Megjegyzések, kiegészítések az integrálátalakító tételekhez

TÉTEL: $B(\underline{r}, \delta)$ $\underline{r}$ középpontú, δ sugarú gömb $\mathbb{R}^3$-ben

$\underline{v}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező

$\mathrm{vol}\, B(\underline{r},\delta) := \int_{B(\underline{r},\delta)} dV$ $\quad B(\underline{r},\delta)$ térfogata

Ekkor

$$\mathrm{div}\, \underline{v}(\underline{r}) = \lim_{\delta \to 0+} \frac{1}{\mathrm{vol}\, B(\underline{r},\delta)} \int_{\partial B(\underline{r},\delta)} \underline{v}(\underline{r}) \cdot \underbrace{d\underline{F}}_{\underline{n}\, dF}$$

Biz:

$$\frac{1}{\mathrm{vol}\, B(\underline{r},\delta)} \int_{\partial B(\underline{r},\delta)} \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{F} \underset{G-O}{=} \frac{1}{\mathrm{vol}\, B(\underline{r},\delta)} \int_{B(\underline{r},\delta)} \mathrm{div}\, \underline{v}(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{integrálási változó}}}{\underline{r}'})\, dV$$

$$\left| \mathrm{div}\, \underline{v}(\underline{r}) - \frac{1}{\mathrm{vol}\, B(\underline{r},\delta)} \int_{\partial B(\underline{r},\delta)} \underline{v}(\underline{r}')\, d\underline{F} \right| =$$

$$= \left| \mathrm{div}\, \underline{v}(\underline{r}) - \frac{1}{\mathrm{vol}\, B(\underline{r},\delta)} \int_{B(\underline{r},\delta)} \mathrm{div}\, \underline{v}(\underline{r}')\, dV \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\mathrm{vol}\, B(\underline{r},\delta)} \int_{B(\underline{r},\delta)} \left(\mathrm{div}\, \underline{v}(\underline{r}) - \mathrm{div}\, \underline{v}(\underline{r}') \right) dV \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\mathrm{vol}\, B(\underline{r},\delta)} \int_{B(\underline{r},\delta)} \underbrace{\left| \mathrm{div}\, \underline{v}(\underline{r}) - \mathrm{div}\, \underline{v}(\underline{r}') \right|}_{\wedge\ \varepsilon/2} dV \leq \frac{1}{\mathrm{vol}\, B(\underline{r},\delta)} \int_{B(\underline{r},\delta)} \frac{\varepsilon}{2}\, dV < \varepsilon$$

div $\underline{v}$ folytonos, ha $\underline{r}$ és $\underline{r}'$ elég közel van. !

Megj. Mivel a fenti tétel jobb oldala közvetlenül geometriai fogalmakat használ (térfogat, skalárszorzat)

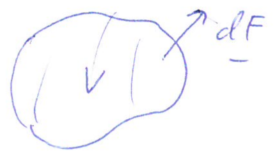
$$\Downarrow$$

$\mathrm{div}\,\underline{v}(\underline{r})$ koordinátamentes definícióját adja

$\mathrm{div}\,\underline{v}(\underline{r}) \equiv$ a $\underline{v}(\underline{r})$ vektormező forrásossága (forrássűrűsége)

Szemléltetés:

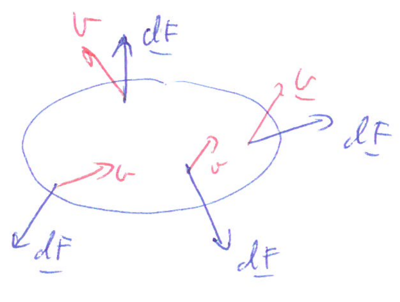
- $\underline{v}(\underline{r})$: összenyomhatatlan folyadék (állandó sűrűségű) sebességmezeje
- $V \subset \mathbb{R}^3$, $\partial V = F$ irányított felület kifelé mutató normálissal



- $\underline{v}(\underline{r})$ vektormező fluxusa F zárt felület mentén:

$$\Phi := \oint\!\!\!\oint_F \underline{v}(\underline{r})\, d\underline{F}$$

: megadja az időegység alatt F felületen átáramló folyadék mennyiségét



- Ha $\Phi = 0$ ⇝ ugyanannyi folyadék áramlik be, mint ki

  Ha $\Phi > 0$ ⇝ több megy ki, mint amennyi beáramlik

  $\Longleftrightarrow$ folyadék keletkezik bent $\equiv$ forrás

Ha $\Phi < 0$ $\rightsquigarrow$ több áramlik be, mint amennyi kifolyik

$\Downarrow$

lent eltűnik folyadék $\equiv$ nyelő

Gauss–Osztrogradszkij:

$$\Phi = \oiint_F \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{F} = \iiint_V \operatorname{div} \underline{v}(\underline{r})\,dV$$

$\|$

"összeadjuk V belsejében a forrásokat"

$\operatorname{div} \underline{v}(\underline{r}) > 0$ $\rightsquigarrow$ $\underline{r}$-ben forrás (folyadék keletkezik)

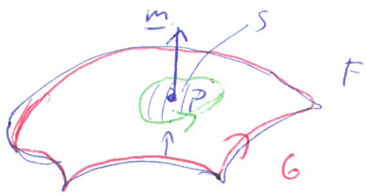
$\operatorname{div} \underline{v}(\underline{r}) < 0$ $\rightsquigarrow$ $\underline{r}$-ben nyelő (folyadék tűnik el)

Hasonlóan rotációra:

TÉTEL

Tfh $F \subset \mathbb{R}^3$ felület (egyszeresen összefüggő), $P \in F$ a felület egy pontja, $\partial F = G$

Tegyük fel, hogy az F felület határgörbéje zsugorodik a P pontba: $G \to P$



S: az adott görbe által határolt felület felszíne

Ekkor

$\underline{n}$: P-beli normálvektor (egységnyi)

$$\lim_{G \to P} \frac{1}{S} \oint_G \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} = \operatorname{rot} \underline{v}(P) \cdot \underline{n}$$

Biz.

$$\left| \operatorname{rot} \underline{v}(P)\cdot \underline{n} - \frac{1}{S}\oint_G \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r}\right| = \frac{1}{S}\left| S\, \underbrace{\operatorname{rot}\underline{v}(P)\cdot\underline{n}}_{\substack{\text{konst}\\ \text{(csak P-től függ)}}} - \iint_F \operatorname{rot}\underline{v}\, \underbrace{d\underline{F}}_{\underline{n}\cdot dS}\right|$$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{1}{S}\left| \iint_F \operatorname{rot}\underline{v}(P)\cdot\underline{n}\, dS - \iint_F \operatorname{rot}\underline{v}\cdot\underline{n}\cdot dS\right| =$$

$\iint_F dS = S$

$$= \frac{1}{S}\left| \iint_F \left(\operatorname{rot}\underline{v}(P)\cdot\underline{n} - \operatorname{rot}\underline{v}\cdot\underline{n}\right) dS\right| \le$$

$$\le \frac{1}{S}\iint_F \underbrace{\left|\operatorname{rot}\underline{v}(P)\cdot\underline{n} - \operatorname{rot}\underline{v}\cdot\underline{n}\right|}_{<\ \varepsilon} dS < \frac{1}{S}\,\varepsilon \overbrace{\iint_F dS}^{S} = \varepsilon$$

ha $G \to P$ (zsugorítjuk a görbe a P pontra),

hiszen $\operatorname{rot}\underline{v}$ folytonos

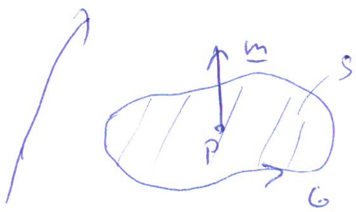
Szemléltetés:

!

$$\frac{1}{S}\oint_G \underline{v}(\underline{r})\,d\underline{r} \xrightarrow[G \to P]{} \operatorname{rot}\underline{v}(P)\cdot\underline{n}$$

$\uparrow$

P-beli örvényerősség



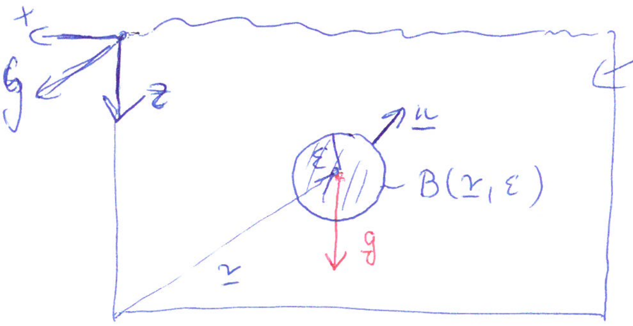
cirkuláció (örvényesség) „sűrűsége”

$\operatorname{rot}\underline{v}$: örvényesség mértéke

490)

Integrálátalakító tételek néhány következménye

1 Hidrosztatikus nyomás



folyadék : sűrűsége $= \rho$

p : nyomás

$\Downarrow$

$B(\underline{r},\varepsilon)$ gömbre ható nyomásból származó erő:

$$-\int_{\partial B(\underline{r},\varepsilon)} p\,\underline{n}\cdot dA \equiv -\int_{\partial B(\underline{r},\varepsilon)} p\,d\underline{F}$$

$\underline{n}$: kifelé mutat

z : a mélységet méri

$$-\int_{\partial B(\underline{r},\varepsilon)} p\,d\underline{F} \underset{P}{=} -\int_{B(\underline{r},\varepsilon)} \nabla p \cdot dV$$

Gauss–Osztrogradszkij 1 komponensű verzióra

$\hookrightarrow$ $$\int_V \frac{\partial u}{\partial x}\,dV = \int_{\partial V} n_1 u\,dA$$

gravitációs erő hatása: $$\int_{B(\underline{r},\varepsilon)} \rho\,\underline{g}\,dV$$

$\Rightarrow$ a folyadékgömb nyugalomban van $\Rightarrow$ $$\int_{B(\underline{r},\varepsilon)} \rho\,\underline{g}\,dV - \int_{B(\underline{r},\varepsilon)} \nabla p\,dV = \underline{0}$$

4g4)

$$\Rightarrow \int_{B(\underline{x},\varepsilon)} \rho \underline{g}\, dV = \int_{B(\underline{x},\varepsilon)} \nabla p \, dV$$

$\Leftarrow$ pontosan $\forall \underline{x}$, és $\forall \varepsilon > 0$ esetén

$$\Downarrow$$

$$\nabla p = \rho \underline{g}$$

$$\boxed{\text{grad}\, p = \rho \cdot \underline{g}}$$

itt ρ függhet $\underline{x}$-től (nem feltétlenül összenyomhatatlan a folyadék)

Ha pl feltesszük, hogy a víz összenyomhatatlan

$$\underline{g} = 9{,}81 \ \frac{m}{s^2}$$

$$\rho = 1000 \ \frac{kg}{m^3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \underline{k} = 9810 \cdot \underline{k}$$

$$\Downarrow$$

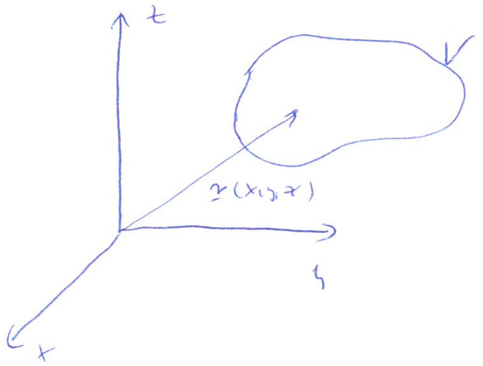
p csak z-től függhet (csak a mélységtől)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 9810$$

$$\hookrightarrow \boxed{p(x,y,z) = 9810 \cdot z}$$

452/

(2)

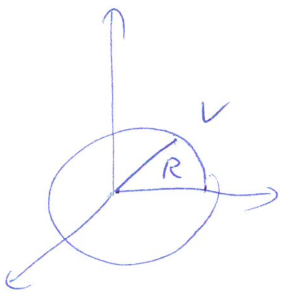


$\rho(x,y,z)$ sűrűségű V test

Θ_V origóra vett inercia nyomatéka

$$\int_V (x^2+y^2+z^2)\,\rho\, dV$$

Számoljuk ki az origó kp-ú R sugarú gömb origóra vett inercianyomatékát:



$$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

↑

ki tudjuk számolni hármasintegrálként

VAGY: Gauss–Osztrogradszkij tétellel:

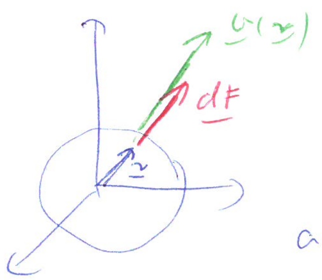
$$\underline{v}(\underline{r}) := |\underline{r}|^2\cdot\underline{r} = (x^2+y^2+z^2)\cdot(x,y,z) = \left(x^3+xy^2+xz^2,\ x^2y+y^3+yz^2,\ x^2z+y^2z+z^3\right)$$

$\Downarrow$

$$\operatorname{div}\underline{v} = (3x^2+y^2+z^2)+(x^2+3y^2+z^2)+(x^2+y^2+3z^2) = 5(x^2+y^2+z^2)$$

$\Downarrow$

$$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dV = \frac{1}{5}\iiint_V \operatorname{div}\underline{v}\,dV \underset{\substack{\uparrow\\ G\text{-}O}}{=} \frac{1}{5}\oiint \underline{v}\,d\underline{F}$$



$\underline{v} \parallel d\underline{F}$ $\qquad$ $\underline{r}\cdot d\underline{F} = |\underline{r}|\cdot dF$

a felületen $|\underline{v}| = R^3$

453/

$$\Longrightarrow \quad \oint\!\!\oint_F \underline{v}\, d\underline{F} = \oint\!\!\oint_F R^3 dF = R^3 \underbrace{\oint\!\!\oint_F dF}_{4R^2\pi} = 4R^5\pi$$

$4R^2\pi$ (R sugarú gömb felszíne)

↳ az [illegible] $\frac{4}{5} R^5 \pi$

Megj. **Maxwell-egyenletek**

$\underline{E}$: elektromos térerősség vektor
$\underline{B}$: mágneses térerősség vektor
ρ: elektromos töltéssűrűség
$\underline{j}$: áramsűrűség vektor
c: fénysebesség
t: idő

$$\mathrm{rot}\, \underline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = \underline{0}$$

$$\mathrm{div}\, \underline{E} = 4\pi\rho$$

$$\mathrm{rot}\, \underline{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\underline{j}$$

$$\mathrm{div}\, \underline{B} = 0$$

↑

differenciális alak