow \left((ec)|x-x_0|\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

534)

$$\Rightarrow \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Downarrow$

f-et előállítja az x_0 körüli Taylor-sora $(x_0-r, x_0+r) \cap I$-ben

o!

<u>Emlék.</u> Az $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ x_0 körüli hatványsor <u>konvergenciatartománya</u> (KT)

azon x pontok halmaza, melyekre a fenti sor konvergens.

$KT \neq \emptyset$, hiszen $x_0 \in KT$.

$\Rightarrow \exists\ R \geq 0$ <u>konvergenciasugár</u>, melyre $(x_0-R, x_0+R) \subset KT$

(láttuk, hogy ha $c \in \mathbb{R}$-ben a hatványsor konvergens, akkor

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$\Rightarrow \forall\ x \in [-|c|, |c|]$-re is konvergens

$\Downarrow$

<u>Megj</u> a tételeket elég 0 körüli hatványsorokra kimondani:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \xrightarrow[z:=x-x_0]{} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$ $z_0=0$ körüli hatványsor

Eml. (Cauchy–Hadamard formula)

A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara:

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad , \text{ ahol}$$

- $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ esetén $R=\infty$ és $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\mathbb{R}$-en konvergens
- $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$ esetén $R=0$ és $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ csak 0-ban konvergens

Megj. 1) $R = \limsup\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ (hányadoskritériumból)

2) Ha $0<R<\infty$, akkor a sor konvergenciatartománya a $[-R,R]$, $[-R,R)$, $(-R,R]$, $(-R,R)$ intervallumok valamelyike.

Példák ① $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^{n-1}}{n}}_{a_n} (x-3)^n$ konvergenciatartománya?

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \quad \Rightarrow \quad R=1$$

$\Rightarrow$ és mivel $x_0=3$ $\Rightarrow$ $(3-1, 3+1) = (2,4) \subset KT$

536/

KT határai:

- $x=2 \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(2-3)^n = \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(-1)^n = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$\Downarrow$ harmonikus sor

$\Rightarrow 2 \notin KT$ ↳ divergens

- $x=4$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(4-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ Leibniz-sor

$\Downarrow$

$\Rightarrow 4 \in KT$ konvergens

↳ $KT = (2,4]$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n$ konv. tartománya?

$x_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1 \rightsquigarrow R=1$

↳ $(-1,1) \subset KT$

- $x=-1 \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(-1)^n$ Leibniz-sor $\rightsquigarrow$ konv $\rightsquigarrow -1 \in KT$
- $x=1 \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konv $\rightsquigarrow 1 \in KT$

$\left(\sum_n \frac{1}{n^\alpha} \text{ konv} \iff \alpha > 1\right) \Rightarrow KT = [-1,1]$

547)

(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$a_n = \frac{1}{n!}$ $\qquad \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \to \infty$

$\Rightarrow R = \infty \qquad \rightsquigarrow$ $\mathbb{R}$-en konvergens

$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \right)$

Korábban bizonyítottuk:

TÉTEL: $\forall$ hatványsor egyenletesen konvergens a konvergenciatartomány bármely korlátos és zárt részintervallumán.
Minden hatványsor folytonos a teljes konvergenciatartományon.

Több is igaz:

TÉTEL: Tfh a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergenciasugara: $R > 0$.
Legyen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\forall$ $|x| < R$-re. Ekkor f akárhányszor deriválható a $(-R, R)$ intervallumon és

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n \cdot x^{n-k}$$

$\forall$ $|x| < R$-re és $k \geq 0$-ra.

548)

Megj.: • analitikus függvények alakhelyen deriválhatók az értelmezési tartomány belsejében

• a tétel azt mondja ki, hogy a deriválás és a $\sum$ hatványsorok esetén felcserélhető minden további megkötés nélkül.

Biz.

belátjuk, hogy $k=1$-re: $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$ hatványsor egyenletesen konv. $[-q,q]$-n $\forall\ 0<q<R$-re:

! $r \in (q,R)$ fix $\leadsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ konvergens

$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n r^n = 0$

$\hookrightarrow \exists\ n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $|a_n| < \underset{\overset{|||}{\varepsilon}}{\frac{1}{r^n}}$ $\forall n > n_0$-ra

$\Longrightarrow$ ha $|x| \le q \Longrightarrow |n \cdot a_n \cdot x^{n-1}| \le n \cdot \frac{1}{r^n} q^{n-1} = \frac{1}{q} n \left(\frac{q}{r}\right)^n$

$\forall n > n_0$

de $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{q}{r}\right)^n$ sor konvergens (gyökkritérium, mivel $\frac{q}{r} < 1$)

$\Downarrow$ Weierstrass-kritérium

555)

$\Downarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$ egyenletesen konvergens $[-q,q]$-ban

az igaz $\forall$ $0<q<R$-re

$\Downarrow$ fv sorokra vonatkozó tétel

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor összege deriválható $(-R,R)$-ben és

$$f'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty} a_n n \cdot x^{n-1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

ugyanezt megismételve erre a hatványsorra $(-R,R)$-ben:

$$f''(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n n x^{n-1}\right)'=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}$$

$\vdots$

k szerinti indukció:

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} a_n n \cdot (n-1) \dots (n-k+1) x^{n-k}$$

!

550)

Köv:

Tegyük fel, hogy a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ hatványsor

konvergens (x_0-R, x_0+R)-ben és ott az összege $f(x)$.

Ekkor $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ $\forall n \in \mathbb{N}$-re, azaz

a hatványsor megegyezik az összegfüggvényének az x_0-beli

Taylor-sorával.

Megj: A tétel azt mondja, hogy egy f fv pontosan egyféleképpen

fejthető hatványsorba egy pont körül.

Biz.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad x \in (x_0-R, x_0+R)$$

$\Downarrow$ Tétel

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\cdot a_n (x-x_0)^{n-k}$$

$\Downarrow$

$$f^{(k)}(x_0) = k(k-1)\dots(k-k+1)\cdot a_k \implies a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k(k-1)\dots(k-k+1)} = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

csak $n=k$ tag $\neq 0$

!

551)

Példák

① $g(x) := \dfrac{1}{(1+2x)^2}$ $\qquad g^{(2021)}(0) = ?$

Vegyük ezt: $f(x) := \dfrac{1}{1+2x} \rightsquigarrow f'(x) = -\dfrac{2}{(1+2x)^2}$

Így $g(x) = -\dfrac{1}{2} f'(x)$

$$f(x) = \frac{1}{1+2x} = \frac{1}{1-(-2x)} \underset{\uparrow}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n$$

ha $|-2x| = 2|x| < 1$, azaz $|x| < \frac{1}{2}$ $\qquad KT = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$g(x) = -\frac{1}{2} f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n\right)' \underset{\uparrow}{=} -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n 2^n x^n\right)' =$$

$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ korlátos zárt részintervallumain egyenletes konv (Tétel)

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^n n x^{n-1} \qquad KT = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Köv:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^n n x^{n-1}$$

5524

mindkét oldalon tekintsük x^{2021} együtthatóját.

$$\frac{g^{(2021)}(0)}{2021!} = -\frac{1}{2}(-1)^{2022}\, 2^{2022} \cdot 2022$$

$$\Rightarrow \boxed{g^{(2021)}(0) = -2021! \cdot 2^{2022} \cdot 1011}$$

② Adjuk meg $f(x) = (1+3x+x^2)e^x$ $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorát!

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\hookrightarrow x e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} \quad \rightsquigarrow \cancel{(1+x)e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}}$$

$$\Big\Downarrow \frac{d}{dx}$$

$$(xe^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{n!}$$

$$\Big\Downarrow \cdot x$$

$$(x+x^2)e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{n!} x^{n+1}$$

553/

$$\Downarrow \quad \frac{d}{dx}$$

$$[(x+x^2)e^x]' = (1+2x)e^x + (x+x^2)e^x =$$

$$= (1+3x+x^2)e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} x^n$$

Köv: Egy függvény pontosan akkor analitikus x_0-ban, ha van olyan x_0 közepű hatványsor, amely előállítja f-et x_0 pont egy környezetében.

Def: $f: I \to \mathbb{R}$ függvény ~~at~~ analitikus az I intervallumban, ha $\forall$ pontjában analitikus.

Pl: (1) $f(x) = \frac{1}{x}$ minden $a \neq 0$ pontban analitikus:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a+(x-a)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-a}{a}} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-a}{a}\right)^n =$$

$$\left|\frac{x-a}{a}\right| < 1$$

azaz $|x-a| < |a|$

$$= \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^n} (x-a)^n$$

55/2

Binomiális sorfejtés

$$f(x) = (1+x)^{\alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$x_0 = 0$ körüli Taylor-sora: $\quad f(0) = 1$

$$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \qquad f'(0) = \alpha$$

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \qquad f''(0) = \alpha(\alpha-1)$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \qquad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$$

$$\Downarrow$$

Taylor-sora: $$\sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}}^{a_n} x^n$$

Megmutatjuk, hogy $(-1,1)$-en a sor előállítja $f(x)$-et:

- $\alpha \in \mathbb{N} \rightsquigarrow a_n = 0$, ha $n \geq \alpha - 1$

$$\hookrightarrow \sum_{n=0}^{\alpha-1} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\alpha-1} \binom{\alpha}{n} x^n$$

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} = \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!} = \binom{\alpha}{n}$$

binomiális tétel ✓

555/

• $\alpha \notin \mathbb{N}$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \frac{(n+1)!}{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)} = \frac{n+1}{\alpha-n} =$$

$$= \frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{\alpha}{n}-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \qquad \Rightarrow R=1$$

$\Rightarrow$ konvergens $(-1,1)$-n.

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

$\Downarrow$ diff|ható $(-1,1)$-n és

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^{n-1} \qquad \text{konvergens } (-1,1)\text{-ben}$$

$/ \cdot (1+x)$

$$f'(x)\cdot(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}(x^n + x^{n-1}) =$$

$$= \alpha(x+1) + 2\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(x^2+x) + 3\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}(x^3+x^2) + \dots =$$

$$= \alpha + x\underbrace{\left(\alpha + 2\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\right)}_{\alpha^2} + x^2\underbrace{\left(2\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} + 3\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}\right)}_{\frac{\alpha^2(\alpha-1)}{2!}} + \dots$$

$$= \alpha \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

556/

$\Rightarrow \quad (1+x)f'(x) = \alpha f(x) \qquad \forall\, x \in (-1,1)$

$y = f(x)$ helyettesítés $\rightsquigarrow \quad y' = \dfrac{\alpha y}{1+x}$ differenciálegyenlet megoldása $(-1,1)$-en

mivel $\displaystyle\int \frac{\alpha}{1+x}\,dx = \alpha \ln|1+x| + C$

$$\left(\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha y}{1+x} \quad \rightsquigarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{\alpha}{1+x}\,dx \right.$$

$$\ln|y| = \alpha \ln|1+x| + C$$

$$\hookrightarrow \quad y = C \cdot e^{\alpha \ln|1+x|} = C \cdot (1+x)^{\alpha}$$

$$y(0) = 1 = C$$

$\Rightarrow \quad f(x) = (1+x)^{\alpha}$

vagyis $\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n = (1+x)^{\alpha}$

binomiális együtthatól $\displaystyle \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$

általánosítás $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\binom{\alpha}{0} = 1} \qquad \boxed{\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}}$$

557/

Emel:

$$\boxed{(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^{n} \qquad x \in (-1,1),\ \alpha \in \mathbb{R}}$$

binomiális sorfejtés

Példák

(1) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{16-3x^3}}$ $x_0 = 0$ körüli Taylor-sora

$f^{(12)}(0) = ?$, $f^{(13)}(0) = ?$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16-3x^3}} = (16-3x^3)^{-1/4} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3x^3}{16}\right)^{-1/4} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/4}{n} \left(\frac{3x^3}{16}\right)^{n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/4}{n} \left(\frac{3}{16}\right)^{n} x^{3n} =$$

$\uparrow$

$\left|\frac{3x^3}{16}\right| < 1$

$|x|^3 < \frac{16}{3}$

$|x| < \sqrt[3]{\frac{16}{3}}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\binom{-1/4}{1}\frac{3}{16}x^3 + \frac{1}{2}\binom{-1/4}{2}\left(\frac{3}{16}\right)^2 x^6 + \dots$$

$$\frac{(-1/4)(-5/4)}{1} = \frac{5}{16}$$

$$\frac{(-1/4)(-5/4)(-9/4)}{2} = -\frac{45}{32}$$

Másrészről

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/4}{n} \left(\frac{3}{16}\right)^{n} x^{3n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^{k}$$

558/

- $f^{(12)}(0) = ?$ $\rightsquigarrow$ x^{12} együtthatóinak összehasonlítása:

$3n = 12 \Rightarrow n = 4$

$$\frac{1}{2} \cdot \binom{-1/4}{4} \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^4 = \frac{f^{(12)}(0)}{12!}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{f^{(12)}(0) = 12! \, \frac{1}{2} \cdot \binom{-1/4}{4} \cdot \left(\frac{3}{16}\right)^4}}$$

- $f^{(13)}(0) = ?$ $\rightsquigarrow$ x^{13} együtthatóinak összehasonlítása

$3n = 13$: ↯ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{f^{(13)}(0) = 0}}$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{9+x^4}}$

adjunk becslést $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$ integrálra negyedfokú polinommal való közelítés esetén!

$$f(x) = (9+x^4)^{-1/2} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{x^4}{9}\right)^{-1/2} \underset{\uparrow}{=}$$

$$\left|\frac{x^4}{9}\right| < 1 \rightsquigarrow |x| < \underset{\overset{\vee}{1}}{\sqrt[4]{9}}$$

5)5)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{9+x^4}} \underset{|x|<\sqrt[4]{9}}{=} \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \left(\frac{x^4}{9}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{1}{9^n} x^{4n} =$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 + \binom{-1/2}{1} \frac{1}{9} x^4 + \binom{-1/2}{2} \frac{1}{81} x^8 + \dots \right)$$

egyenletesen konv. $(-1,1)$-ben

$\Downarrow$ tagonként integrálható

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9+x^4}}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{1}{9^n} x^{4n} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{1}{9^n} \underbrace{\int_0^1 x^{4n}\,dx}_{\left[\frac{x^{4n+1}}{4n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{4n+1}} =$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} \frac{1}{9^n} \frac{1}{4n+1}$$

megkaptuk az integrált numerikus sor alakban.

560/

vegyük őrme:

$$\binom{-1/2}{0} = 1$$

$$\binom{-1/2}{1} = -1/2$$

$$\binom{-1/2}{2} = \frac{(-1/2)(-3/2)}{2!} = \frac{3}{8}$$

$$\binom{-1/2}{3} = \frac{(-1/2)(-3/2)(-5/2)}{3!} = -\frac{15}{48}$$

$\vdots$

$\Downarrow$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{9+x^4}}\,dx = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\frac{1}{9^n}\,\frac{1}{4n+1}$$

Leibniz-sor

$$\approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\,\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{81}\cdot\frac{1}{9}$$

az elhövetett hiba (Leibniz-sor)

legfeljebb:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{15}{48}\cdot\frac{1}{9^3}\cdot\frac{1}{13}$$

(tetszőleges pontossággal megoldható az integrál!)

561

3.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} \underset{|x|<1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} x^{2n}$$

$\forall \quad x \in (-1,1)$-re $\rightsquigarrow$ $[0,x]$-n a sor egyenletes konvergens

$\hookrightarrow$

$$\arcsin x \underset{\arcsin 0 = 0}{=} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} t^{2n} \right) dt =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} \underbrace{\int_0^x t^{2n}\, dt}_{\left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^x = \frac{x^{2n+1}}{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

ellenőrizhető: (HF)

$$\binom{-1/2}{n} = (-1)^n \binom{2n}{n} \cdot \frac{1}{4^n}$$

$\hookrightarrow$

$$\boxed{\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n (2n+1)} x^{2n+1}}$$

$|x|<1$.

Alkalmazások, sorfejtési technikák

① Generátorfüggvények módszere

módszer rekurziók zárt alakba hozására

Pl 1/ T/h $a_0 = 1$, $a_1 = -3$

$$a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2} \qquad n \geq 2$$

T/h

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

generátorfv
konvergens

$$2x F(x) = 2a_0 x + 2a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + \dots + 2a_{n-1} x^n + \dots$$

$$x^2 F(x) = \qquad a_0 x^2 + a_1 x^3 + \dots + a_{n-2} x^n + \dots$$

$$(1+2x+x^2)F(x) = a_0 + (a_1 + 2a_0)x + \dots + \underbrace{(a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2})}_{=0 \text{ (rekurzió) } n \geq 2} x^n + \dots$$

$$\hookrightarrow \quad (1+2x+x^2)F(x) = a_0 + (a_1 + 2a_0)x = 1 - x$$

$$F(x) = \frac{1-x}{(1+x)^2} \quad \rightsquigarrow \quad \text{zárt alak a generátor fv-re}$$

$\Downarrow$

fejtsük 0 körül sorba!

563)

$$\frac{1}{1+x} \underset{|x|<1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$\Downarrow$ hatványsor deriválható

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \cdot x^{n-1} \qquad / \cdot (x-1)$$

$$F(x) = \frac{1-x}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \, (x-1) \, x^{n-1} =$$

$$= \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \, x^n}_{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \, x^n} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n x^{n-1}}_{} =$$

$$\cancel{-1+2x-x^2+x^3-\dots = -(}$$

$$-1+2x-3x^2+4x^3 \dots = -(\underbrace{1-2x+3x^2-\dots}_{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \, x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a_n = (-1)^n (2n+1)}$$ zárt alak a_n-re.

564)

P1 2)

$a_0 = 2$, $a_1 = 5$

$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \qquad n \geq 2$

↳ $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$

$-5xF(x) = \quad -5a_0 x - 5a_1 x^2 - \dots - 5a_{n-1} x^n + \dots$

$6x^2 F(x) = \quad 6a_0 x^2 + \dots + 6a_{n-2} x^n + \dots$

$$(1-5x+6x^2)F(x) = a_0 + (a_1 - 5a_0)x + \dots + \underbrace{(a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2})}_{0 \text{ , ha } n \geq 2} x^n + \dots$$

↳ $(1-5x+6x^2)F(x) = a_0 + (a_1 - 5a_0)x = 2 - 5x$

$$F(x) = \frac{2-5x}{1-5x+6x^2} = \frac{2-5x}{(1-2x)(1-3x)} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-3x} =$$

$$= \frac{A(1-3x) + B(1-2x)}{(1-2x)(1-3x)} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} A = 1 \\ B = 1 \end{array}$$

$$F(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(2^n + 3^n)}_{a_n} x^n$$

$|2x| < 1$ & $|3x| < 1$

$|x| < \frac{1}{2}$ $\quad \boxed{|x| < \frac{1}{3}}$

$\boxed{a_n = 2^n + 3^n}$ $\quad n \in \mathbb{N}$

565/

2. Adjuk meg $f(x)=e^{\operatorname{arctg} x}$ $x_0=0$ körüli Taylor-sorát

$$f'(x)=e^{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{1}{1+x^2}=f(x)\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$\hookrightarrow$ $f(x)=(1+x^2)\cdot f'(x)$

Tfh $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$ egy konv

$\downarrow \frac{d}{dx}$

$$f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots$$

$$(1+x^2)f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+5a_5x^4+\ldots$$

$$+\qquad 2a_1x^2+2a_2x^3+3a_3x^4 \quad =$$

$$=a_1+2a_2x+(2a_1+3a_3)x^2+(2a_2+4a_4)x^3+(3a_3+5a_5)x^4+\ldots$$

$$\underset{f(x)}{=}a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\ldots$$

$\Rightarrow$ $a_1=a_0$ $\rightarrow$ $a_1=a_0$

$2a_2=a_1$ $\rightarrow$ $a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}a_0$

$2a_1+3a_3=a_2$ $\rightarrow$ $a_3=\frac{1}{3}\underbrace{(a_2-2a_1)}_{\frac{1}{2}a_0-2a_0=-\frac{3}{2}a_0}=-\frac{1}{2}a_0$

$2a_2+4a_4=a_3$

$3a_3+5a_5=a_4$ $\searrow$

$\vdots$

$a_4=\frac{1}{4}(a_3-2a_2)=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}a_0-a_0\right)=-\frac{3}{8}a_0$

$\vdots$

566/

$$f(0) = e^{\operatorname{arctg} 0} = e^0 = 1 = a_0$$

$$\Downarrow$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{1}{6}, \quad a_4 = -\frac{7}{24}, \ldots$$

$$\Rightarrow \quad e^{\operatorname{arctg} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{7x^4}{24} + \ldots$$

$$|x| < 1$$

(3) $f(x) = e^x$ $\quad x_0 = 5$ körüli Taylor-sora?

$$f(x) = e^x = e^{x-5+5} = e^5 \cdot e^{x-5} = e^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

(4) $f(x) = \sin x$ Taylor-sora $x_0 = 3$ körül

$$f(x) = \sin x = \sin[(x-3)+3] = \cos 3 \cdot \sin(x-3) + \sin 3 \cdot \cos(x-3) =$$

$$= \cos 3 \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{(x-3) - \frac{(x-3)^3}{3!} + \frac{(x-3)^5}{5!} + \ldots} + \sin 3 \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^{2n}}{(2n)!}}_{1 - \frac{(x-3)^2}{2!} + \frac{(x-3)^4}{4!} + \ldots} =$$

$$= \sin 3 + (x-3)\cos 3 - \frac{\sin 3}{2!}(x-3)^2 - \frac{\cos 3}{3!}(x-3)^3 + \ldots$$

567/

5.

$f(x) = a^x \qquad a>0, \; x_0 \in \mathbb{R}$ körüli Taylor-sora

$$a^x = a^{x-x_0+x_0} = a^{x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0} e^{\ln a^{x-x_0}} = a^{x_0} \cdot e^{(x-x_0)\ln a} =$$

$$= a^{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(x-x_0)\ln a]^n}{n!} = a^{x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} (x-x_0)^n$$

analitikus $\mathbb{R}$-en.

6.

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$S := \lim_{n\to\infty} S_n$$

Biz be: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (S_n - S) = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

---

amit ki kellene számolni: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n+k}$ ~~[illegible]~~

$$F(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-x)^{i+j}}{i+j} \qquad |x|<1$$

$$F'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} (-x)^{i+j-1} (-1) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)(-x)^j \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} (-x)^{i-1}}_{\sum_{i=0}^{\infty} (-x)^i = \frac{1}{1+x}} =$$

568)

$$\ominus \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} (-1)(-x)^j}\frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}\sum_{j=0}^{\infty}(-x)^j \ominus$$

$$-(-x+x^2-x^3+\dots) = x-x^2+x^3-\dots = x(1-x+x^2+\dots) =$$

$$= x\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-x)^j\right)$$

$$\ominus \frac{x}{(1+x)^2} = \frac{A}{1+x} + \frac{B}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{A(1+x)^{\not 2} + B\,\cancel{(1+x)}}{(1+x)^2} \leadsto \begin{array}{l} A = 1 \\ B = -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$\int_0^x F'(t)\,dt = [F(t)]_0^x = F(x) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{F(0)}} = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt - \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}\,dt =$$

$$= [\ln(1+t)]_0^x + \left[\frac{1}{1+t}\right]_0^x = \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} - 1$$

$$\hookrightarrow F(x) = \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} - 1$$

$$F(1) = \ln 2 + \frac{1}{2} - 1 = \ln 2 - \frac{1}{2} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$$